7. série

(20. listopadu 2008)

1. úloha Nechť M je konvexní mnohostěn s větším počtem stěn než vrcholů. Jaký je nejmenší možný počet trojúhelníkových stěn M?

2. úloha Nechť p a q jsou nesoudělná přirozená čísla. Řekneme, že dvojice (p, q) je obarvující, ve chvíli kdy množinu $\mathbb{Z}$ lze obarvit třemi barvami tak, že pro libovolné $z \in \mathbb{Z}$ jsou čísla z, $z + p$ a $z + q$ různobarevná. Dokažte, že dvojice (p, q) je obarvující, právě když je $p + q$ dělitelné 3.

3. úloha V tabulce $n \times n$ je k políček vybarveno červeně (ostatní jsou nevybarvená). V každém tahu vybarvíme červeně každé políčko, jehož alespoň dvě hranou sousedící políčka jsou vybarvena červeně. Najděte nejmenší k takové, že pro nějaké počáteční vybarvení k políček bude po několika tazích vybarvena celá tabulka.

4. úloha Rozhodněte, zda lze $\mathbb{R}^3$ pokrýt disjunktními přímkami tak, že žádné dvě z těchto přímek nejsou rovnoběžné.

5. úloha V závislosti na přirozeném n spočtěte

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2^x) \sin x} \, \mathrm{d}x.$$

6. úloha Rozhodněte, zda existuje měřitelná funkce $f \colon [0, 1] \to$ taková, že $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\int_0^1 f = 0$ a že f na intervalu $[0, 1]$ splňuje Darbouxovu vlastnost „nabývání mezihodnot“.