11. série

(7. ledna 2008)

1. úloha Pro která přirozená n lze čísla 1, 2, ..., n uspořádat do posloupnosti tak, že průměr žádných dvou neleží mezi nimi.

2. úloha Krychle je rozřezaná na konečně mnoho kvádrů. Sočet objemů koulí opsaných těmto kvadrům je roven objemu koule opsane krychli. Dokažte, že kvádry, na které je koule rozřezána, jsou ve skutečnosti krychle.

3. úloha Rytíři kulatého stolu se společně s králem (ten je také zároveň rytířem) chystají na slavnostní přípitek. Na začátku sluha nalil králi plný pohár a ostatním rytířům nic. Nyní se opakuje následující postup: Vyberou se dva sousední rytíři a ti si mezi sebou přelijou víno tak, aby měli oba stejně. Po konečném počtu kroků se rytířům podaří docílit toho, že mají všichni stejně vína. Určete možné počty rytířů.

4. úloha Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel taková, že $\sum_n a_n = a$. Dokažte, že $\sum_n na_n$ konverguje, právě když konverguje $\sum_n a - s_n$, kde $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

5. úloha Nechť X je (obloukově) souvislý metrický prostor. Rozhodněte, jestli nutně platí následující implikace: Jsou-li A, B neprázdné podmnožiny X takové, že $A \cap B = \emptyset$ a $\mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(B)$, potom uzávěr $A \cup B$ je X.

6. úloha Spočtěte

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} \right) \cdot \left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} + \cdots + \binom{n}{n} \right).$$