Matematická analýza II NMAI055

Robert Šámal (Paralelka Y)

Pokračování z MA1

Věta 4.1 (Jensenova nerovnost)**.** *Pokud je f konvexní na $[a, b]$, $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ a platí $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ (konvexní kombinace); potom $f(\sum_i \lambda_i x_i)$ (vážený průměr) $\leq \sum_i \lambda_i f(x_i)$.*

Pokud je f konkávní, platí opačná nerovnost.

Speciálně, pro $n = 2$: $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1)\lambda_2 f(x_2) \Rightarrow$ Bod $[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 f(x_1)\lambda_2 f(x_2)]$ leží na úsečce z $[x_1, f(x_1)]$ do $[x_2, f(x_2)]$ a graf f leží pod touto úsečkou, potom je f konvexní.

Důkaz. MI podle n:

$n = 1$... triviálně: $f(x_1) \leq f(x_1)$

$n = 2$... podle definice konvexity.

$n \to n + 1$:

Zavedeme si $x'_n = \frac{\lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}$ a také $\lambda'_n = \lambda_n + \lambda_{n+1}$. Pro $i \neq n$ máme $x'_i = x_i, \lambda'_i = \lambda_i$. Poté platí $\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i = \sum_{i=1}^{n+1} = 1$. Z toho vyplývá, že $x'n$ leží mezi x_n a $x_{n+1} \Rightarrow x'_n \in [a, b]$

Indukční předpoklad:

$$f(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i x'_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i f(x'_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i x_i) + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) f(\frac{\lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}) \leq$$

$$\leq \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_n) + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_{n+1})$$

Nyní si zavedeme $x''_1 = x_n, x''_2 = x_{n+1}$ a $\lambda''_1 = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}, \lambda''_2 = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}$. Ze speciálního případu pro $n = 2$ vychází $\lambda''_1 + \lambda''_2 = 1$.

□

Důsledek 4.1 (AG-nerovnost)**.** *Pro $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ platí:*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

K této nerovnosti je ekvivalentní pro $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n}(\log x_1 + \cdots + \log x_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \log(x_i)$$

Věta 4.2 (Rolleova)**.** *Za předpokladů, že $f(a) = f(b) = 0$ a f je spojitá a má vlastní derivace na $[a, b]$, potom existuje $\xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.*

Důkaz. Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maxima M a minima m, proto $\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M$.

Když $m = M = 0 \Rightarrow f$ je konstantní ... ξ lze zvolit libovolné.

BÚNO pro $M > 0$ platí: $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = M$ ... f nabývá v ξ maxima. Využitím Fermatovy věty získáme $f'(\xi) = 0$ pro $\xi \neq a, b$. □

Věta 4.3 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)**.** *Za předpokladů, že f má vlastní derivaci na intervalu $[a, b] \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Nebo-li na nějakém bodu funkce f nabývá stejné derivace jako je směrnice úsečky z bodu a do b.*

Důkaz. Zavedeme si velice magickou a speciální funkci $L(x)$, která je přímka procházející body $f(a)$ a $f(b)$. Pro tu platí $L(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $L(a) = f(a), L(b) = f(b)$.

Funkce f má vlastní derivace na intervalu a, b a z toho plyne, že f je na $[a, b]$ spojitá.

Dále si zavedeme funkci $g(x) = f(x) - L(x)$. Poté platí, že $g(a) = g(b) = 0$. Nyní můžeme využít Rolleovy věty (4.2). Takže $\exists \xi \in (a, b), g'(\xi) = 0$. Dostaneme že $f(\xi) - L(\xi) = 0$. A tedy $f'(\xi) = L'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Důsledek 4.2. *Pokud $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a, b)$, pak je f na intervalu J rostoucí.*

Důkaz. Sporem: $f' > 0$ na J a zároveň f není rostoucí. Z toho plyne, že $\exists a < b \in J : f(a) \geq f(b)$ Využijeme Lagrangeovu větu (4.3), ze které plyne: $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0$ a to je spor. □

4.1 Taylorův polynom

Chceme aproximovat hodnotu $f(a + h)$, pokud známe funkční hodnotu i derivaci v bodě a. Tu můžeme aproximovat tímto způsobem: $f(a + h) \doteq f(a) + f'(a)h$. Jenže tato aproximace není příliš přesná. Jak se toto dá vylepšit?

Definice 4.1 (n-tá derivace)**.** Značíme $f^{(n)}$ a je definovaná takto: $f^{(0)} = f$, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Pro speciální případy, tedy první, druhou a třetí derivaci můžeme použít zápis f', f'', f'''.

S využitím této definice nyní můžeme vytvořit aproximační vzorec, který se nazývá Taylorův polynom.

Definice 4.2 (Taylorův polynom)**.** Taylorův polynom funkce f v bodě a a řádu n je definován jako:

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Další možnost, jak napsat TP je: $T_n^{f,a}(a+h) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{h^k}{k!}$.

Příklad. TP prvního stupně je $T_1^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Taylorův polynom pro logaritmus je:
$T_n^{\log,1}(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{h^n}{n}$

Také platí, že při derivaci TP n-tého stupně dostaneme: $(T_n^{f,a}(x))' = T_{n-1}^{f',a}(x)$

Důkaz. Derivací TP dostaneme:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a)\frac{k(x-a)^{k-1}}{k(k-1)!} = \sum_{l=0}^{n-1} f^{(l+1)}(a)\frac{(x-a)^l}{l!}$$

□

Důsledek 4.3. *Pro každé $k \leq n$ platí: $\left(T_n^{f,a}\right)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$.*

Důkaz. MI podle k:
1. $k = 0$: triviální.
2. $k \Rightarrow k+1$:

$$\left(T_n^{f,a}\right)^{(k+1)} = \left(\left(T_n^{f,a}\right)'\right)^{(k)} = \left(T_n^{f',a}\right)^{(k)} = f^{(k+1)}(a)$$

□

Věta 4.4 (Taylorův polynom s Peánovým tvarem zbytku)**.** *Pokud platí, že $a \in \mathbb{R}, f^{(n)}(a)$ existuje a je vlastní, potom:*

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + o((x-a)^n)$$

Pokud platí, že $f^{(n)}$ je spojitá v a, tak platí:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Důkaz. Z limity vyplývá, že podle spojitosti dostaneme $f(a) = T(a)$. Proto dostaneme limitu $\frac{0}{0}$. Můžeme použít L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - (T_n^{f,a}(x))'}{n(x-a)^{n-1}} = \frac{1}{n} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} \text{(IP)}$$

Nyní budeme postupovat matematickou indukcí podle n:

$n = 0$: Dostaneme $\lim \frac{f(x)-T_0^{f,a}(x)}{(x-a)^0}$, protože $f = f^{(0)}$ a je spojitá v a.

$n \Rightarrow n-1$ Využijeme limity, které jsme dostali v L'Hospitalově pravidle a všimneme si, že dostaneme úplně to samé. Proto můžeme toto opakovat až do $n = 0$. □

Věta 4.5 (T.p. s Lagrangeovým tvarem zbytku)**.** *Nechť f má vlastní $(n+1)$-ní derivaci na intervalu I a platí BÚNO, že $a < x \in I$. Potom $\exists \xi \in (a, x)$:*

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Příklad. Mějme funkci $f(x) = \sin x$ a Taylorův polynom $T_2^{f,0}(x) = x + 0 \cdot x^2$. Potom platí, že:

$$\sin(x) = x - \cos\xi \frac{x^3}{3!}.$$

Víme, že $|\cos\xi| \leq 1$.

Vezměme si $\sin 0.1 \doteq 0.1$. Dostaneme tedy, že $|\sin 0.1 - 0.1| \leq 1 \cdot \frac{0.1^3}{6}$, tedy chyba je nejvýše $\frac{0.001}{6}$.

Větička 4.6 (Zobecněná Rolleova)**.** *Nechť platí $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = f(b) = 0$ a $f^{(n+1)}(x)$ je na intervalu $[a, b]$ definovaná. Potom existuje takové $\xi \in (a, b) : f^{(n+1)}(\xi) = 0$.*

Důkaz. Matematickou indukcí podle n:

$n = 0$ je v podstatě Rolleova věta 4.2.

$n > 0$ dostaneme dle Rolleovy věty $\exists b' \in (a, b) : f'(b') = 0$. Podle znění věty víme, že platí $f'(a) = (f')'(a) = \cdots = (f')^{(n-1)}(a) = 0 = f'(b')$.

Vezměme si $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$. Potom víme, že tato derivace existuje na $[a, b] \supseteq [a, b']$. Podle indukčního předpokladu pro $f', n-1, a, b'$ existuje takové $\xi : (f')^{(n)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi)$. □

Nyní již máme vše potřebné na to, abychom dokazali větu 4.5.

Důkaz věty 4.5. Nadefinujeme si funkci $g(y) = f(y) - T_n^{f,a}(y) - c(y-a)^{n+1}$.

Prvním pozorováním zjistíme, že $g(a) = 0$ a po derivaci funkce g dostaneme rovnost $g'(a) = f'(a) - (T_n^{f,a})'(a) - c(n+1)(y-a)^n = 0$ pro $y = a$.

Zopakujme tuto derivaci n krát, potom pro $y = a$ získáváme rovnost $g^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - T^{(n)}(a) - c(n+1)(n)(n-1)\cdots 2(y-a) = 0$. Nyní máme předpoklady pro Rolleovu větu. Proto zvolme konstantu c tak, aby $g(x) = 0$.

Dle zobecněné Rolleovy věty (4.6) pro g, a, x existuje $\xi \in (a, x) : g^{(n+1)}(\xi) = 0$. Po derivaci dostaneme $g^{(n+1)}(y) = f^{(n+1)}(y) - 0 - c(n+1)n(n-1)\cdots 1$, protože Taylorův polynom je nejvýše stupně n, Z toho vyplývá, že naše hledané $c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, čímž máme, co potřebujeme. □

5 Primitivní funkce (neurčitý integrál)

Mějme funkci $f(t)$, která se rovná množství vyteklé tekutiny z nádoby v čase t. Víme, že $f(t+h) - f(t)$ je přibytek tohoto množství v čase od t do $t + h$. Z toho nám vyplývá díky definice derivace funkce, že $f'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ je průtok v čase t.

Definice 5.1. Nechť f je definovaná na otevřeném intervalu I. Potom F je *primitivní funkce* k f na I, pokud $F'(x) = f(x) \forall x \in I$.

Příklad. Mějme $(\sin x)' = \cos x$ na $\mathbb{R}$. Potom primitivní funkce ke $\cos x$ je funkce $\sin x$.

