10. série

(11. prosince 2008)

1. úloha Nechť G je graf na n vrcholech a bez lichých kružnic. Dokažte, že

$$\frac{\alpha(G)}{n} \geq \frac{1}{2}$$

a že konstantu $\frac{1}{2}$ nelze (pro všechna n dohromady) zlepšit. Symbol $\alpha(G)$ značí velikost největší nezávislé množiny v G.

2. úloha Určete, pro která přirozená n platí následující tvrzení. Pokud T je komutativní těleso, potom existují regulární matice $A, B \in T^{n\times n}$ takové, že jejich součet je jednotková matice (nad T).

3. úloha Nechť C je (libovolně natočený a libovolně posunutý) čtverec $n \times n$ v $\mathbb{R}^2$. Dokažte, že C obsahuje nejvýše $(n+1)^2$ mřížových bodů (tj. bodů jejichž obě souřadnice jsou celočíselné).

4. úloha Dokažte, že množina $C \subseteq \mathbb{R}$ je množinou bodů spojitosti nějaké funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, právě když je typu G_δ (tj. spočetným průnikem otevřených množin).

5. úloha Zjistěte, či existuje posloupnost spojitých funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ taková, že $\sum f_n$ konverguje absolutně stejnoměrně, ale přitom f_n nesplňují Weierstrassův M-test (tj. $\sum \max\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \infty$).

6. úloha Rozhodněte, jestli lze kruh o průměru 100 pokrýt 99 pásy o šířce 1.