

Princip inkluze a exkluze

Připomenutí: Jsou-li $A_1, \dots, A_n$ konečné množiny. Potom platí

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_n \cap A_{n-1}| \text{ (všechny dvojice)} \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_n \cap A_{n-1} \cap A_n| \text{ (všechny trojice)} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Kompaktně zapsáno:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{I \subseteq [n], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Úloha 1: Určte počet přirozených čísel od 1 do 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14.

Úloha 2: Kolik čísel zbyde z $1, \dots, n$ po vyškrtnutí násobků 2, 3, 5 a 7?

Úloha 3:

- (a) Prodavač suvenýrů má na prodej tři stejné figurky papeže Jana Pavla II, čtyři Jánošíky a pět Švejků. Kolika způsoby může figurky vyrovnat do výlohy do jedné řady tak, aby se nikdy nestalo, že by všechny figurky stejné postavy tvořily souvislý blok?
- (b) Kolika způsoby lze postavit do řady 5 Čechů, 4 Slováky a 3 Poláky tak, aby všichni příslušníci žádného národa netvořili souvislý blok? Na rozdíl od předchozí varianty jsou nyní osoby navzájem rozeznatelné.

Úloha 4: Kolik existuje pořadí písmen A, B, D, E, I, K, M, N, R, Ů, Z takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov

1. BAR, DEN, RAZIE
2. ARZEN, DRAK, DŮM, DŮRAZ

Úloha 5: Kolika způsoby lze umístit osm kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby se na šachovnici vyskytovaly čtyři kameny ve stejném řádku nebo stejném sloupci?

Úloha 6: Petr Štědrý pořádá každý večer večeři pro své přátele. Na večeři jsou pozvaní vždy tři hosté. Kolika způsoby může Petr rozeslat pozvánky pro svých 7 přátel na celý týden tak, že každý z těchto sedmi přátel je alespoň jednou pozván?

Úloha 7: Na plesu je n párů. Kolik je rozdělení do dvojic takových, že žádný pár netančí spolu?