Věta 5.1 (Jednoznačnost primitivní funkce)**.** *Necht F, G jsou primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R} : F(x) = G(x) + c$.*

Důkaz. Víme, že $F' = G' = f$. Tudíž musí platit, že $(F - G)' = F' - G' = 0$. Tedy rozdíl těchto funkcí musí být nějaká konstanta c. □

Množina všech primitivních funkcí k funkci f je množina $\{F(x)+c : c\in\mathbb{R}\}$, kde $F(x)$ je jedna primitivní funkce. Značíme:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

Věta 5.2 (Linearita primitivní funkce)**.** *Máme funkce f, g, které mají primitivní funkce F, G na otevřeném intervalu I a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom $\alpha f + \beta g$ má primitivní funkci $\alpha F + \beta G$.*

Důkaz. Triviální: $(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$ □

Věta 5.3 (Per-partes)**.** *Mějme funkce f, g spojité na intervalu I. Potom platí $\int gF = GF - \int Gf$ MLPSS.*

Důkaz. Chceme ukázat, že $(GF - H)' = gF$, kde $H = \int Gf$. Využitím věty o aritmetice derivací dostaneme: $(GF-H)' = (GF)' - H' = G'F + GF' - Gf = gF + Gf - Gf = gF$. □

Příklad. $\int xe^x = xe^x - \int e^x x' = (x-1)e^x + c$. Pro kontrolu $((x-1)e^x)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$

Věta 5.4 (1. O substituci pro primitivní funkci)**.** *Mějme $F' = f$ na (a, b) a $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b))$, existuje vlastní derivace φ na (α, β). Potom platí:*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + c \text{ na } (\alpha,\beta)$$

Důkaz. Triviální. Chceme získat, že $F(\varphi(t))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. To platí díky větě o derivaci složené funkce. □

Věta 5.5 (2. O substituci)**.** *Mějme $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$, která je na a $\varphi' \neq 0$. Pokud $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = G(t)$ na (α, β), potom platí:*

$$\int f(x)\,dx = G(\varphi^{-1}(x)) \text{ na } (a,b)$$

Důkaz. Ukážeme, že φ je monotónní. Nechť SÚNO je φ' spojitá. Potom na (α, β) bude $\varphi' > 0 \vee \varphi' < 0$. Kdyby tomu tak nebylo, $\varphi'(t) = 0$ pro nějaké $t \in (\alpha, \beta)$, což by byl spor. Tudíž může φ na (α, β) být pouze rostoucí nebo klesající.

Protože je φ na a je monotónní, určitě má inverzi $\varphi^{-1} : (a, b) \to (\alpha, \beta)$.

Užijme první větu o substituci (5.4), dostaneme $f_1 = f(\varphi(t))\varphi'(t), F_1 = G, \varphi_1 = \varphi^{-1}$. Derivace $\varphi_1'(x) = (\varphi^{-1}(x))' = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \neq 0$ existuje vlastní. Dosadíme tedy a máme:

$\int f_1(\varphi_1(t))\varphi_1'\,dt = F_1(\varphi_1(t))$

$\int f(\varphi(\varphi_1(t)))\varphi'(\varphi_1(t))\varphi_1'(t)\,dt$

$\int f(\varphi(\varphi^{-1}(t)))\frac{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}\,dt$

Z tohoto již dostaneme požadovanou rovnici a věta je dokázaná. □

Příklad. Mějme $\int \sin(2t)dt$. Vezmeme si $f(x) = \sin x$ a $\varphi(t) = 2t$. Intervaly $(a, b) = (\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Primitivní funkce je $F(x) = -\cos x$. Výraz upravíme a dostaneme $\frac{1}{2}\int \sin(2t)\cdot 2dt = \frac{1}{2}F(\varphi(t)) + c = -\frac{1}{2}\cos(2t) + c$.

Příklad. Mějme $\int te^{-t^2}\,dt$. Vyjádříme si $x = x(t) = t^2$, derivací dostaneme $x'(t) = \frac{2x}{2t} = 2t$. Z toho máme $dx = 2tdt$.

Dosadíme a dostaneme:

$$\int te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int e^{-t^2}\cdot 2t\,dt \overset{\int f(x)}{=} \frac{1}{2}\int e^{-x}dx \overset{F(x)}{=} -\frac{1}{2}e^{-x} + c \overset{F(\varphi(t)))}{=} -\frac{1}{2}e^{-t^2} + c$$

Příklad. Mějme $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, počítáme na $(-1, 1) = (a, b)$. Vytvoříme substituce $x = \sin t, dx = \cos t dt$. Z toho máme $\sin = \varphi : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1, 1)$. Ověříme, že $\varphi' \neq 0$. Substituce aplikujeme a dostaneme:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\,dt = \int \frac{\cos t}{|\cos t|}\,dt = \int 1\,dt \overset{G(t)}{=} t + C \overset{G(\varphi^{-1}x)}{=}$$

$$= \arcsin x + c$$

5.1 Integrace racionálních funkcí

Definice 5.2. *Racionální funkce* je $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q jsou polynomy a Q není identicky 0.

Fakta o polynomech:

1. P je polynom, $a \in \mathbb{R}$, potom:

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow \exists \text{polynom } Q : P(x) = (x-a)Q(x)$$

   Určitě existuje takový Q, r takový, že pro $x = a$ platí rovnost $0 = P(x) = (a-a)Q(a) + r \Rightarrow r = 0$

2. (*Základní věta algebry*). Polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, kde pro každé $a_j \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$, pak existují takové $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, pro které platí $P(x) = a_n(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

3. Předchozí věta nemusí platit v $\mathbb{R}$.

4. Polynom P má reálné koeficienty, poté platí $P(z) = 0 \Rightarrow P(\bar{z}) = 0$.

5. (*Důsledek předchozího faktu*). Polynom P s reálnými koeficienty lze napsat jako součin lineárních výrazů $(x-x_i)$ a kvadratických výrazů $(x^2 + a_j x + b_j)$.

Věta 5.6 (Rozklad na parciální zlomky)**.** *Necht P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

1. $\deg p < \deg Q$

2. $Q(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{p_i} \prod_{j=1}^{l}(x^2 + a_j x + b_j)^{q_j}$*, kde* $p_i, q_j \in \mathbb{N}, x_i, a_j, b_j \in \mathbb{R}$*,* $\sum_{i=1}^{k} p_i + 2\sum_{j=1}^{l} q_j = \deg Q$*,* $x_i \neq x_j (t \neq j)$*,* $(a_j, b_j) \neq (a, b)(i \neq q)$

Potom platí:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{p_i} \frac{A_{i,t}}{(x-x_i)^t} + \sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{q_j} \frac{B_{j,t}x + C_{j,t}}{(x^2 + a_j x + b_j)^t}$$

Příklad.

$$\frac{17x-1}{(x-1)^3(x+2)^2(x^2-1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)} +$$
$$+ \frac{D}{(x+2)^2} + \frac{E}{(x+2)} + \frac{Fx+G}{(x^2-1)^3} + \frac{Hx+I}{(x^2-1)^2} + \frac{Jx+K}{(x^2-1)}$$

No jo, to vypadá dost šíleně, jak se mají takové zlomky proboha hledat?

První možnost je „tupé“ hledání, kde dosadíme za x mnoho různých hodnot, tím dostaneme soustavu $S < R$ pro $A, B, \ldots$.

Další možnost je roznásobení jiným polynomem, v našem příkladu polynomy $(x-1)^3, x = 1; (x+2)^2, x = -2$.

Třetí možnost je roznásobením polynomem $Q(x)$, dostanu rovnost polynomů a porovnám koeficienty.

Důkaz. Vezmeme si jen případ, kde $Q(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$. Chceme $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_n} + \ldots$.

Využijeme metodu roznásobení. Tedy $A = \frac{P(x_n)}{\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)} = \frac{P(x_n)}{Q_1(x_n)}$. Z toho dostaneme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{AQ_1}{(x-x_n)(Q_1)} = \frac{P(x) - Q_1(x)\frac{P(x_n)}{Q_1(x_n)}}{Q(x)}$$

Vytvořme si z čitatele funkci $C(x_n) = P(x_n) - Q_1(x_n)\frac{P(x_n)}{Q_1(x_n)} = 0$. Z toho dostaneme, že $C(x) = (x-x_n)C_1(x)$. Z toho dostaneme, že rozdíl je $\frac{C_1(x)}{Q_1(x)}$.

Budeme pokračovat matematickou indukcí podle n.

Pro $n = 1$ máme $\deg P < \deg Q = 1$. Tedy $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\text{Číslo}}{x-x_1}$, tedy jsme hotovi.

Pro $n > 1$ máme $\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{x-x_n} = \frac{C_1(x)}{Q_1(x)}$. Stupeň Q_1 je menší, než $\deg Q$, tedy dle indukčního předpokladu lze rozložit. □

Jak tuto funkci integrovat: $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, kde $\deg P_1 < \deg Q$. Potom $Q(x)$ rozložíme na parciální zlomky, ale potřebujeme znát kořeny Q. Nakonec zintegrujeme každý sčítanec zvlášť:

1. $\int R(x)\,dx$ triviální, $R(x)$ je polynom, pro každou složku $\int \alpha x^k = \frac{\alpha x^{k+1}}{k+1} + C$.

2. $\int \frac{1}{x-a}\,dx = \log|x-a| + C$, toto nefunguje v a.

3. $\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = \int (x-a)^{-k}\,dx = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$

4. $\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx = \log|x^2+px+Q| + C$

5. $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx$ pro $k > 1$ je $\frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C$

6. $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$

7. $I_k = \int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)^k} + 2k\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}} = \frac{x}{(x^2+1)^k} + 2k(I_k - I_{k+1})$ pro $k > 1$ je tedy rekurentní formule

   $I_{k+1} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^k} + \left(1 - \frac{1}{2k}\right) I_k$

8. $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}$ převedeme úpravou na čtverec na předchozí případ, tedy pro $x + \frac{p}{2}^2 + C$, $y = x + \frac{p}{2}$

Příklad. Typické příklady řešené substitucemi:

- $\int R(\log x)\frac{1}{x}\,dx = \int R(t)\,dt$, kde $t = \log x$ a $dt = \frac{1}{x}\,dx$
- $\int R(e^{ax})\,dx = \int \frac{R(e^{ax})}{ae^{ax}}ae^{ax}\,dx = \int \frac{R(t)}{at}\,dt$, kde $t = e^{ax}$ a $dt = ae^{ax}\,dx$
- $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ existují 4 substituce:
  - $t = \sin x$ pro $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$
  - $t = \cos x$ pro $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$
  - $t = \tan x$ pro $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$
  - $t = \tan \frac{x}{2} \ldots$ univerzální.

