Problém řídkého řezu

Vít Jelínek a Eva Ondráčková

24. září 2006

V tomto textu se budeme zabývat problémem nalezení c-balancovaného řezu s minimální expanzí. Tento problém je znám pod názvem *problém c-balancovaného separátoru.*

Autoři textu podstatně čerpali z článku, který napsali pánové Arora, Rao a Vazirani [1], a z poznámek z přednášky Toky, cesty a řezy [3] pořízených v letním semestru 2006. Jejich cílem bylo vyložit obsaženou látku pokud možno srozumitelně a přehledně, doplnit některá chybějící zdůvodnění a překlenout myšlenkové skoky, které uvedenému článku ubírají na čitelnosti. Jak se to autorům podařilo, nechť posoudí čtenář sám. Přesto je nutné, aby se čtenář obrnil trpělivostí, připravil se na záplavu symbolů a časté převracení stránek tam a zpět. Odměnou mu bude pochopení velmi netriviálního důkazu s mnohými nečekanými zvraty a řadou podivuhodných souvislostí.

1 Úvod

Mějme graf $G = (V, E)$ a neprázdnou podmnožinu S množiny jeho vrcholů, takže $(S, \overline{S})$ je řez v G. Předpokládejme navíc, že $S \leq |V|/2$ (pokud ne, můžeme místo množiny S vzít její doplněk $\overline{S}$). Pro jednoduchost budeme říkat, že sama množina S je řezem v G.

Označme počet hran, jejichž právě jeden vrchol leží v S, jako $\delta(S)$. *Expanzí řezu* S potom nazveme číslo $\frac{\delta(S)}{|S|}$. Expanzi řezu S budeme označovat $\alpha(S)$. Dále definujme *c-balancovaný řez* jako řez S, který splňuje podmínku

$$cn \leq |S| \leq n/2,$$

kde n je počet vrcholů grafu G a c je parametr v intervalu $(0, \frac{1}{2})$. Dostáváme se k definici našeho ústředního problému:

Problém 1.1 (Problém c-balancovaného separátoru)**.** *Pro zadaný graf G a číslo c najdi c-balancovaný řez s co nejmenší expanzí:*

$$\alpha_c(G) = \min_{S \subseteq V,\ cn \leq |S| \leq n/2} \alpha(S).$$

Arora, Rao a Vazirani [1] publikovali algoritmus, který pro libovolnou konstantu $c \in (0, 1/2)$ nalezne “pseudoaproximaci” pro problém c-balancovaného separátoru s faktorem $O(\sqrt{\log n})$. Pod pojmem “pseudoaproximace” máme na mysli následující výsledek:

Věta 1.2 (Hlavní výsledek). *Pro každé $c \in (0, 1/2)$ existuje $c' \in (0, c)$ a pravděpodobnostní polynomiální algoritmus, který pro daný graf G a dané c spočítá hodnotu K, pro niž platí*

1. $K \leq \alpha_c(G)$
2. $\alpha_{c'}(G) \leq O(K\sqrt{\log n})$.

Na první pohled nevypadá takový výsledek příliš impozantně, protože z něj vlastně nevyplývá aproximace ani pro α_c ani pro $\alpha_{c'}$. Ve skutečnosti má ovšem tato věta důležité důsledky, mimo jiné se s její pomocí dá získat nejlepší známý $O(\sqrt{\log n})$-aproximační algoritmus pro problém nalezení řezu s minimální expanzí (bez požadavku na balancovanost). V tomto textu se těmito aplikacemi zabývat nebudeme, naším cílem je pouze předvést o něco slabší $O\left((\log n)^{2/3}\right)$-pseudoaproximační algoritmus pro problém c-balancovaného separátoru. Tento slabší algoritmus také pochází z článku [1] a využívá podobné myšlenky jako algoritmus zmiňovaný ve Větě 1.2.

Všimněme si, že pro každý c-balancovaný řez S platí nerovnosti

$$\frac{2\delta(S)}{n} \leq \alpha(S) \leq \frac{\delta(S)}{cn}.$$

To znamená, že stačí umět nalézt nejmenší c-balancovaný řez, a získáme také aproximaci problému c-balancovaného separátoru pro konstantní c. Toho budeme využívat v následujících odstavcích. Popíšeme přeformulování úlohy minimálního c-balancovaného řezu, které se stane základem našeho algoritmu.

