1. série

(9. října 2008)

1. úloha Určete nejmenší přirozené číslo m takové, že kdykoliv vybereme m různých čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 2000\}$, potom mezi těmito čísly jsou dvě, jejichž součet nebo rozdíl je roven 667.

2. úloha K daným číslům 2 a 7 utvoříme posloupnost 2,7,1,4,7,4,2,8, ... jednociferných přirozených čísel tak, že postupně násobíme sousední členy a výsledek připojíme jako další jeden nebo dva členy. Kolikrát se v této posloupnosti objevuje číslice 6?

3. úloha Nechť X je libovolná množina. Dokažte, že každá bijekce $f\colon X \to X$ je složením dvou involucí na X. (Involuce na X je bijekce $g\colon X \to X$, pro kterou platí $g = g^{-1}$.) *Pokud úlohu nevyřešíte pro obecnou množinu, vyřešte ji alespoň pro X konečnou.*

4. úloha Okruh R (s jednotkou) je booleovský, pokud pro každé $a \in R$ platí $a = a^2$. Prvek $a \in R$ je nilpotentní, pokud pro nějaké přirozené n platí $a^n = 0$. Dokažte, že okruh R je booleovský, právě když R je komutativní, neobsahuje nenulové nilpotentní prvky a pro každé $a, b \in R$ platí $ab(a + b) = 0$.

5. úloha Je množina $\mathbb{Q}^2 \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ souvislá v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$? (Množina $X \subseteq \mathbb{R}^2$ je souvislá, pokud ji nelze zapsat jako disjunktní sjednocení dvou otevřených množin.)

6. úloha Martin a Pavel si mezi sebou vyměňují informace. Mají však dispozici pouze následující způsob. Martin dostane šachovnici 8×8, jejíž některá políčka jsou obarvená bíle a ostatní černě (ani Martin ani Pavel dopředu nevědí toto obarvení; na šachovnici jsou připsané souřadnice). Poté Martin změní barvu právě jednoho políčka. Šachovnici pošle Pavlovi. Kolik bitů informace si Martin a Pavel můžou vyměnit, pokud se dopředu domluvili na strategii?