  Pokud máme integrál nějaké periodické funkce, která je navíc spojitá, tak ji můžeme vyřešit takovou substitucí na každé periodě zvlášť a potom na každém intervalu periody zvolit konstantu tak, aby výsledný integrál byl také spojitý („lepení“).
- $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right) = \int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)\,dt$ pro $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}$ a $x = \frac{dt^q - b}{a - ct^q} = \varphi(t)$
- Eulerovy substituce – $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

  Existuje tzv. Rischův algoritmus, který umí zintegrovat, co se dá.

Nyní se podívejme na jiný druh integrálů.

Definice 5.3 (Určitý integrál)**.** Nechť f je funkce $(a,b) \to \mathbb{R}$, F je primitivní funkce k f na (a,b), $F(b_-) = \lim_{x\to b_-} F(x)$ a $F(a_+) = \lim_{x\to a_+} F(x)$. Poté výraz

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = F(b_-) - F(a_+) = [F(x)]_a^b$$

je určitý (Newtonův) integrál.

Pozor, určitý integrál $\int_a^b f$ *nemusí* existovat, protože nemusí existovat primitivní funkce nebo limita v krajních bodech. Další možnost je, že dostaneme nedefinovaný výraz. Ale pokud tento integrál existuje, je jednoznačný.

Proč nás zajímají jednostranné limity místo funkčních hodnot? Ono se totiž může stát to, že funkce nebude v krajních bodech spojitá nebo definovaná. Pro příklad $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2\cdot 1 - 2\cdot 0 = 2$, přestože pro $x = 0$ není funkce definovaná.

Pokud pro určitý integrál $\int_a^b f(x)$ platí, že $a > b$, potom se tento určitý integrál rovná: $-\int_b^a f(x)$

Ukážeme, že pro určité integrály platí podobné vlastnosti jako pro neurčité integrály.

Věta 5.7 (per partes pro určitý integrál)**.** *Nechť f, g mají vlastní derivaci na (a,b). Potom*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \; MLPSS$$

Věta 5.8 (1. substituční pro určitý integrál)**.** *Mějme funkci $\varphi : (\alpha, \beta) \to I$, která má vlastní derivaci a funkci $f : I \to \mathbb{R}$. Potom platí:*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha_+)}^{\varphi(\beta_-)} f(x)\,dx \text{ MLPSS}$$

Věta 5.9 (2. substituční pro určitý integrál)**.** *Mějme funkci $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$, která je NA a má vlastní derivaci a funkci $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Potom platí:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a_+)}^{\varphi^{-1}(b-)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \text{ MLPSS}$$

Určité integrály nám umožňují definovat nové funkce, například chybová funkce $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, což je normální rozdělení (též Gaussova křivka) velmi využívané ve statistice. Derivace chybové funkce je $\operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

6 Riemannův integrál

Zatím jsme si zavedli Newtonův integrál, který funguje pomocí primitivních funkcí, což je inverzní operace k derivaci.

Integrál ale může také fungovat jako plocha pod funkční křivkou. Ta se historicky počítala tak, že se křivka aproximovala nějakými geometrickými tvary, u kterých obsah umíme spočítat, a tyto útvary postupně přibližujeme do nekonečna ke křivce funkce.

Definice 6.1. *Dělení intervalu* $[a, b]$ je $D = \{x_j : j = 0, \ldots, n\}$ takových, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Také říkáme, že dělení D' je *zjemnění* D, pokud platí $D' \supseteq D$.

Definice 6.2. Mějme omezenou funkci f na intervalu $[a, b]$ a dělení D. Potom horní a dolní součty se definují následovně:

$$S(f, D) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - x_{j-1}| \sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$$

$$s(f, D) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - x_{j-1}| \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$$

Definice 6.3. Riemannův integrál funkce f s dělením na intervalu $[a, b]$ se definuje následovně:

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S(f, D) :\ D \ldots \text{dělení } [a, b]\} \ldots \text{horní integrál}$$

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(f, D) :\ D \ldots \text{dělení } [a, b]\} \ldots \text{dolní integrál}$$

Definice 6.4. Pokud platí, že $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, tak řekneme, že f je na $[a, b]$ Riemannovsky integrovatelná, tedy $f \in R[a, b]$ a definuje se jako

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Věta 6.1 (O zjemnění dělení)**.** *Mějme f omezenou na $[a, b]$ a $D' \supseteq D$ dělení $[a, b]$. Potom platí následující:*

$$s(f, D) \leq s(f, D') \leq S(f, D') \leq S(f, D)$$

Důkaz. Druhá nerovnost platí triviálně jelikož platí, že $\inf(\ldots) \leq \sup(\ldots)$.

Ukážeme si, jak na první nerovnost. Definujeme si $D' = D \cup \{N\}$, nechť $N \in [x_{i-1}, x_i]$.

Tato nerovnost platí, protože infimum intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ je nejvýše tak velké, jako infima na intervalech $[x_{i-1}, N]$ a $[N, x_i]$.

Budeme tedy postupovat matematickou indukcí. Nyní si dělení D' rozložíme na $D_0 = D \subseteq D_1 \subseteq D_2 \subseteq \cdots \subseteq D_k = D'$ tak, aby platilo $|D_i \setminus D_{i-1}| = 1$. Již víme, že $s(f, D_{i-1}) \leq s(f, D_i)$. Takto se postupuje přes všechny D_i až po D'.

Poslední nerovnost analogicky. □

Věta 6.2 (O dvou děleních)**.** *Mějme f omezenou na $[a, b]$ a D_1, D_2 dělení $[a, b]$. Potom platí následující:*

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$$

Důkaz. Zavedeme si „Společné“ zjemnění $D = D_1 \cup D_2$. Podle věty 6.1 dostaneme, že $s(f, D_1) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq S(f, D_2)$. □

Definice 6.5. *Norma dělení D* je $\nu(D) = \max\{|x_j - x_{j-1}| : j = 1, \ldots, n\}$

Věta 6.3 (O aproximaci R. integrálu)**.** *Mějme f omezenou na $[a, b]$ a D_n dělení $[a, b]$ takové, že $\nu(D_n) \to 0$. Pak*

$$(R)\underline{\int_a^b} f = \sup\{S(f, D_n) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$(R)\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f, D_n) : n \in \mathbb{N}\}$$

Speciálně, pokud $\lim_{n\to\infty} S(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = A$*, potom je funkce R. integrovatelná a* $(R)\int_a^b f = A$*.*

Příklad. Vezměme si $f(x) = x^2$ a interval $[a, b] = [0, 1]$. Dělení D_n bude uniformní s krokem $\frac{1}{n}$, tedy $\nu(D_n) = \frac{1}{n}$. Potom $x_j = \frac{j}{n}(j = 0, \ldots, n)$.

Potom horní součet je $S(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - x_{j-1}| \sup(f) = \sum \frac{1}{n} f(\frac{j}{n}) = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3} \to \frac{1}{3}$. Dolní součet vyjde analogicky stejně, tedy $\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$.

Věta 6.4 (Kritérium R. integrovatelnosti)**.** *Mějme f omezenou na $[a, b]$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *$f \in R[a, b]$*
2. *$\forall \varepsilon > 0 \exists D \ldots$ dělení $[a, b]$ takové, že $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$.*

Důkaz. Nejprve $1 \Rightarrow 2$. Víme, že $A = \int f = \underline{\int} f = \overline{\int} f$. Poté $\exists D_1 : s(f, D_1) > A - \frac{\varepsilon}{2}$ a $\exists D_2 : S(f, D_2) < A + \frac{\varepsilon}{2}$.

Dále si vezmeme $D = D_1 \cup D_2$. Pro něj poté platí $A - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, D_1) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq S(f, D_2) < A + \frac{\varepsilon}{2}$. Z toho nakonec dostaneme $S(f, D) - s(f, D) < (A + \frac{\varepsilon}{2}) - A - \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, čímž máme implikovanou 2.

Nyní ukážeme $\neg 1 \Rightarrow \neg 2$. Aby 1 neplatila, musí platit $B = \underline{\int} f > \overline{\int} f = C$ nebo $B = \underline{\int} f < \overline{\int} f = C$.

Vezměme si první případ. Dostáváme následující tvrzení: $\exists D_1 : s(F, d_1) > B - \alpha$ a $\exists D_2 : S(F, d_1) < C + \alpha$. Pokud si vezmeme $\alpha = \frac{B-C}{2}$, dostaneme $S(f, D_2) < s(f, D_1)$, spor.

Nyní druhý případ. Víme, že $\forall D$ platí výrazy $\sup(s(f, D)) \geq s(f, D)$ a $\inf(S(f, D)) \leq S(f, D)$. Zvolme si $\varepsilon = \overline{\int} f - \underline{\int} f$. Pak dostaneme $S(f, D) - s(f, D) \geq \overline{\int} f - \underline{\int} f = \varepsilon$. A toto již implikuje negaci 2. □

Věta 6.5 (Monotonie a R. integrovatelnost)**.** *Mějme f omezenou a monotónní na $[a, b]$. Potom $f \in R[a, b]$.*

Důkaz. Užijeme předchozí větu, tedy $\forall \varepsilon > 0 \exists D \ldots$. Zvolíme si $D_n = \{x_j = a + \frac{b-a}{n} j : j = 0, \ldots, n\}$. Potom dostaneme $S(f, D_n) - s(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - x_{j-1}| (\sup_j f - \inf_j f)$.

Nechť je f BÚNO neklesající. Po dosazení D_n máme rovnost $\frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}$. Tedy $\forall \varepsilon > 0 \exists n : \frac{\text{const.}}{n} < \varepsilon$. Proto monotónní funkce je R. integrovatelná. □

Definice 6.6. Mějme funkci f, pro kterou platí: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in [a, b]\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, kde δ závisí pouze na ε. Potom f je *stejnoměrně spojitá* na $[a, b]$.

Každá stejnoměrně spojitá funkce je také spojitá. Obecně to ale platí naopak, pokud interval $[a, b]$ je uzavřený.

Věta 6.6 (Vztah spojitosti a R. integrálu)**.** *Pokud funkce f je spojitá na $[a, b]$, potom $f \in R[a, b]$.*

Důkaz. Víme, že $\forall y \in [a, b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in [a, b]\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, tedy f je na $[a, b]$ spojitá.

Užijeme definici stejnoměrné spojitosti na intervalu $[a, b]$. Dostaneme $\varepsilon > 0$, hledáme dělení D. Zavedeme si $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$. Poté najdeme $\delta > 0$ takové, že $\forall x, y \in [a, b] :\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon'$. D je libovolné dělení, kde $\nu(D) < \delta, D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

Funkce f na intervalech $[x_{j-1}, x_j]$ nabývá extrémů, tedy minimum v bodě d_j a maximum v h_j. Nyní se podíváme, jak vypadá rozdíl horního a dolního součtu.