Zvolme pevně libovolný jednotkový vektor $v \in \mathbb{R}^n$ a každému vrcholu i grafu G přiřaďme vektor $v_i \in \{v, -v\}$. Takovéto přiřazení reprezentuje rozdělení vrcholů do množiny S a jejího doplňku $\overline{S}$. V této reprezentaci se dá naše úloha přeformulovat takto:

$$\min_{v_i \in \{v,-v\}} \frac{1}{4} \sum_{\{i,j\} \in E(G)} |v_i - v_j|^2 \qquad (\clubsuit)$$

$$\sum_{i<j} |v_i - v_j|^2 \geq 4c(1-c)n^2 \qquad (\heartsuit)$$

Čtenář si snadno ověří, že výraz ($\clubsuit$) vyjadřuje počet hran řezu a nerovnost ($\heartsuit$) zajišťuje c-balancovanost řezu.

Nyní úlohu trochu pozměňme. Místo vektorů v a $-v$ uvažujme libovolné vektory $v_i \in \mathbb{R}^n$, ale přidejme dvě podmínky navíc:

$$\forall i, j, k : |v_i - v_j|^2 + |v_j - v_k|^2 \geq |v_i - v_k|^2 \qquad (\blacktriangle)$$

$$\forall i : |v_i|^2 = 1 \qquad (\spadesuit)$$

Nerovnost ($\blacktriangle$) je trojúhelníková nerovnost v prostoru s netradiční ℓ_2^2-metrikou: vzdálenost vektorů v_i a v_j je tu $|v_i - v_j|^2$. Význam podmínky ($\spadesuit$) je zřejmý. Takto modifikovanou úlohu nazvěme (Ú).

Snadno nahlédneme, že každé přípustné řešení původní úlohy je i přípustným řešením úlohy (Ú). Získali jsme tedy relaxaci problému c-balancovaného separátoru. Jak později uvidíme, tuto relaxaci lze snadno převést na úlohu semidefinitního programování, která jde vyřešit v polynomiálním čase.

Definice 1.3. Přiřazení vektorů $v_i \in \mathbb{R}^n$ vrcholům $i \in V(G)$ nazveme *vektorovou reprezentací grafu G*. Řekneme, že vektorová reprezentace je

- *ℓ_2^2-reprezentace*, pokud splňuje podmínku (▲).
- *jednotková*, pokud splňuje podmínku (♠).
- *c-rozptýlená*, pokud splňuje podmínku (♡).

Všimněme si, že podmínka c-rozptýlenosti vektorové reprezentace je relaxací podmínky c-balancovanosti řezu (nejde tedy o totéž).

2 Problém semidefinitního programování

Nyní si zadefinujeme problém semidefinitního programování. Poté se přesvědčíme, že naše úloha (Ú) je jeho speciálním případem.

Definice 2.1 (Pozitivně semidefinitní matice)**.** Řekneme, že matice $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *pozitivně semidefinitní*, jestliže pro všechny vektory $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^\top Y x \geq 0$.

O pozitivně semidefinitních maticích je známo, že se dají charakterizovat mnoha různými způsoby. Jeden z dalších je existence "druhé odmocniny": matice $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivně semidefinitní, právě když existuje matice $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že $Y = W^\top W$. Tuto vlastnost později využijeme.

V následující definici používáme značení $\langle C, Y\rangle$ pro skalární součin matic chápaných jako vektory délky $n \times n$.

Definice 2.2 (Úloha semidefinitního programování)**.** Mějme C, D_1, …, D_k reálné čtvercové matice a d_1, …, d_k reálná čísla. *Úlohou semidefinitního programování* nazveme následující úlohu:

$$\begin{gathered}\min\langle C, Y\rangle, \text{ kde}\\ \langle D_i, Y\rangle \geq d_i \text{ pro všechna } i = 1, \dots, k,\\ Y \text{ je pozitivně semidefinitní.}\end{gathered}$$

2.1 Převod úlohy (Ú) na SDP

Mějme instanci úlohy (Ú):

$$\min \frac{1}{4} \sum_{\{i,j\}\in E(G)} |v_i - v_j|^2 \tag{♣}$$

$$\sum_{i<j} |v_i - v_j|^2 \geq 4c(1-c)n^2 \tag{♡}$$

$$\forall i, j, k : |v_i - v_j|^2 + |v_j - v_k|^2 \geq |v_i - v_k|^2 \tag{▲}$$

$$\forall i : |v_i|^2 = 1 \tag{♠}$$

Pomocí SDP budeme hledat matici $Y = W^\top W$ (jak už víme, každá pozitivně semidefinitní matice jde psát v tomto tvaru) a sloupce matice W se stanou našimi vektory v_i. Prvky matice Y jsou skalární součiny těchto vektorů: platí, že $Y_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$. Nyní přeložíme jednotlivé podmínky úlohy (Ú) do řeči SDP.

