5. série

(6. listopadu 2008)

1. úloha Dokažte, že pokud každý řetězec i antiřetězec v částečně uspořádané množině M je konečný, potom je i M konečná. Řetězec v částečně uspořádané množině je taková množina $N \subseteq M$, že pro každé dva prvky $x, y \in N$ platí $x \leq y$ nebo $y \leq x$ (tj. jsou porovnatelné), antiřetězec je taková $N \subseteq M$, že žádné dva její prvky nejsou porovnatelné.

2. úloha Rozhodněte, jestli lze rovinu pokrýt konečně mnoha vnitřky parabol.

3. úloha Rozhodněte, jestli existuje spojitá funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že $f(x)$ je racionální pro každé iracionální x a $f(q)$ je iracionální pro každé racionální q.

4. úloha Nechť $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pro $t \in [0,1]$ definujeme v rovině body $A_t = [t, 0]$ a $B_t = [f(t), 1]$. Dokažte, že sjednocení úseček A_tB_t pro $0 \leq t \leq 1$ je lebesgueovsky měřitelná množina a najděte všechny spojité f, pro které je Lebesgueova míra této množiny nejmenší možná.

5. úloha Kartografové žijící na planetě ve tvaru pneumatiky chtějí zmapovat celý povrch své planety. Jaký nejmenší počet stránek musí mít jejich atlas, aby se jim to podařilo? Žádný bod povrchu planety není na jedné stránce atlasu zakreslen více než jednou, tj. každá stránka atlasu pokrývá území homeomorfní s otevřeným jednotkovým kruhem.

6. úloha Nechť A a B jsou reálné $n \times n$ matice splňující $A^2 + B^2 = AB$. Dokažte, že pokud $AB - BA$ je invertibilní matice, pak n je dělitelné třemi.