$S(f, D) - s(f, D) = \sum_{j=1}^{n} f(h_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} f(d_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} (f(h_j) - f(d_j))(x_j - x_{j-1})$. První člen je menší, než ε', neboť $h_j - d_j \leq x_j - x_{j-1} \leq \nu(D) \leq \delta$.

Proto platí: $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon' \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon'(b - a) = \varepsilon$. □

Věta 6.7 (Vlastnosti R. integrálu)**.** *Následující vlastnosti platí:*

Linearita. $f, g \in R[a,b], \alpha \in \mathbb{R}$. *Potom* $(R)\int_a^b (f+g) = (R)\int_a^b f + (R)\int_a^b g$ *a* $(R)\int_a^b \alpha f = \alpha (R)\int_a^b f$.

Monotonie. $f \le g, f, g \in R[a,b]$. *Potom* $(R)\int_a^b f \le (R)\int_a^b g$.

Aditivita vzhledem k intervalu. $a < b < c$. *Potom* $(R)\int_a^c = (R)\int_a^b + (R)\int_b^c$

Podívejme se, jak se hodnota integrálu, tedy plocha pod křivkou, změní, pokud spojitě budeme měnit b.

Věta 6.8 (Derivace R. integrálu podle horní meze)**.** *Mějme neprázdný otevřený interval* J*, a funkci* $f: J \to \mathbb{R}$. *Dále nechť platí pro* $\forall \alpha < \beta \in J: \ f \in R[\alpha,\beta]$ *a* $c \in J$. *Dále ještě platí, že pro* $\forall x \in J$

$$F(x) = \begin{cases} (R)\int_c^x f & (x \ge c) \\ -(R)\int_x^c f & (x \le c) \end{cases}$$

Potom platí následující:

1. F *je spojitá na* J
2. f *je spojitá v* $x_0 \in J \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0)$

Příklad. Mějme interval $J = (0,1), f(x) = \frac{1}{x}$. Poté platí $\forall \alpha < \beta \in (0,1) f \in R[\alpha,\beta]$, avšak neplatí integrovatelnost v okrajích J, tedy $f \notin R[0,1]$

Důkaz. Vezměme si bod $x_0 \in J$. Chceme ukázat, že F je v bodě x_0 spojitá. BÚNO předpokládejme $x_0 > c$.

Zvolme nějaké $\alpha < x_0 < \beta$, kde $\alpha, \beta \in J$. Potom $f \in R[\alpha,\beta] \Rightarrow f$ je omezená na $[\alpha,\beta]$. Tedy $\exists M \in \mathbb{R}^+$ takové, že $-M \le f(x) \le M$.

Chceme pro $\varepsilon > 0$ najít $\delta > 0$ tak, aby $|x - x_0| \le \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| \le \varepsilon$. Pro $x_0 < x$ platí $|F(x) - F(x_0)| = |(\mathrm{R})\int_{x_0}^x f| \le M(x - x_0)$. Stačí volit $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Potom je rozdíl menší, než $M\delta = \varepsilon$.

Nyní chceme dokázat druhou vlastnost. Víme $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in J |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Nebo také jinak $f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$

Chceme, aby platilo $F'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{(\mathrm{R})\int_{x_0}^x f}{x - x_0}$. Pro $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (x_0, x_0 - \delta)$ platí nerovnost $f(x_0) - \varepsilon < \frac{(\mathrm{R})\int_{x_0}^x f}{x - x_0} < f(x_0) + \varepsilon$.

Tím jsme přímo z definice ověřili to, že naše hledaná limita se rovná $f(x_0)$. □

Důsledek 6.1.

Věta 6.9 (Vztah spojitosti a existence primitivní funkce)**.** *Mějme* J *neprázdný otevřený interval, a* f *spojitá na* J*. Potom* f *má na* J *primitivní funkcí.*

Důkaz. Užijeme větu 6.8:

$\forall \alpha < \beta \in J : f$ je spojitá na $[a,b]$, tedy podle věty 6.6 je $f \in R[\alpha,\beta]$. Definujme $F : J \to \mathbb{R}$ stejně, jako ve větě 6.8. Nahlédneme, že podmínky této věty platí. □

Důsledek 6.2.

Věta 6.10. *Mějme* f *spojitou na* $[\alpha,\beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Potom:*

$$(R)\int_\alpha^\beta f = [F]_\alpha^\beta = F(\beta_-) - F(\alpha_+)$$

kde F *je* primitivní funkce *k* f *na* (α,β).

6.1 Aplikace integrálu

1. Vypočítání plochy pod křivkou. Tedy máme $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ a plochou křivky se myslí obsah množiny $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le f(x)\}$ je $(\mathrm{R})\int_a^b f = (\mathrm{N})\int_a^b f$.
2. Vypočítání délky křivky danou funkcí.

   Definice 6.7. Mějme spojitou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a dělení $D[a,b]$. Potom

   $$L(f,D) = \sum_{j=1}^n \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}$$

   je délka lomené čáry aproximující křivku f a $L(f) = \sup\{L(f,D)\}$ je délka křivky.

Věta 6.11 (Délka křivky). *Nechť f má na $[a,b]$ spojitou první derivaci. Potom*

$$L(f,[a,b]) = \int_a^b \sqrt{1+f'^2}$$

Věta 6.12 (Délka křivky v $\mathbb{R}^n$). *Mějme spojitou funkci $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se spojitou první derivací. Délka křivky $\{\varphi(x) : x \in [a,b]\}$ je potom*

$$\int_a^b \sqrt{\varphi_1'(x)^2 + \varphi_2'(x)^2 + \cdots + \varphi_n'(x)^2}\, dx$$

3. Výpočet objemu a povrchu rotačního tělesa daného křivkou.

   Věta 6.13. *Mějme $f : [a,b] \to R$ spojitou a nezápornou a množinu $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b], \sqrt{y^2+z^2} \leq f(x)\}$ všech bodů rotačního tělesa daného křivkou $f(x)$. Pak platí:*

   Objem $T = \pi \int_a^b f^2$

   Povrch $T = 2\pi \int_a^b f\sqrt{1+f'^2}$ bez podstavy, pokud je f' spojitá.

4. Možnost odhadování součtu funkčních hodnot pomocí integrálů.

   Věta 6.14 (aproximace součtů pomoci integrálů). *Mějme f nerostoucí na intervalu $[a-1,b]$ (respektive $[a,b+1]$) a na tomto intervalu existuje R. integrál. Potom*

   $$\int_a^{b+1} f \leq \sum_{k=a}^{b} f(k) \leq \int_{a-1}^{b} f$$

   Pokud je f neklesající, platí opačná nerovnost.

   Důkaz. Integrál (R) $\int_a^{b+1} f$ má horní součet pro dělení $D = \{a, a+1, \ldots, b+1\}$ rovný $S(f,D) = \sum_{k=a}^{b} f(k)$. Z toho tedy vyplývá $S(f,D) \leq \int_a^{b+1} f$.

   Opačná nerovnost analogicky. □

Nyní si ukážeme souvislost konvergencí řad a integrálů.

Věta 6.15 (Integrální kritérium konvergence řady). *Mějme f nerostoucí, nezápornou a spojitou na intervalu $[n_0-1,\infty]$, potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konverguje} \Leftrightarrow \exists n_0 \int_{n_0-1}^{\infty} f(x)\, dx < \infty$$

Bez důkazu.
Tato suma je vlastně spodní součet funkce $f(n)$ pro rovnoměrné dělení $D = n_0-1, n_0, n_0+1, \ldots, \infty$.

Příklad. Mějme sumu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ a chceme vědět, kdy konverguje. K tomu využijeme integrály. Dostáváme integrál $\int_0^\infty \frac{1}{n^\alpha}$. Primitivní funkce pro $\alpha = 1$ je $[\log x]_0^\infty = \infty$, tedy řada nekonverguje. Pro $\alpha \neq 1$ dostáváme primitivní funkci $[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$. Tato limita je rovná 0 pro $\alpha > 1$, ∞ pro $\alpha < 1$.
Tedy tato suma konverguje právě pro $\alpha > 1$.

Příklad. Mějme funkci $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$. Potom:
$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 = \frac{\pi}{2}$
$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$
$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x - \sin x\, dx = [sin^{n-1}x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x - \cos x\, dx = \cdots = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$
Po vyřešení této rekurence dostaneme zajímavý vztah:
$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\frac{\pi}{2}, I_{2n+1} = \cdots \in \mathbb{Q}$
Wallisova formule: $\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$

7 Funkce více proměnných

Podívejme se na vektorové prostory a také na normy, tedy zobrazení z VP do $\mathbb{R}$, které splňuje trojúhelníkovou nerovnost. Vektorový prostor s normou se také nazývá *normovaný lineární prostor*.

Vezměme si normy na $\mathbb{R}^n$: maximová norma $\|x\|_\infty$ a eukleidovská norma $\|x\|_2$

Definice 7.1. *Úplné okolí* $U(a,\varepsilon)$ definujeme jako $\{x \in V : \|x-a\| < \varepsilon\}$.
Prstencové okolí $P(a,\varepsilon)$ definujeme jako $U(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$

Pozorování. $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n}\|x\|$

Důkaz. $|x_j| = \sqrt[p]{|x_j|^p} \leq \sqrt[p]{\sum |x_i|^p} \leq \sqrt[p]{n \cdot (\|x\|_\infty)^p} = \sqrt[p]{n}\|x\|_\infty$ □

Definice 7.2. Mějme x_n posloupnost bodů ve VP $(V, \|\cdot\|)$, potom posloupnost (x_n) má limitu $x \in V$, pokud $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Píšeme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ nebo $x_n \to x$

Důsledek 7.1. *Pro každou posloupnost* (x_n) *v* $\mathbb{R}^d$ *pro* $\forall x \in \mathbb{R}^d$ *platí:*
$x_n \to x$ *v* $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty) \Leftrightarrow x_n \to x$ *v* $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$

Důkaz. Ukážeme na implikacích:
$0 \leq \|x_n - x\|_\infty \leq \|x_n - x\|_p \to 0$
$0 \leq \|x_n - x\|_p \leq \sqrt[p]{d}\|x_n - x\|_p (\to 0)$, podle věty o strážnicích konverguje.

□

Definice 7.3. Posloupnost (v_n) je *omezená* právě, když posloupnost $\|v_n\|$ je omezená.