(♠) Tato podmínka neříká nic jiného, než že pro každý vektor v_i platí $\langle v_i, v_i \rangle = 1$. To vyjádříme snadno pomocí matice D^i nulové všude kromě prvku D^i_{ii}, který položíme roven jedné. Vytvoříme podmínky

$$\langle D^i, Y \rangle \geq 1$$

$$\langle -D^i, Y \rangle \geq -1.$$

(▲) Ukážeme, jak výraz v této podmínce převést na lineární kombinaci skalárních součinů dvojic vektorů, pro kterou už snadno vytvoříme příslušnou matici (podobně jako výše). Výrazy tvaru $|v_i - v_j|^2$ přepíšeme jako $\langle v_i - v_j, v_i - v_j \rangle$, a to už snadno roznásobíme na skalární součiny jednotlivých vektorů. Nakonec dostaneme

$$2\langle v_j, v_j \rangle - 2\langle v_i, v_j \rangle \ - 2\langle v_j, v_k \rangle + 2\langle v_i, v_k \rangle \geq 0.$$

(♡) Analogicky jako (▲).

(♣) Opět analogicky; sečtením všech lineárních kombinací skalárních součinů dostaneme podmínku, z níž vytvoříme kriteriální matici C.

3 Aproximační algoritmus

V předchozích částech jsme si ukázali, jak lze problém c-balancovaného separátoru relaxovat a relaxaci převést na semidefinitní programování. Optimální řešení úlohy SDP, jak známo, jde nalézt v polynomiálním čase. Toto řešení dává dolní odhad na velikost minimálního c-balancovaného řezu, a tudíž z něj dostaneme i dolní odhad pro problém c-balancovaného separátoru, který odpovídá číslu K ve Větě 1.2.

Zbývá nám ukázat, jak z řešení úlohy (Ú) v podobě vektorové reprezentace vytvořit c'-balancovaný řez s malým počtem hran.

Definice 3.1. Mějme množiny vektorů $S, T \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$ a číslo $\Delta \geq 0$. Řekneme, že S a T jsou Δ-*oddělené*, jestliže platí

$$\forall v_i \in S, v_j \in T : |v_i - v_j|^2 \geq \Delta.$$

Věta 3.2. *Pro každé $c > 0$ libovolná c-rozptýlená jednotková ℓ_2^2-reprezentace s n vektory obsahuje Δ-oddělené podmnožiny S, T velikosti aspoň $c'n$, kde c' je konstanta závislá pouze na c a $\Delta = \Omega\left((\log n)^{-2/3}\right)$. Navíc množiny S a T lze s velkou pravděpodobností najít v polynomiálním čase.*

Důsledek 3.3. *Existuje pravděpodobnostní algoritmus, který s vysokou pravděpodobností najde řez $(S, \overline{S})$, který je c'-balancovaný a má expanzi $O(W(\log n)^{2/3}/n)$, kde W je minimum z výrazu (♣) nabyté pro řešení úlohy SDP.*

Poznamenejme, že v článku [1] se dokazuje silnější verze Věty 3.2, kde místo $\Delta = \Omega\left((\log n)^{-2/3}\right)$ dostaneme $\Delta = \Omega\left((\log n)^{-1/2}\right)$. Tomu pak odpovídá silnější verze Důsledku 3.3, kde místo řezu s expanzí $O(W(\log n)^{2/3}/n)$ najdeme dokonce řez s expanzí $O(W\sqrt{\log n}/n)$, jak slibuje Věta 1.2.

Důkaz Důsledku 3.3. Nejprve použijeme SDP pro nalezení c-rozptýlené jednotkové ℓ_2^2-reprezentace pro zadaný graf G. Algoritmus, jehož existenci zaručuje věta 3.2, nám v takové reprezentaci najde Δ-oddělené podmnožiny S a T.

