Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte následující zobecnění Hallovy věty: Mějme množinový systém $(X, \mathcal{S})$ a přirozené číslo k takové, že libovolný podsystém $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ obsahuje alespoň $|\mathcal{T}| - k$ prvků. Potom po vyřazení nejvýše k množin ze $\mathcal{S}$ má výsledný systém množin svůj systém různých reprezentantů.

Úloha 2: Pro $n \geq 2$ buďte $A_1, \ldots, A_n$ navzájem různé množiny o alespoň $n-1$ prvcích. Dokažte, že pro množinový systém $(\bigcup_i A_i, \{A_1, \ldots, A_n\})$ existuje systém různých reprezentantů.

Úloha 3: Uvažujme systém všech $(n-1)$-prvkových podmnožin množiny $\{1, \ldots, n\}$. Kolik má systémů různých reprezentantů?

Úloha 4: Je dána množina s $(q+1)^2$ body. Každému bodu u je přiřazena množina barev $L(u)$ o velikosti $q+1$. Navíc pro libovolné dva různé body u, v platí $|L(u) \cap L(v)| \leq 1$. Dokažte, že body lze obarvit tak, že každý bod u dostane barvu z $L(u)$ a různé body jsou obarveny různými barvami.

Úloha 5: Určete vrcholovou a hranovou souvislost následujících grafů:

a) stromů

b) cyklů a jejich doplňků

c) úplných bipartitních grafů $K_{m,n}$

d) platónských těles

Úloha 6: Nechť k_v značí maximální vrcholovou a k_e maximální hranovou souvislost grafu.

a) Dokažte, že pro graf G a hranu $e \in E(G)$ platí $k_e(G) - 1 \leq k_e(G - e) \leq k_e(G)$.

b) Dokažte, že pro graf G a vrchol $v \in V(G)$ platí $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - v)$.

c) Dokažte, že pro graf G a hranu $e \in E(G)$ platí $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e)$.

Úloha 7: Dokažte, že kontrakce hrany nesníží vrcholovou souvislost grafu o více než 1. Jinými slovy, že $k_v(G/e) \geq k_v(G) - 1$.

Úloha 8: Pro libovolnou dvojici přirozených čísel $k \geq 2$, $\ell \geq 2$ nalezněte graf, který je hranově k-souvislý, ale není vrcholově ℓ-souvislý.

Úloha 9: Ulice a křižovatky v malém městečku tvoří graf — křižovatky si představujeme jako vrcholy a ulice jako hrany grafu. Dokažte, že je-li graf dvousouvislý, potom lze ze všech ulic udělat jednosměrky tak, aby bylo možno projet autem z každé křižovatky na každou jinou křižovatku bez porušení dopravních předpisů. (Takové orientaci se říká silně souvislá orientace.)

Rozhodněte, zdali platí i obrácená implikace: „Má-li graf silně souvislou orientaci, pak je dvousouvislý."

Úloha 10: Dokažte, že pro každý 3-regulární graf G platí, že $k_v(G) = k_e(G)$.

Úloha 11: Každý kubický (tj. 3-regulární) bipartitní souvislý graf je nutně vrcholově 2-souvislý. Dokažte.

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte následující zobecnění Hallovy věty: Mějme množinový systém $(X, \mathcal{S})$ a přirozené číslo k takové, že libovolný podsystém $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ obsahuje alespoň $|\mathcal{T}| - k$ prvků. Potom po vyřazení nejvýše k množin ze $\mathcal{S}$ má výsledný systém množin svůj systém různých reprezentantů.

Úloha 2: Pro $n \geq 2$ buďte $A_1, \ldots, A_n$ navzájem různé množiny o alespoň $n-1$ prvcích. Dokažte, že pro množinový systém $(\bigcup_i A_i, \{A_1, \ldots, A_n\})$ existuje systém různých reprezentantů.

Úloha 3: Uvažujme systém všech $(n-1)$-prvkových podmnožin množiny $\{1, \ldots, n\}$. Kolik má systémů různých reprezentantů?

Úloha 4: Je dána množina s $(q+1)^2$ body. Každému bodu u je přiřazena množina barev $L(u)$ o velikosti $q+1$. Navíc pro libovolné dva různé body u, v platí $|L(u) \cap L(v)| \leq 1$. Dokažte, že body lze obarvit tak, že každý bod u dostane barvu z $L(u)$ a různé body jsou obarveny různými barvami.

Úloha 5: Určete vrcholovou a hranovou souvislost následujících grafů:

a) stromů

b) cyklů a jejich doplňků

c) úplných bipartitních grafů $K_{m,n}$

d) platónských těles

Úloha 6: Nechť k_v značí maximální vrcholovou a k_e maximální hranovou souvislost grafu.

a) Dokažte, že pro graf G a hranu $e \in E(G)$ platí $k_e(G) - 1 \leq k_e(G - e) \leq k_e(G)$.

b) Dokažte, že pro graf G a vrchol $v \in V(G)$ platí $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - v)$.

c) Dokažte, že pro graf G a hranu $e \in E(G)$ platí $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e)$.

Úloha 7: Dokažte, že kontrakce hrany nesníží vrcholovou souvislost grafu o více než 1. Jinými slovy, že $k_v(G/e) \geq k_v(G) - 1$.

Úloha 8: Pro libovolnou dvojici přirozených čísel $k \geq 2$, $\ell \geq 2$ nalezněte graf, který je hranově k-souvislý, ale není vrcholově ℓ-souvislý.

Úloha 9: Ulice a křižovatky v malém městečku tvoří graf — křižovatky si představujeme jako vrcholy a ulice jako hrany grafu. Dokažte, že je-li graf dvousouvislý, potom lze ze všech ulic udělat jednosměrky tak, aby bylo možno projet autem z každé křižovatky na každou jinou křižovatku bez porušení dopravních předpisů. (Takové orientaci se říká silně souvislá orientace.)

Rozhodněte, zdali platí i obrácená implikace: „Má-li graf silně souvislou orientaci, pak je dvousouvislý."

Úloha 10: Dokažte, že pro každý 3-regulární graf G platí, že $k_v(G) = k_e(G)$.

Úloha 11: Každý kubický (tj. 3-regulární) bipartitní souvislý graf je nutně vrcholově 2-souvislý. Dokažte.