12. série

(8. ledna 2009)

1. úloha Nechť a, b jsou kladná reálná čísla. Označme $m(a,b) = \min\{a, \frac{1}{b}, \frac{1}{a+b}\}$. Pro kterou dvojici (a,b) je $m(a,b)$ maximální?

2. úloha Pepa měl za úkol umocnit přirozené číslo na druhou. Vyšlo mu 202-ciferné číslo, ale protože byl Pepa pořádně nepořádný, rozmazal omylem 102. číslici zprava. Jeho výsledek nyní vypadá takto $\underbrace{9\ldots9}_{100\times}\bullet\underbrace{0\ldots0}_{100\times}9$. Pomožte mu výsledek opravit. Znova se s tím násobit nechce.

3. úloha Mimozemšťané hrají s lidmi zvláštní hru, nechají lidstvo zvolit si nějaké přirozené číslo n a pak si vyberou k a l a unesou k kluků a l děvčat. Každému z nich řeknou seznam n navzájem různých čísel. Pokud se lidem podaří vybrat čísla ze svých seznamů tak, aby žádná holka neměla stejné číslo jako nějaký kluk, mimozemšťané lidi vrátí na zem. Jinak je sní.
Rozhodněte, která strana má v této hře vyhrávající strategii. Předpokládejte, že počet lidí na zemi je neomezený.

4. úloha Posloupnost $\{a_n\}$ je zadána rekurentně následujícím předpisem:

$$a_1 = 1/2,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1},\ n = 1, 2, \ldots$$

Dokažte, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 1.$$

5. úloha Konvexní mnohoúhelník v rovině se nazývá *rozložitelný*, pokud jej lze rozřezat na konečně mnoho disjunktních konvexních mnohoúhelníků, jejichž přeskládáním vznikne čtverec. (Při přeskládávání povolujeme pouze přímé shodnosti - tj. rotaci, posunutí a jejich kombinace.)
Dokažte, že libovolný konvexní 107-úhelník v rovině je *rozložitelný.* Dále rozhodněte, zda platí, že každý konvexní mnohoúhelník v rovině je *rozložitelný.*

6. úloha Nechť C je konečná množina reálných $n \times n$ matic, která tvoří grupu vzhledem k maticovému násobení. Předpokládejme, že $\sum_{M \in C} \operatorname{tr}(M) = 0$, kde $\operatorname{tr}(A)$ značí stopu matice A (tj. součet prvků na diagonále). Dokažte, že $\sum_{M \in C} M$ je nulová matice.