Pro každou hranu $e = \{i, j\}$ definujme její délku jako $w_e = |v_i - v_j|^2$. Takto budeme meřit vzdálenosti i ve zbytku důkazu. Označme $V_d = \{v \in V; \mathrm{dist}(S, v) \leq d\}$ a $E_d = \delta(V_d)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $|V_{\Delta/2}| \leq n/2$, jinak zaměníme množiny S a T (víme, že jsou Δ-oddělené, takže pro aspoň jednu z nich musíme dostat správnou velikost); to znamená, že množina $V_{\Delta/2}$ a její podmnožiny jsou dost malé a berou se tak v úvahu při počítání nejmenší expanze, můžeme se tedy na takové množiny při minimalizaci expanze omezit. Pomocí prohledávání do šířky najdeme takové $s \leq \Delta/2$, které minimalizuje $\alpha = |E_s|/|V_s|$.

Získali jsme tak řez $(V_s, \overline{V_s})$ s expanzí α. Nyní chceme ověřit, zda tento řez je vskutku c'-balancovaný a zda má správnou expanzi, to jest $\alpha = O\left(W(\log n)^{2/3}/n\right)$. Podle volby s platí, že $|E_s| = \alpha|V_s|$. Navíc platí $|V_s| \geq |S| \geq c'n$, takže náš řez je c'-balancovaný, a získáváme také nerovnost $|E_s| \geq \alpha c' n$.

Nyní přijde na řadu finta:

$$W = \sum_{e \in E(G)} w_e \geq \int_0^{\Delta/2} |E_s| \mathrm{d}s. \tag{1}$$

První rovnost plyne přímo z definice W; nerovnost vpravo probereme trochu podrobněji. Definujme funkci $\chi_s(e)$ jako charakteristickou funkci množiny E_s, tj. $\chi_s(e) = 1$ pokud $e \in E_s$, a $\chi_s(e) = 0$ jinak. Zjevně platí $|E_s| = \sum_{e \in E(G)} \chi_s(e)$. Odtud plyne

$$\int_0^{\Delta/2} |E_s| \mathrm{d}s = \sum_{e \in E(G)} \int_0^{\Delta/2} \chi_s(e) \mathrm{d}s. \tag{2}$$

Pro hranu $e = \{i, j\}$ ovšem může platit $\chi_s(e) = 1$ pouze v případě, že právě jeden z vrcholů i, j patří do V_s, tedy v případě, že jeden z vrcholů i, j má k množině S blíže než s a druhý je od ní vzdálenější než s. Tudíž $\chi_s(e) = 1$ platí na intervalu, jehož délka je nejvýše rovná délce hrany e. Odtud dostáváme

$$w_e \geq \int_0^{\Delta/2} \chi_s(e) \mathrm{d}s,$$

což spolu s rovností (2) dokazuje nerovnost (1). Když navíc na pravou stranu (1) dosadíme $|E_s| \geq \alpha c' n$, dostáváme výsledek

$$W \geq \frac{\Delta \alpha c' n}{2},$$

to jest

$$\alpha \leq \frac{2W}{c' n \Delta} = O\left(\frac{W(\log n)^{2/3}}{n}\right),$$

což je přesně to, co jsme si přáli. $\square$

SET-FIND
Vstup: c-rozptýlená jednotková vektorová reprezentace $W \subseteq \mathbb{R}^d$.
Parametry: Požadovaná oddělenost Δ a balancovanost c', parametr σ (projekční mezera).
1. Zvol náhodně jednotkový vektor u a definuj

$$S_u = \{v \in W \colon \langle v, u\rangle \geq \frac{\sigma}{\sqrt{d}}\},$$

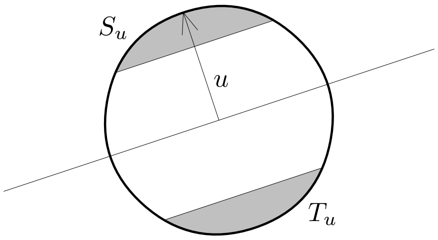
$$T_u = \{w \in W \colon \langle w, u\rangle \leq -\frac{\sigma}{\sqrt{d}}\}.$$

2. Pokud $|S_u| < 2c'n$ nebo $|T_u| < 2c'n$, STOP.
3. Jinak zvol libovolné vektory $v \in S_u$, $w \in T_u$ tak, aby $|v - w|^2 \leq \Delta$, a smaž v z S_u a w z T_u. To opakuj tak dlouho, až žádná taková dvojice vektorů neexistuje.
Výstup: zbylý obsah množin S_u, T_u.

