11. série

(18. prosince 2008)

1. úloha Nechť p je prvočíslo. Dokažte, že rovnice

$$2^p + 3^p = a^n$$

nemá žádné řešení v přirozených číslech pro $n \geq 2$.

2. úloha Nechť B je množina s binární operací $\circ$. Předpokládejme, že pro každé $a, b \in B$ platí

$$(a \circ b) \circ a = b.$$

Dokažte, že pro každé $a, b \in B$ platí

$$a \circ (b \circ a) = b.$$

3. úloha Nechť f je reálná funkce. Definujme

$$f^* = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

pokud existuje.
Ukažte, že existuje f spojitá v 0 taková, že f^* existuje a je spojitá na celém $\mathbb{R}$, ale $f'(0)$ neexistuje.

4. úloha Rozhodněte, zda existuje posloupnost reálných čísel $a_0, a_1, \ldots$ taková, že pro každé $n \geq 0$ má polynom $a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$ právě n po dvou různých reálných kořenů.

5. úloha Mapou rozumíme graf, jehož vrcholy jsou nějaké po dvou disjunktní souvislé podmnožiny roviny. Dva vrcholy jsou spojeny hranou, pokud jejich sjednocení je souvislá množina. Rozhodněte, zda existuje konstanta k taková, že každou mapu lze obarvit k barvami. Pokud existuje, najděte nejmenší možnou hodnotu k.

6. úloha Rozhodněte, zda existují dvě uspořádaná tělesa $(T, \leq)$ a $(T', \leq)$ taková, že T a T' jsou izomorfní jako tělesa, $(T, \leq)$ a $(T', \leq')$ jsou izomorfní jako uspořádané množiny, avšak $(T, \leq)$ a $(T', \leq')$ nejsou izomorfní jako uspořádaná tělesa.