5. série

(5. listopadu 2007)

1. úloha Rozřezejte dva shodné pravidelné šestiúhelníky tak, aby ze vzniklých dílků šlo poskládat rovnostranný trojúhelník.

2. úloha Dokažte, že pro všechna $x \in (0, \pi)$ a $y \in (0, 1)$ platí

$$y \sin x < \sin xy.$$

3. úloha Nechť $A_0 A_1 \cdots A_n$ je simplex v $\mathbb{R}^n$. Pro $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ označme V_i n-rozměrný objem (Lebesgueovu míru) stěny ležící naproti A_i. Dokažte, že

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_n > V_0.$$

4. úloha Nalezněte všechna $(a, b, c) \in \left(\mathbb{Z}_0^+\right)^3$ taková, že

$$7^a + 1 = 3^b + 5^c.$$

5. úloha Nechť a_i je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Musí řada

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{lcm}(a_i, a_{i+1})}$$

konvergovat? Výraz lcm značí nejmenší společný násobek.

6. úloha Nechť σ je permutace cifer 0, 1, ..., 9. Nechť $f\colon [0, 1) \to [0, 1)$ je definována následujícím způsobem, když $x = \overline{0, x_1 x_2 x_3 \cdots}$ je desetinný rozvoj x, potom $f(x) = \overline{0, \sigma(x_1)\sigma(x_2)\sigma(x_3) \cdots}$. (Pro jednoznačnost desetinného rozvoje uvažujeme rozvoj x takový, který nemá jenom devítky krom konečně mnoha pozic.)

(i) Nalezněte body, ve kterých je f spojitá (diferencovatelná).

(ii) Spočítejte Riemannův integrál z f.