Věta 7.1 (Vlastnosti konvergence v $\mathbb{R}^d$)**.**

1. *Každá posloupnost má nejvýše 1 limitu*
2. $v_n \to v \Rightarrow \|v_n\| \to \|v\|$
3. $v_n \to v \Rightarrow (v_n)$ *je omezená*
4. *Pokud* $v_n = \sum_{i=1}^d v_n^i b_i$ *(pro libovolnou bázi)* $b_1, \ldots, b_d)$ *a* $v = \sum v^i b_i$*, pak* $v_n \to v \Leftarrow \forall i : v_n^i \to v^i$

Důkaz.

1. Sporem: Nechť $v_n \to v$ a $v_n \to u \neq v$. Zvolme si tedy $\varepsilon = \frac{\|u-v\|}{2}$. Podle definice limity máme pro $\varepsilon : \exists n_1 \forall n > n_1 : v_n \in U(v,\varepsilon) \wedge \exists n_2 \forall n > n_2 : v_n \in U(u,\varepsilon) \Rightarrow \exists z \in U(u,\varepsilon) \cap U(v,\varepsilon)$. Toto ale je spor s trojúhelníkovou nerovností, tedy $\|u-v\| \leq \|u-z\| + \|z-v\| < 2\varepsilon < \|u-v\|$ a máme spor.
2. Podle trojúhelníkové nerovnosti máme $0 \leq \big|\|v\| - \|v_n\|\big| \leq \|v - v_n\| \to 0$ dle předpokladu, tudíž $\big|\|v\| - \|v_n\|\big| \to 0$, z toho $\|v_n\| \to \|v\|$.
3. Víme, že $v_n \to v$. Podle předchozího bodu platí $\|v_n\| \to \|v\|$, což podle věty ze zimního semestru implikuje, že posloupnost $(\|v_n\|)$ je omezená.
4. Pro jednoduchost jen pro kanonickou bázi. $v_n \to v$ odpovídá tomu, že $\|v_n - v\|_\infty \to 0$, což je $\max\{|v_n^i - v^i| : i = 1, \ldots, n\}$, tedy i-tá souřadnice. Z toho víme, že $|v_n^i - v^i| \to 0$ a proto $v_n^i \to v^i$. v_n můžeme zapsat lineární kombinací v^i.

□

Nyní se podívejme na zobrazení z vektorového prostoru do jiného.

Definice 7.4. Mějme zobrazení $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (pro $n = 1$ nazýváme *funkcí m proměnných*), dále $a \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^m$ s maximovou normou. Potom definujme limitu $f(x)$ v a jako:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P(a,\delta) : f(x) \in U(A,\varepsilon)$$

Také definujeme limitu $f(x)$ v a vzhledem k množině D:

$$\lim_{(x\in D)\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P(a,\delta) \cap D : f(x) \in U(A,\varepsilon)$$

Příklad. Vezměme si funkci $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Tato funkce má $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ a velikosti prostorů $m = 2, n = 1$. Podívejme se na $\lim_{x \to (0,0)} f(x)$.

Všimneme si, že v daném bodě bude existovat nejvýše jedna limita.

Také si všimneme, že $\lim_{(x \in D) \to a} f(x) = A \Rightarrow \lim_{(x \in D' \subseteq D) \to a} f(x) = A$, pokud pro $D' \subseteq D$ platí $\forall \delta > 0 P(a,\delta) \cap D' \neq \emptyset$

Zvolme si tedy $D' = \{(x,y) : x = y\}$, potom $\lim_{(x,y) \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$.

Nyní si zvolme $D'' = \{(x,y) : x = -y\}$. Tím získáváme $\lim_{(x,y) \to 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$.

Toto ale znamená, že limita pro danou funkci f neexistuje.

Pro limity zobrazení platí obdoby vět o limitách funkcí z $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a to konkrétně věty o aritmetice limit, věta o strážnicích, Heineho věta a věta o limitě složené funkce.

7.1 Derivace

Definice 7.5. Mějme zobrazení $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ a $a \in D$. Potom *Parciální derivace* f v bodě a podle i-té proměnné je

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(a+h) - f(a)}{h} = f_i'(a) = ({f^1}_i'(a), \ldots, {f^n}_i'(a)),$$

kde $f_i(t) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_m)$, tedy nahradíme i-tou složku.

V podstatě si můžeme představit, že f_i je řezem daného zobrazení podle i-té souřadnice a tato derivace funguje právě na tomto řezu.

Příklad. Mějme funkci $f(x,y) = xy^2$. Potom parciální derivace vypadají následovně: $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x' = y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} f_y' = 2xy$. V tomto případě je $a = (x,y)$.

Příklad. Mějme zobrazení $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, které nám zobrazí $t \to (t, t^2, t^3)$. Potom zobrazení $g = (g^1, g^2, g^3)$. V tomto případě máme, že $g^j(t) = t^j$. Potom dostaneme derivaci $(g^j)' = jt^{j-1}$. Tedy derivace tohoto zobrazení je $g'(t) = (1, 2t, 3t^2)$.

Definice 7.6. Mějme funkci $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in D$. Potom f má v a *lokální minimum*, právě když

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap P(a,\delta) : f(x) \geq f(a)$$

Lokální maximum analogicky.

Věta 7.2 (Nutná podmínka pro lokální extrém)**.** *Pokud má funkce f má v a lokální extrém, potom platí jedna z podmínek:*

1. $\forall i = 1, \ldots, m : \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$ *nebo neexistuje*
2. *bod a je na okraji D, to znamená $\forall \delta > 0 : D \not\supseteq U(a,\delta)$.*

Důkaz. Pokud platí, že a je na okraji, je vše v pořádku. Pokud ne, potom $\exists \delta > 0 : D \supseteq U(a,\delta)$. Tak zafixujeme δ. (Předpokládáme, že toto okolí existuje.)

Máme $a \in D$. Podíváme se na okolí pro maximovou normu: Na $D \cap \prod_{i=1}^m (a_i - \delta, a_i + \delta)$ má f v a extrém, potom na $(a_i - \delta, a_i + \delta)$ má f_i extrém v a_i.

Potom podle nutné podmínky pro lokální extrém funkce jedné proměnné dostaneme, že $f_i'(a_i) = 0$ nebo neexistuje, nebo a_i je na kraji definičního oboru (toto nelze, jelikož $D_{f_i} \subseteq U(a_i,\delta)$). □

Příklad. Mějme funkci $f(x,y) = xy^2$, kde $D = [-1,1]^2$. Podívejme se na lokální extrémy.

Podle první podmínky musí platit $f_x' = f_y' = 0$. To platí, když $y = 0$. Podle druhé podmínky jsou lokální extrémy na okrajích, tedy $|x| = 1 \vee |y| = 1$.

Naopak, v bodě $(0, \frac{1}{2})$ není extrém, jelikož $f_x' \neq 0$. Stejně tak bod $(0,0)$ není extrém.

Jsou tu ale takové potíže věty 7.2. Tím, jak se díváme pouze na parciální derivace, pozorujeme pouze m „paprsků“, mimo tyto derivace se může funkce chovat všelijak divoce. Tim pádem vždy ten extrém nemůžeme určit jednoduše.

Definice 7.7. Mějme $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a $a \in D$. Potom *Druhá parciální derivace* je parciální derivace nějaké parciální derivace, konkrétně:

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Příklad. Mějme funkci $f(x,y)$ a pro $|x| < |y| : f(x,y) = 0$, pro $|x| \geq |y| = xy$. Potom parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$. Druhá parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$. Ale kdybychom to udělali v jiném pořadí, dostaneme $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Pokud $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ jsou spojité v bodě a, tak $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}$. Pokud $i \neq j$, potom se tato derivace nazývá smíšená.

Definice 7.8. $D^2 f(a)$ je matice z $\mathbb{R}^{m \times m}$ taková, že

$$(D^2 f(a))_{i,j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Definice 7.9. Matice A je *pozitivně definitní* právě, když jsou její vlastní čísla kladná. Podobně je A *negativně definitní* právě, když jsou její vlastní čísla záporná. Nebo matice A je *indefinitní* právě, když existuje dvojice vlastních čísel, kde je jedno kladné a jiné záporné.

Věta 7.3 (Postačující podmínka pro extrém)**.** *Mějme $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, a je uvnitř D ($\exists \delta > 0 : U(a,\delta) \subseteq D$ a dále platí, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ je spojité v a, a $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$, ($a$ je podezřelý z extrému), potom:*

1. *Pokud $D^2 f(n)$ je pozitivně definitní, pak f v a nabývá lokálního minima.*
2. *Pokud $D^2 f(n)$ je negativně definitní, pak f v a nabývá lokálního maxima.*
3. *Pokud $D^2 f(n)$ je indefinitní, pak f v a není lokální extrém.*

Tato matice D^2 se nazývá Hessova matice H.

Příklad. Vezměme si funkci $f(x) = x_1, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}^n$ nemá globální extrémy, na $(0,1)^n$ (otevřená krychle) taky nemá extrémy.

Věta. *Mějme $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, která je na D spojitá a D je kompaktní. Potom f nabývá na D maxima a minima.*

Definice 7.10. *Kompaktní množina* je taková, že je uzavřená a omezená.
Omezenost množiny D se definuje tak, že $\exists M : D \subseteq [-M, M]^n$.
Uzavřenost množiny znamená, že pro každou posloupnost x_i v D, která má $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, potom $x \in D$.

Příklad. Vezměme si uzavřený kvádr $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots = \prod i = 1^n [a_i, b_i]$. Ten je kompaktní.

Příklad. Pro $P \subseteq \mathbb{R}$ uzavřenou mějme $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ spojitou. Potom $f^{-1}(P)$ je uzavřená.
Mějme funkci $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum x_i^2$. Tato funkce je spojitá. Inverzní zobrazení $f^{-1}(\{1\})$ je jednotková sféra, inverze $f^{-1}([0,1])$ je jednotková koule. Obojí je kompaktní.

Definice 7.11. Mějme funkci $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Bod a je uvnitř D, tedy $\exists \delta > 0 : U(a,\delta) \subseteq D$. Nechť $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ splňuje $f(a+h) \doteq f(a) + L(h)$, tedy:

$$\lim_{(h \in \mathbb{R}^n) \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0 \Leftrightarrow f(a+h) - f(a) = L(h) + o(\|h\|)$$

Potom L je *totální diferenciál* f v a a píšeme $L = df(a) = Df(a)$.

Zatím jsme si ukázali, jak parciálně derivovat podle proměnné, tedy podle vektoru kanonické báze. Nyní si zobecníme derivaci podle jakéhokoliv vektoru.

