# 6. série

(19. listopadu 2007)

**1. úloha** Nechť $a$ a $a'$; $b$ a $b'$; $c$ a $c'$ jsou tři dvojice protilehlých hran čtyřstěnu. Dokažte, že čísla $a + a'$, $b + b'$ a $c + c'$ splňují trojúhelníkovou nerovnost.

**2. úloha** Sečtěte řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right).$$

**3. úloha** Prvočíselný rozklad $n + 1$ přirozených čísel obsahuje jen $n$ prvočísel. Dokažte, že existuje neprázdná podmnožina těchto $n + 1$ čísel taková, že součin jejích prvků je čtverec.

**4. úloha** Nechť je dáno $\alpha \in [0, 1]$ a $n$ přirozené. Na kružnici o obvodu 1 zvolíme náhodně, rovnoměrně, nezávisle $n$ bodů. Spočítejte pravděpodobnost, že těchto $n$ bodů lze pokrýt obloukem délky $\alpha$.

**5. úloha** Nechť $T = V_1V_2 \cdots V_n$ je simplex a $G$ je jeho těžiště. Označme $V_i'$ průsečík (různý od $V_i$) sféry opsané $T$ a přímky $V_iG$. Dokažte, že

$$\operatorname{vol} V_1'V_2' \cdots V_n' \geq \operatorname{vol} T,$$

kde symbol vol značí $(n - 1)$-rozměrný objem.

**6. úloha** Nechť $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných funkcí. Dokažte, že existují reálné funkce $g$ a $h$ takové, že libovolné $f_i$ lze získat jenom skládáním funkcí $g$ a $h$.