

Grafy

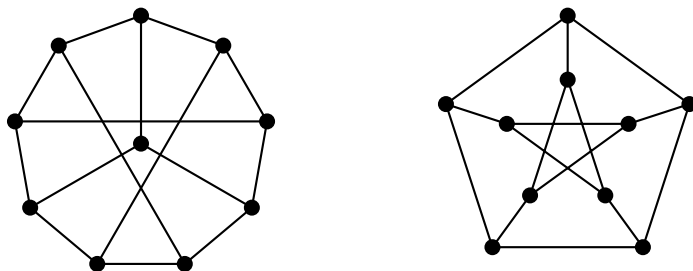
Připomenutí: *Graf* je dvojice $G = (V, E)$, kde $E \subseteq \binom{V}{2}$. Pokud není explicitně řečeno jinak, v úlohách uvažujeme pouze konečné grafy (tedy takové, že V je konečná).

Dva grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou *izomorfní*, pokud existuje bijekce $f: V \rightarrow V'$ taková, že pro každé $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ máme $\{u, v\} \in E$, právě když $\{f(u), f(v)\} \in E'$.

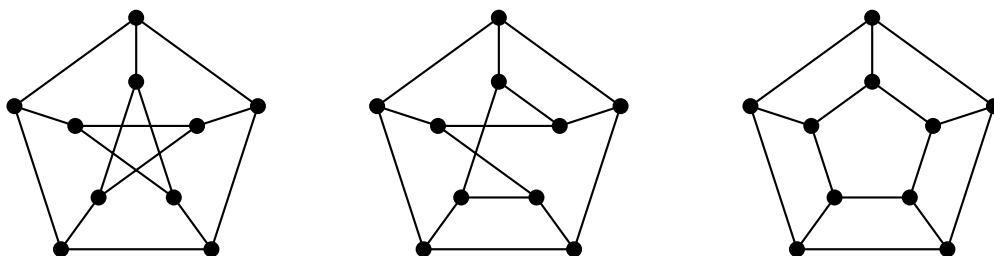
Je-li dán graf $G = (V, E)$, potom jeho *podgraf* je graf $G' = (V', E')$, pokud $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$. Pokud navíc platí $E' = E \cap \binom{V'}{2}$, je G' *indukovaný podgraf*.

Doplňek grafu $G = (V, E)$ je graf $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Úloha 1: Nalezněte izomorfismus grafů na obrázku.



Úloha 2: Ukažte, že žádné dva grafy na obrázku nejsou izomorfní.



Úloha 3: Nalezněte všechny neizomorfní grafy na čtyřech vrcholech. U každého určete, kolik by měl izomorfních protějšků, kdyby množina vrcholů byla předepsaná, například $\{u, v, w, x\}$.

Úloha 4: Uvažme množinu vrcholů $\{1, \dots, n\}$. Kolik je na této množině různých, ale vzájemně izomorfních:

- úplných grafů K_n ;
- cest s n vrcholy;
- kružnic C_n ;
- úplných bipartitních grafů $K_{k, n-k}$ v závislosti na k ;

e) disjunktních sjednocení dvou úplných grafů K_k a K_{n-k} v závislosti na k ;

f) grafů, v nichž každý vrchol má stupeň 1?

Úloha 5: Existuje bipartitní graf s alespoň 5 vrcholy, jehož doplněk je také bipartitní?

Úloha 6: Dokažte, že dva grafy jsou izomorfní, právě když jsou izomorfní jejich doplňky.

Úloha 7:* Pro každé n přirozené sestrojte graf, který má přesně n *automorfismů*, tedy izomorfismů zobrazujících tento graf na sebe.

Úloha 8: Najděte všechny grafy, které neobsahují jako podgraf

a) cestu délky 2;

b*) cestu délky 3.

Úloha 9:* Najděte všechny grafy, které neobsahují cestu délky 2 jako indukovaný podgraf.

Úloha 10: Ukažte, když graf G obsahuje lichou kružnici jako podgraf, tak také obsahuje nějakou lichou kružnici jako indukovaný podgraf.

Úloha 11: Najděte všechny kružnice, které jsou izomorfní svému doplňku.