Definice 7.12. Mějme funkci $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, a uvnitř D a $v \in \mathbb{R}^m$. Potom derivace f v a ve směru v je

$$d_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = g'(0)$$

Věta 7.4 (Souvislosti různých derivací)**.**

1. *$d_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.*
2. *$d_v f(a) = df(a)(v)$ MLPSS, kde df je lineární zobrazení.*
3. *$df(a)(e_i) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \ldots df(a)$ je jednoznačně určeno, pokud $df(a)$ existuje.*

4. *$df(a)$ má matici $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}\right)_{i=1,j=1}^{n,m}$*

Důkaz. Ukážeme jednotlivá tvrzení:

1. Z definice $f(a+te_i) = f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\dots,a_m) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

2. Nechť existuje $df(a)$. Potom $\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-L(h)\|}{\|h\|} = 0$. Speciálně pro $h = tv$, kde $t \in \mathbb{R}, t \to 0$ dostaneme $\lim_{t\to 0} \frac{\|f(a+tv)-f(a)-tL(v)\|}{|t|\cdot\|v\|}$. Z té se dá zkrátit $|t|$ a máme $\lim_{t\to 0} \|\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} - L(v)\| = 0$. To je ekvivalentní s tím, že $\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} - L(v) = o$ a dozvíme se, že $d_v f(a) = L(v)$.

3. Plyne z předchozích dvou bodů pro $v = e_i$. Pokud $df(a)$ existuje, tak má dané hodnoty na kanonické bázi, tedy $df(a)$ je jednoznačná.

4. Z předchozího bodu, matice zobrazení vzhledem k bázím e_i, e'_i má na pozici (i,j) souřadnici $L(e_j)$ příslušející k e'_i.

   Pro $L = df(a)$ víme, že $df(a)(e_j) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f^i(a)}{\partial x_j}\right)_{i=1}^{n}$. Z toho vyplývá, že matice vypadá podle znění věty.

□

Poznámka. Díky této větě nyní víme, že $f(a+h) = f(a) + df(a)(h)$. Protože $df(a)$ je lineární zobrazení, můžeme jej nahradit jako Jh, kde J je matice z věty.

Definice 7.13. (Operátorová) norma lineárního zobrazení je definovaná jako $\|L\| = \sup\{\|L(u)\| : \|u\| \leq 1\}$.

Je možno zavést více variant norem, například pro p-normy máme $\|L\|_{p\to q} = \sup\{\|L(u)\|_q : \|u\|_p \leq 1\}$. Typicky bereme $p = q = 2$.

Pozorování. $\|L(v)\| \leq \|L\| \cdot \|v\|$.

Důkaz. Vezměme si $u = \frac{v}{\|v\|}$. Potom norma $\|u\| = 1$. Z toho dostaneme, že $\|L(u)\| \leq \|L\|$. A tedy $L(u) = L\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{L(v)}{\|v\|}$. □

Pozorování. *Pro libovolné $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineární existuje $\|L\| \in [0,\infty)$.*

Důkaz. Vezměme si vektor u tak, že $\|u\| \leq 1$. Potom $\forall j : |u_j| \leq 1$.

Dostaneme podle i-té složky: $|\sum_{j=1}^{n} L_{ij}u_j| \leq \sum |L_{ij}||u_j| \leq \sum |u_j|$. Z toho dostaneme:

$\|Lu\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}|L_{ij}|)^2} \in \mathbb{R}$. □

Věta 7.5 (Totální diferenciál dává spojitost). *Nechť f má v a totální diferenciál. Pak je f v a spojitá.*

Důkaz. Ukážeme, že $\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)\|}{\|h\|} = 0$. Nadefinujeme si $L = df(a)$.

Máme výraz $0 \leq \|f(a+h) + f(a) - L(h) + L(h)\| \leq \|f(a+h) + f(a) - L(h)\| + \|L(h)\|$. Z definice totálního diferenciálu ale víme, že $\frac{\|f(a+h)+f(a)-L(h)\|}{\|h\|} \to 0$ pro $h \to 0$, a tedy pokud rozšíříme první sčítanec $\|h\|$, tak i $\|h\|\frac{\|f(a+h)+f(a)-L(h)\|}{\|h\|} \to 0$. Také víme, že $\|L(h)\| \leq \|L\|\|h\| \to 0$. Tedy $0 \leq \|f(a+h) - f(a)\| \leq \|h\| \cdot (\to 0) + \|h\|\|L\|$.

Podle věty o strážnících dostaneme, že se to celé rovná 0, tedy dokázáno. □

Věta 7.6 ($C^1 \to$ totální diferenciál). *Pokud f má parciální derivaci spojitou v a, tak f má v a totální diferenciál.*

Poznámka. $C^n(D) = \{f : D \to \mathbb{R} : n\text{-té parciální derivace spojité na } D\}$

Speciálně, C^0 je množina spojitých funkcí na D.

Jak se dá totální diferenciál využít?

Příklad. Spočtěme $1.1^{0.9}$.

Tento příklad si můžeme převést na funkci $f(x,y) = x^y$ a $f(1.1, 0.9) = f(1,1) + L(0.1, -0.1) + \text{chyba}$, kde $L = df$.

Dostaneme, že $L(p,q) = \frac{\partial f(1,1)}{\partial x}p + \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}q$. Pro konkrétní hodnoty dostaneme, že $L(1,1) = 1p + 0q$.

Získáváme přibližný výsledek $f(1,1) \doteq 1 + 0.1 \doteq 1.1$. Kalkulačkou máme výsledek $\doteq 1.089$, tedy chyba je ≈ 0.01.

Věta 7.7 (Aritmetika totálního diferenciálu). *Mějme $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, a uvnitř D, $c \in \mathbb{R}$. Pak*

1. $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$ *MLPSS*

2. $d(cf)(a) = c \cdot df(a)$ *MLPSS*

3. $(n=1) : d(fg)(a) = g(a) \cdot df(a) + f(a) \cdot dg(a)$ *MLPSS*

4. $(n=1, g(a) \neq 0) : d(\frac{f}{g})(a) = \frac{g(a) \cdot df(a) - f(a) \cdot dg(a)}{g^2(a)}$ *MLPSS*

Důkaz. Ukážeme pouze pro první bod.

Víme, že $f(a+h) = f(a) + L(h)_{=df(a)} + E(h)_{\to 0}$, stejně můžeme vyjádřit $g(a+h) = g(a) + M(h)_{=dg(a)} + F(h)_{\to 0}$.

Potom můžeme říct, že $(f+g)(a+h) = (f+g)(a) + (L+M)(h) + E(h) + F(h)$. Chceme, aby $d(f+g)(a) = L+M$. Naopak chceme, aby $E(h) + F(h)$ bylo dostatečně malé.

Z trojúhelníkové nerovnosti dostáváme $0 \leq \frac{\|E(h)+F(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|E(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|F(h)\|}{\|h\|}$. Použitím věty o strážnících dostáváme, že $E(h) + F(h) \to 0$. Proto je opravdu $L + M(h) = d(f+g)(h)$. □

Věta 7.8 (Totální diferenciál složeného zobrazení)**.** *Mějme* $\mathbb{R}^s \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$*, a uvnitř* $\mathbb{R}^s$*. Pak*

$$d(f \circ g)(a) = df(g(a)) \circ dg(a)$$

Totální diferenciál odpovídá nějakému lineárnímu zobrazení, takže v tomto případě je složení pravé strany násobením matic.

Důkaz. Podle definice $g(a+h) = g(a) + M(h)_{=dg(a)} + F(h)_{\to 0}$.

Pro složenou funkci je $f(g(a)+k) = f(g(a)) + L(k)_{=df(g(a))} + E(k)_{\to 0}$.

Nyní chceme, aby $f(g(a+h))_{=f \circ g(a+h)} = f(g(a))_{=f \circ g(a)} + LM(h)_{=d(f \circ g(a)} + G(h)_{\text{malá chyba}}$. Nyní si $f(g(a+h))$ aproximujeme podle definice: $f(g(a) + M(h) + F(h))$ a jako k si vezmeme $k(h) = M(h) + F(h)$.

Všimneme si, že $\|M(h) + F(h)\| \leq \|M(h)\| + \|F(h)\| \leq \|M\| \cdot \|h\| + \frac{\|F(h)\|}{\|h\|} \cdot \|h\|$. Z toho vyplývá, že $k \to 0$, když $h \to 0$.

Dostáváme, že $f(g(a) + M(h) + F(h)) = f(g(a)) + L \circ M(h) + [L(F(h)) + E(M(h) + F(h))]_{=G(h)}$. Zbývá ověřit, že $G(h)$ je malé:

$0 \leq \frac{\|G(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|L(F(h))\| + \|E(M(h)+F(h))\|}{\|h\|} \leq \|L\| \cdot \frac{\|F(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|E(M(h)+F(h))\|}{\|M(h)+F(h)\|} \cdot \frac{\|M(h)+F(h)\|}{\|h\|} = (\to 0) + (\to 0) \cdot \left(\frac{\|M\| \cdot \|h\|}{\|h\|}_{=\text{const.}} + \frac{\|F(h)\|}{\|h\|}_{\to 0} \right)$. Podle věty o strážnících to je tedy malé. □

Tento důkaz funguje jen v případě, že $g(a+h) \neq g(a) \forall h \in P(a, \delta)$, jinak je potřeba závěr udělat šíleněji.

Věta 7.9 (Řetízkové pravidlo)**.** *Pro funkci* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *platí:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(x), \ldots, g_m(x)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(g_1(x), \ldots, g_m(x)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) MLPSS$$

Důkaz. Víme, že $M = dg = \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right)_{j=1,i=1}^{m,s}$ a $L = df(g(x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_m}\right)$. Protože LM je matice totálního diferenciálu $d(f \circ g)$, podle věty 7.8 dostáváme, že $(LM)_{1,i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(x), \ldots, g_m(x))$ nebo můžeme roznásobit matice a dostaneme výraz na pravé straně z věty 7.9. □

Věta 7.10 (Přírůstek funkce více proměnných)**.** *Mějme* $D \subseteq \mathbb{R}^m$ *a úsečku* $\overline{ab} \in D$*. Potom*

$$\exists \psi \in \overline{ab} : f(b) - f(a) = df(\psi)(b-a)$$

Důkaz. Zavedeme si funkci $g(t) = a + t(b-a)$, kde $a, b \in \mathbb{R}^m$. Potom $g : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \to \overline{ab} \subseteq \mathbb{R}^m$.

