4. série

(29. října 2007)

1. úloha Dokažte, že pro každé přirozené n je číslo

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8}$$

trojúhelníkové. Trojúhelníkové číslo je číslo tvaru $\frac{m(m+1)}{2}$ pro m přirozené.

2. úloha V závislosti na přirozeném n určete počet $x \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, pro která platí

$$x \equiv x^2 \pmod{n}.$$

3. úloha Nechť f a g jsou nenulové reálné polynomy takové, že $f(x^2+x+1) = g(x)f(x)$. Dokažte, že f má sudý stupeň.

4. úloha Nechť a_1, a_2, ... , a_n jsou reálná čísla taková, že

$$\begin{aligned} \sum_i a_i &> 0, \\ \sum_{i<j} a_i a_j &> 0, \\ \sum_{i<j<k} a_i a_j a_k &> 0, \\ &\vdots \\ a_1 a_2 \cdots a_n &> 0. \end{aligned}$$

Dokažte, že všechna a_i jsou kladná.

5. úloha Nechť x, y jsou reálná taková, že $x + y = 1$, a m, n jsou přirozená. Dokažte, že

$$\sum_{i=0}^{m-1} \binom{n+i-1}{i} x^i y^n + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+i-1}{i} x^m y^i = 1.$$

6. úloha Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Funkci $f\colon X \to X$ nazveme slabou kontrakcí, pokud pro každá dvě $x, y \in X$, $x \neq y$ splňuje $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$.

(i) Nalezněte příklad úplného metrického prostoru a slabé kontrakce na něm, která nemá pevný bod.

(ii) Nalezněte příklad kompaktního metrického prostoru a slabé kontrakce na něm, která není kontrakcí, tj. neexistuje $c \in (0, 1)$ takové, že $\rho(f(x), f(y)) < c\rho(x, y)$ pro libovolná $x, y \in X$.

(iii) Dokažte, že slabá kontrakce na kompaktním metrickém prostoru má právě jeden pevný bod.