Řešitelský seminář - 1. série **10. 10. 2007**

1. Nechť $n \geq 3$ a $k \geq 1$ jsou přirozená čísla. Dokažte, že n^k může být vyjádřeno jako součet čtverců přesně n přirozených čísel.
2. Nechť $k_1, k_2, \ldots, k_n$ jsou různá celá čísla a $m_1, m_2, \ldots, m_n$ je nějaká jejich permutace. Dokažte, že číslo
$$|k_1 - m_1| + |k_2 - m_2| + \cdots + |k_n - m_n|$$
je sudé.
3. Pro množinu E bodů trojrozměrného euklidovského prostoru označmě $L(E)$ množinu všech bodů, které leží na nějaké přímce, která spojuje dva různé body z E. Buď T množina vrcholů pravidelného čtyřstěnu. Najděte $L(L(T))$.
4. Buďte a_n, b_n rekurentně zadané posloupnosti s
$$a_1 = b_1 = 1,$$
$$a_{n+1} = a_n + b_n,$$
$$b_{n+1} = a_n \cdot b_n.$$
Dokažte, že čísla a_n jsou po dvou nesoudělná.
5. Ostře rostoucí posloupnost nezáporných celých čísel má vlastnost, že každé nezáporné celé číslo n se nechá jednoznačně vyjádřit ve tvaru $a_i + 2a_j + 4a_k$ (přitom i, j, k nejsou nutně rozdílná). Určete všechny možné hodnoty a_{111}.
6. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla a platí
$$\lim_{n\to\infty} \sin(na_1)\sin(na_2)\cdots\sin(na_k) = 0.$$
Dokažte, že alespoň jedno a_i je celočíselný násobek π.