Nyní si zavedeme $h(t) = f(g(t))$. Dostaneme, že $f(b) - f(a) = f(g(1)) - f(g(0)) = h(1) - h(0) = h'(\nu)(1-0)$. Využijeme větu 7.9 a máme $h(\nu) = (f \circ g)(\nu) = \frac{\partial h}{\partial t}(\nu) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(\nu)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial t}(\nu)$. Určíme si $\psi = g(\nu)$. Pokračujeme dále. $h(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\psi)(b_j - a_j) = df(\psi)(b-a)$. □

Definice 7.14. *Gradient* funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ v $a \in D$ je $\nabla f(a) =$ vektor parciálních derivací $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m})^T$.

Poznámka. Platí, že:

1. $df(a)(h) = \langle \nabla F(a), h \rangle$, tedy skalární součin gradientu a vzoru.

2. Podle věty 7.10: $f(b) - f(a) = \langle \nabla f(\psi), b-a \rangle$. Tedy gradient $f(a)$ míří směrem největšího růstu f.

3. Pro plochu $\{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}^m\}$, kde $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uvažme tečnou rovinu v bodě $(a, f(a))$. Normálový vektor této nadroviny je $n(a) = \begin{pmatrix} \nabla f(a) \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Gradient můžeme využít k tomu, abychom dokázali vypočítat minimum či maximum funkce numericky, a to tak, že se postupně pohybujeme proti/ve směru gradientu, dokud to je možné.

7.2 Implicitně zadané funkce

Vezměme si rovnici kružnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Potom grafem funkce je $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$.

Kdybychom tento graf chtěli zapsat funkcemi, museli bychom explicitně napsat rovnice grafu jako $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ a speciální body $(\pm 1, 0)$.

Definice 7.15. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Potom zápis $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ je matice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{n}$

Věta 7.11 (O implicitní funkci)**.** *Mějme $a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$, úplné okolí $U = U((a, b), \eta)$ $(\eta > 0)$ a zobrazení $f : U \to \mathbb{R}^n$ takové, že*

1. $f(a, b) = 0$
2. $f \in C^k(U)$
3. $\det\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) \neq 0$

Potom existuje $\delta, \Delta > 0$ taková, že

$$\forall x \in U(a, \delta) \exists! y = g(x) \in U(b, \Delta) : f(x, y) = 0$$

Navíc funkce $g \in C^k(U(a, \delta))$ a speciálně $\frac{\partial g}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.
Speciálně pro $n = 1$ dostáváme:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Důkaz. Ukážeme jen pro $n = 1$.

Podmínka 3 platí, číslo $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$, BÚNO nechť je kladné. Z podmínky 2 dostaneme, že $\exists V \dots$ okolí (a, b) : $\frac{\partial f}{\partial y} > 0 \in V$.

Zavedeme si nyní $F(t) = f(a, b + t)$, tedy funkci proměnné t, potom $F'(t) > 0$. Z toho vyplývá, že $\exists \Delta > 0$: $f(a, b - \Delta) < 0 = f(a, b) < f(a, b + \Delta)$ na $U \cap V$.

Ze spojitosti funkce $f(x, b + \Delta)$ v okolí $x = a$
$\exists \delta_+ > 0 : \forall x \in U(a, \delta_+) : f(x, b + \Delta) > 0$. Analogicky
$\exists \delta_- > 0 : \forall x \in U(a, \delta_-) : f(x, b - \Delta) < 0$.

Nyní si zvolme $\delta = \min\{\delta_-, \delta_+\}$. Pro $x \in U(a, \delta)$ uvážíme $F(t) = f(x, b+t)$. O té víme, že je spojitá, rostoucí a $F(-\Delta) < 0 < F(\Delta)$. Využijeme větu o nabývání mezihodnot, proto $\exists t : F(t) = 0)$. Z monotónnosti funkce získáváme jednoznačně určené t a $g(x) = y = b + t$.

Část věty, kde $g \in C^k$ vynecháme.

Nyní si vezmeme funkci $h(x) = f(x, g(x))$. Víme, že $h(x) = 0$ $\forall x \in U(a, \delta)$. Potom podle řetízkového pravidla dostaneme $\forall i \in 1, \dots, m : 0 = \frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$. Odečteme a vydělíme a dostaneme hledaný zlomek. □

7.3 Vázané extrémy

Naším cílem je hledat extrémy nějakého zobrazení $f(x)$ na nějaké omezené množině $\{x : g(x) = 0\}$.

Příklad. Mějme $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. Šlo by zvolit $x_2 = \sqrt{1 - x^2}$. Potom bychom hledali extrémy na funkci $f(x_1, \sqrt{1 - x_1^2})$ a $f(x_1, -\sqrt{1 - x_1^2})$. Na bodech $(\pm 1, 0)$ se ale nic nedozvíme.

Další možnost by bylo využití goniometrických funkcí: $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$. Potom bychom hledali extrémy na $f(\cos t, \sin t)$.

Věta 7.12 (Vázané extrémy / Lagrangeovy multiplikátory)**.**
Mějme funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in R^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k (k < n)$ taková, že $g \in C^1$ v okolí a, dále $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = k$.
Pokud a je lokální extrém na množině $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = o\}$, potom platí:

1. $g(a) = o$

2. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k : \nabla f(a) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g^i(a)$.

Speciálně pro $k = 1$ dostáváme $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.

Důkaz. Jen pro $k = 1$.

Prozkoumáme f na množině $\{g(x) = 0\}$. Vyjádřeme $x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1})$ tak, že $g(x_1, \dots, x_{n-1}, h) = 0$. Zkoumáme $f(x', h(x'))$ bez omezení.

Potom víme, že rank $\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}_1}(\mathrm{a}), \dots, \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}_n}(\mathrm{a})\right) = 1$, tedy alespoň jedna derivace je nenulová. BÚNO $\frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \neq 0$.

Dále víme, že $g \in C^1, g(a) = 0, \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \neq 0 \Rightarrow \exists \delta, \Delta : \exists h : U(a', \delta) \to U(a_n, \Delta)$.

Na $U(a) \cup \{g(x) = 0\}$ je a lokální extrém právě, když $a' = (a_1, \dots, a_{n-1})$ je lokální extrém funkce $F(x') = f(x', h(x'))$. Víme, že tato funkce je určena jednoznačně.

To je ekvivalentní s tím, že $\forall i = 1, \dots, n-1$ platí $0 = \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial x_n}}\right)$. To znamená, že $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial g}{\partial x_n}} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$. Označme si $\lambda =$ druhý výraz.

Z toho tedy dostáváme, že $\nabla f = \lambda \nabla g$, tedy dokázáno. □

7.4 Taylorův polynom více proměnných

Definice 7.16. *Multiindex* je definován jako $\alpha \in \mathbb{N}^m$, kde $|\alpha| = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ a $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!$.

Navíc, pokud máme $x \in \mathbb{R}^m$, potom $x^\alpha = \prod_{i=1}^{m} x_i^{\alpha_i}$

Navíc si definujme ještě parciální derivaci jako $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\prod_{i=1}^{m} \partial x_i^{\alpha_i}}$.

Definice 7.17. Taylorův polynom pro funkci více proměnných definujme následovně:

$$Tf_n = T_n^{f,a}(\alpha) = \sum_{k=0^n} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} (x-a)^\alpha$$

Věta 7.13 (Taylorův polynom pro více proměnných)**.** *Mějme funkci $f : D \to \mathbb{R}, D \supseteq U(a, \delta), f \in C^n(D)$.*

Potom $f(x) = T_n^{f,a}(x) + o(\|x-a\|^n)$.

Dále existují speciální případy:

$$\begin{aligned}
n = 0 \quad & f(x) = f(a) + o(1), f \text{ spojitá v } a \\
n = 1 \quad & f(x) = f(a) + \underbrace{\sum_{i_1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}_{df(a)(x-a)} + o(\|x-a\|) \\
n = 2 \quad & f(x) = f(a) + \sum_{i_1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2}(x-a)^T \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)}_{H=D^2 f}(x-a) + o(\|x-a\|^2)
\end{aligned}$$

Důsledek 7.2 (Postačující podmínka pro lokální extrémy)**.** *Mějme $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$, H pozitivně definitní. Potom má f v a lokální minimum. Tedy:*

$$f(x) \geq f(a) + \frac{1}{2}\lambda_{\min}\|x-a\|^2 + o(\|x-a\|^2) > f(a)$$

Lokální maximum analogicky.

Náznak důkazu. Definujme si funkci $g(f) = f(a+tv)$ pro $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R}$. Podíváme se na Taylorův polynom g, což je $\sum \frac{g^{(k)}(0)}{k!} h^k \doteq g(h) = f(a+th)$.

Tedy zkoumáme, jak se v daném bodě chová g a chceme se podívat na jeho derivace.

Platí, že $g^{(k)}(t) = \frac{\partial}{\partial v}^k f = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a)$. Pokračování nebude. □

8 Metrické prostory

Co je to vlastně vzdálenost? Ne, toto není filozofická otázka. No dobře, vzdálenost je relativní. Člověk by musel chodit městem přes pravoúhlé ulice, kde $d(x, y) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|$, zatímco takový ptáček se proletí vzdušnou čarou, tedy $d(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{(x_i - y_i)^2}$.

Definice 8.1. Zobrazení $d : X \times X \to \mathbb{R}$ je *metrika*, pokud jsou splněny následující podmínky:

- $d(x, y) \geq 0$, tedy nezápornost
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$, tedy symetrie
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, tedy trojúhelníková nerovnost

Příklad. Různé metriky:

1. Metrika $d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^m |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, existuje na $\mathbb{R}^m$ pro $p \geq 1$.
2. Grafová metrika v neorientovaných grafech
3. $X = C([0, 1]), d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|, d_\infty = \max |f(x) - g(x)|$

Definice 8.2. Množinový systém (X, d) je metrický prostor, právě když $X \neq \emptyset$ a d je metrika.

Definice 8.3.
Otevřená koule je $B(x, r) = U(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$.
Uzavřená koule je $\bar{B}(x, r) = U(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$.

Definice 8.4. Množina $G \subseteq X$ je *otevřená*, právě když $\forall x \in G \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq G$
Množina $F \subseteq X$ je *uzavřená*, právě když $X \setminus F$ je otevřená.

Příklad. Mějme $X = \mathbb{R}$ a $d = d_1$ a $a, b \in X$. Potom (a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$ jsou otevřené množiny, $[a, b]$ je uzavřená množina.

Věta 8.1 (Otevřené množiny)**.** *Následující tvrzení jsou pravdivé:*

1. *$\emptyset$ i X jsou otevřené množiny*
2. *$G_1, \ldots, G_n \subseteq X$ jsou otevřené, potom $\bigcap G_i$ je také otevřená.*
3. *$\forall \alpha \in A : G_\alpha$ je otevřená, potom $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je také otevřená. (Umožňuje nekonečné A)*

Věta 8.2 (Uzavřené množiny)**.** *Následující tvrzení jsou pravdivé:*

1. *$\emptyset$ i X jsou uzavřené množiny*
2. *$G_1, \ldots, G_n \subseteq X$ jsou uzavřené, potom $\bigcup G_i$ je také uzavřená.*
3. *$\forall \alpha \in A : G_\alpha$ je uzavřená, potom $\bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$ je také uzavřená. (Umožňuje nekonečné A)*

Důkaz. Nejprve věta 8.1.

