Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Ověřte, že je-li $a(x)$ vytvořující funkce pro posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, potom $\frac{a(x)}{1-x}$ je vytvořující funkce pro posloupnost částečných součtů $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$.

Úloha 2: S pomocí vytvořujících funkcí sečtěte následující řady:

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$

c) $\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k$

d) $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$

e) $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$

Úloha 3: Nalezněte vzorec (analytické vyjádření) pro n-tý člen posloupnosti zadané pomocí rekurence:

a) $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + 1$

b) $a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3$

c) $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$

d) $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - 4$

e) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$

f) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n) + 1$

g) $a_0 = 2, a_1 = 3, a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$

h) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 2$

i) $a_0 = a_1 = 1, 5a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$

j) $a_0 = 4, a_1 = 3, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3 \cdot 2^n$ pro $n \geq 2$

Úloha 4: Pro posloupnost zadanou rekurentním vztahem $a_0 = 2, a_1 = 8, a_{n+2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}$ určete $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Úloha 5: Kolik existuje různých triangulací pravidelného n-úhelníku s označenými vrcholy?

Úloha 6:

a) Kolika způsoby je možné vydláždit obdélník o rozměrech $n \times 2$ pomocí dlaždic 1×2?

b) A kolik různých způsobů dláždění stejnými dlaždicemi má obdélník o rozměrech $n \times 3$?

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Ověřte, že je-li $a(x)$ vytvořující funkce pro posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, potom $\frac{a(x)}{1-x}$ je vytvořující funkce pro posloupnost částečných součtů $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$.

Úloha 2: S pomocí vytvořujících funkcí sečtěte následující řady:

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$

c) $\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k$

d) $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$

e) $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$

Úloha 3: Nalezněte vzorec (analytické vyjádření) pro n-tý člen posloupnosti zadané pomocí rekurence:

a) $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + 1$

b) $a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3$

c) $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$

d) $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - 4$

e) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$

f) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n) + 1$

g) $a_0 = 2, a_1 = 3, a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$

h) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 2$

i) $a_0 = a_1 = 1, 5a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$

j) $a_0 = 4, a_1 = 3, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3 \cdot 2^n$ pro $n \geq 2$

Úloha 4: Pro posloupnost zadanou rekurentním vztahem $a_0 = 2, a_1 = 8, a_{n+2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}$ určete $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Úloha 5: Kolik existuje různých triangulací pravidelného n-úhelníku s označenými vrcholy?

Úloha 6:

a) Kolika způsoby je možné vydláždit obdélník o rozměrech $n \times 2$ pomocí dlaždic 1×2?

b) A kolik různých způsobů dláždění stejnými dlaždicemi má obdélník o rozměrech $n \times 3$?