10. série

(17. prosince 2007)

1. úloha Nechť $f(k)$ značí počet nul v desítkovém zápise čísla k. Spočtěte

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{f(k)},$$

kde $n = 10^{10} - 1$.

2. úloha Nechť A, B a $A+B$ jsou matice s hodností 1. Dokažte, že všechny řádky matic A i B jsou násobkem jednoho řádkového vektoru nebo všechny sloupce matic A i B jsou násobkem jednoho sloupcového vektoru.

3. úloha Určete jakých hodnot může nabývat součet velikostí[1] vnitřních úhlů čtyřstěnu.

4. úloha Nechť $a_0 > -1$. Definujme rekurentně $a_n = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + a_{n-1})}$.

(a) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} 4^n(1 - a_n)$.

(b) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$.

5. úloha Je dán soubor čtverců o součtu obsahů 3.

(a) Dokažte, že těmito čtverci lze pokrýt jednotkový čtverec.

(b) Dokažte, že pokud pokrýváme rovnoběžně s osami jednotkového čtverce, je 3 nejmenší možná konstanta, která zaručuje existenci pokrytí.

(c) Najděte nejmenší možnou konstantu pro analogickou úlohu – pokrývání vícerozměrné krychle.

6. úloha Nechť G je otevřená hustá podmnožina Cantorova diskontinua. Rozhodněte, zda je nutně hranice G spočetná.

[1] Velikost trojrozměrného úhlu se měří jako obsah průniku úhlu se sférou (povrchem koule) se středem ve vrcholu úhlu a poloměrem 1.