1. $\emptyset \ldots \forall x \in \emptyset \phi(x)$ je vždy pravdivé.
   $X \ldots \forall x \in X \exists \delta = 1 : B(x, \delta) \subseteq X$.
2. $x \in \bigcap G_i \Rightarrow \forall i x \in G_i \Rightarrow \exists \delta_i > 0 B(x, \delta_i) \subseteq G_i$. Potom vezměme $\delta = \min\{\delta_i\} > 0$ a podle definice platí.
3. $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 : x \in G_{\alpha_0}$ otevřená $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq G_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Věta 8.2 se dá dokázat pomocí použití $G' = X \setminus G$ ve větě 8.1. □

Definice 8.5. Pokud (x_n) je posloupnost bodů v (X, d), potom řekněme, že (x_n) konverguje k $x \in X$, pokud $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$.
Píšeme, že $x = \lim_{n \to \infty} x_n$ nebo $x_n \to x$.

Poznámka. Tato podmínka je ekvivalentní k tomu, že $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon$, nebo jinak také $x_n \in B(x, \varepsilon)$.

Věta 8.3. *Pokud* $\lim x_n = x \wedge \lim y_n = y$, *potom* $\lim d(x_n, y_n) = d(x, y)$.
Toto speciálně znamená, že posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Podle definice:
$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 : \forall n \geq n_1 : d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$
$\forall \varepsilon > 0 \exists n_2 : \forall n \geq n_2 : d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$
Z toho dostaneme: $\exists n \geq n_0 : d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y) < d(x, y) + \varepsilon$. Z trojúhelníkové nerovnosti dostáváme $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) < d(x_n, y_n) + \varepsilon$.
Kombinujeme a dostaneme $d(x, y) - \varepsilon < d(x_n, y_n) < d(x, y) + \varepsilon$. □

Definice 8.6. Mějme $A \subseteq X$, (X,d) metrický prostor.
Potom $\text{int}A = \cup_{G \subseteq A, G \text{ ot.}} G$ je vnitřek A.
Potom $\overline{A} = \cap_{F \supset A, F \text{ uz.}} F$ je uzávěr A.
Dále, $\partial A = \text{bd}(A) = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ je hranice.

Definice 8.7. Metriky d_1, d_2 na množině X jsou *ekvivalentní.* právě když $\exists a, b \in (0, \infty) : \forall x, y \in X : a d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq b\, d_1(x,y)$.

Pozorování. *Pokud jsou d_1 a d_2 ekvivalentní, potom*

1. *(X, d_1) a (X, d_2) mají stejné otevřené množiny.*
2. *(X, d_1) a (X, d_2) mají stejné uzavřené množiny.*
3. *Pro libovolné (x_n) v X $x_n \to_{d_1} x \Leftrightarrow x_n \to_{d_2} x$*

Poznámka. Topologický prostor je $(X, \mathcal{G})$, $\mathcal{G} \subseteq P(X)$, kde X je libovolná množina a $\mathcal{G}$ je množina všech otevřených množin splňující vlastnosti 8.1.

Věta 8.4 (Charakterizace uzavřených množin)**.** *Nechť (X,d) je metrický prostor a $F \subseteq X$. Potom F je uzavřená, právě když každá posloupnost (x_n) v F konverguje do x, tak $x \in F$.*

Důkaz. Nejprve obrácená implikace, tedy $\neg \Rightarrow \neg$.
$X \backslash F$ není otevřená, potom $\exists x \in X \backslash F\, \forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \nsubseteq X \backslash F$. Zvolme si $\varepsilon = 1/n$, potom $x_n \in B(x, 1/n) \cap F$. To znamená, že $x_n \to x$, tedy $d(x_n, x) \leq 1/n$, ale proto $x \notin F$.
Nyní obrácená zpětná implikace, tedy $\neg \Leftarrow \neg$.
Nechť existuje posloupnost x_n v F taková, že $x_n \to x \notin F$. Potom $x \in X \setminus F$, tedy $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 d(x_n, x) < \varepsilon$, neboli $x_n \in B(x, \varepsilon)$. To však znamená, že $x_{n_0} \in B(x, \varepsilon) \cap F$, což porušuje otevřenost $X \setminus F$ a tedy i uzavřenost F. □

8.1 Spojité zobrazení

Definice 8.8. Mějme metrické prostory (X,d) a (Y, ρ). Dále mějme zobrazení $f : X \to Y$, jinak také $((X,d) \to (Y, \rho))$.
Potom je toto zobrazení *spojité v* $x_0 \in X$ právě, když platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_d(x_0, \delta) : f(x) \in B_\rho(f(x_0), \varepsilon)$$

Dále je toto zobrazení spojité, pokud je spojité v každém bodě, tedy $\forall x \in X : f$ je spojité v x.

Věta 8.5 (Vztah spojitosti a konvergence posloupnosti)**.** *Pokud $x_n \to x$ v (X,d) a zobrazení $f : (X,d) \to (y, \rho)$ je spojité v x, potom $f(x_n) \to f(x)$ v (Y, ρ).*

Důkaz. Chceme, aby $\rho(f(x), f(x_n)) \to 0$, takže musí platit $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \geq n_0 : \rho(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$.
Z definice spojitosti $\exists \delta > 0$, proto $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : d(x, x_n) < \delta$. Tedy $x_n \in B_d(x, \delta) \Rightarrow f(x_n) \in B_\rho(f(x), \varepsilon)$. □

Věta 8.6 (Charakterizace spojitosti)**.** *Mějme zobrazení $f : (X,d) \to (Y, \rho)$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *f je spojité*
2. *$\forall G \subseteq Y$ je G otevřená v $(Y, \rho) \Rightarrow f^{-1}(G)$ je otevřená v (X,d).*
3. *$\forall F \subseteq Y$ je F uzavřená v $(Y, \rho) \Rightarrow f^{-1}(F)$ je uzavřená v (X,d).*

Důkaz. Ukážeme pouze implikaci $1 \Rightarrow 2$:
G otevřená v (Y, ρ). Chceme, aby $f^{-1}(G)$ byla otevřená v X. Z definice otevřené množiny $\forall x \in f^{-1}(G)\ \exists \delta > 0 : B_d(x, \delta) \subseteq f^{-1}(G)$, což je ekvivalentní s $f(B_d(x, \delta)) \subseteq G$.
Tedy $f(x) \in G$, z otevřenosti G $\exists \varepsilon > 0 : B_\rho(f(x), \varepsilon) \subseteq G$, ze spojitosti f $\exists \delta > 0 : f(B_d(x, \delta)) \subseteq B_\rho(f(x), \varepsilon)$, což jsme chtěli ukázat. □

Definice na odreagování YAY. Už bylo na čase.

Definice 8.9. Mějme $(X,d), (X', d')$ metrické prostory. Řekněme, že (X', d') je *podprostor* (X,d) právě, když $X' \subseteq X$ a $d' = d|_{X' \times X'}$.

Poznámka. $A \subseteq X'$ je otevřená v (X', d') právě, když $\exists U \subseteq X$ otevřená v (X,d) taková, že $A = U \cap X$.
Dále mějme spojité zobrazení f. Potom $f|_{X'}$ je také spojité.

8.2 Kompaktnost

Definice 8.10. Mějme $A \subseteq X$. Potom A je *kompaktní* v (X,d) právě, když $\forall (x_n) \in A$ $\exists$ vybraná podposloupnost (x_{n_k}) taková, že $x_{x_k} \to x \in A$.

Věta 8.7 (Spojité funkce na kompaktní množině)**.** *Mějme $K \subseteq (X,d)$, která je kompaktní a spojitou funkci $f : X \to \mathbb{R}$. Potom f na K nabývá maxima a minima.*

Důkaz. Zavedeme si množinu $S = f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ a $s = \sup S$. Existuje posloupnost $s_n \to s$, kde $s_n \in S$. Víme, že $s_n = f(x_n)$ pro nějaké $x_n \in K$.

Protože K je kompaktní, existuje vybraná podposloupnost $y_k = x_{n_k}$ taková, že $y_k \to y \in K$.

Využijeme konvergenci a spojitost, tedy $f(y_k) \to f(y) \wedge f(y_k) \to s$. Posloupnost má nejvýše jednu limitu, tudíž $f(y) = s$, naše tak dlouho hledané maximum.

Minimum analogicky. □

Máme tedy krásné vlastnosti kompaktní množiny. Jak ale poznat, zda je množina kompaktní?

Věta 8.8 (Nutné podmínky pro kompaktnost)**.** *Nechť je množina K kompaktní v (X,d). Pak je K uzavřená a omezená.*

Důkaz. Podle věty 8.4 stačí ověřit, že posloupnost $x_n \in K$, která má limitu x platí $x \in K$. Podle kompaktnosti existuje $y_k = x_{n_k} \to y \in K$.

Dále si zvolme libovolný $s \in X$. Pokud K není omezená, tak $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in K \setminus B(s,n)$, tedy $d(s,x_n) > n$. Ale díky tomu, že K je kompaktní, existuje vybraná posloupnost $x_{n_k} \to x$. Podle věty 8.3 $d(x_{n_k}, s) \to d(x,s)$. Jenže $n_k \to \infty$, máme spor. □

Věta 8.9. *Množina (X,d) metrický prostor, K kompaktní, $A \subseteq K$ je uzavřená. Potom je A kompaktní.*

Věta 8.10 (Kompaktnost kvádru)**.** *Množina $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_d,b_d]$ je kompaktní v $(\mathbb{R}^d, d_\infty)$.*

Důkaz. Mějme $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^d)$. Užijeme Bolzano-Weierstrassovu(?) větu pro posloupnost $(x_n^1)_{n \in I_1} \subseteq [a_1,b_1]$. Potom existuje vybraná posloupnost s limitou x^1. Takto pokračujeme pro každou složku s malým rozdílem, že $(x_n^k)_{n \in I_{k-1}}$. Dostaneme posloupnost $\mathbb{N} \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_d$. Kompaktnost tedy platí. □

Důsledek 8.1. *Množina $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je kompaktní právě, když A je uzavřená a omezená.*

Důkaz. Z věty 8.8 a z toho, že tu množinu můžeme uzavřít kvádrem (8.10). □