4 SET-FIND

Ve zbytku tohoto článku se budeme věnovat dokazování Věty 3.2. Nejprve popíšeme algoritmus, který z vektorové reprezentace získá oddělené množiny.

Algoritmus SET-FIND vezme pomyslnou jednotkovou kouli, na které jsou vektory reprezentace, a z jejího středu vyřízne rovníkový pás o šířce $2\sigma/\sqrt{d}$ v náhodném směru (kolmém na u). Tím získá dvě vzdálené množiny a ty potom pročistí od dvojic vektorů, které mají od sebe příliš malou vzdálenost.



Obrázek 1: Projekce vektorové reprezentace podle náhodného vektoru u.

Je zřejmé, že pokud se SET-FIND nezastaví příkazem STOP, dojde k pročištění a výstupem budou dvě Δ-oddělené množiny, což je naším cílem. Potřebujeme proto ukázat, že předčasný STOP nenastává příliš často, tedy že množiny S_u a T_u z kroku 1 mají s velkou pravděpodobností velikost aspoň $2c'n$. Jako výstup algoritmu chceme získat množiny velikosti aspoň $c'n$, je tedy nutno také ověřit, že vektorů vymazaných v kroku 2 není příliš mnoho.

4.1 Velikost množin S_u a T_u v kroku 1

Lemma 4.1. *Je-li $v \in \mathbb{R}^d$ vektor délky l a u náhodný jednotkový vektor, pak*

- $\Pr[|\langle v, u\rangle| \leq \frac{xl}{\sqrt{n}}] \leq 3x$ *pro* $x \leq \frac{1}{3}$,

- $\Pr[|\langle v,u\rangle| \geq \frac{xl}{\sqrt{n}}] \leq e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Lemma 4.2. *Pro libovolné $0 < c < \frac{1}{3}$ existují parametry c', σ takové, že množiny S_u a T_u získané v prvním kroku algoritmu SET-FIND-(c', σ) mají velikost aspoň $2c'n$ s pravděpodobností aspoň $\frac{c}{8}$.*

Důkaz. Označme vektory naší reprezentace W jako $v_1, \ldots, v_n$, a mějme dva vektory v_i a v_j svírající úhel φ_{ij}. Pravděpodobnost, že náhodná nadrovina tyto vektory odděluje, je rovna $\frac{\varphi_{ij}}{\pi}$. Chceme spočíst střední hodnotu počtu dvojic vektorů oddělených náhodnou nadrovinou (označme tuto veličinu jako O):

$$\mathbb{E}O = \sum_{i<j} \Pr[\text{náhodná nadrovina odděluje } v_i \text{ a } v_j] = \sum_{i<j} \frac{\varphi_{ij}}{\pi}.$$

Označme

$$a = \frac{2}{\pi} \min_{\varphi \in (0,\pi)} \frac{\varphi}{1-\cos\varphi};$$

bez důkazu použijeme fakt, že $a \doteq 0.878$, a dosadíme a do předchozího výpočtu:

$$\mathbb{E}O \geq \frac{2}{\pi} \sum_{i<j} \frac{\varphi_{ij}}{2} \geq a \sum_{i<j} \frac{1-\cos\varphi_{ij}}{2}.$$

Nyní upravujme:

$$|v_i - v_j|^2 = \langle v_i, v_i\rangle - 2\langle v_i, v_j\rangle + \langle v_j, v_j\rangle = 2 - 2\langle v_i, v_j\rangle = 2 - 2\cos\varphi_{ij},$$

protože v_i a v_j jsou jednotkové, a tedy

$$1 - \cos\varphi_{ij} = \frac{1}{2}|v_i - v_j|^2,$$

což můžeme dosadit do výpočtu střední hodnoty a dostaneme

$$\mathbb{E}O \geq a \sum_{i<j} \frac{|v_i - v_j|^2}{4}.$$

Využijeme toho, že algotimus SET-FIND pracuje s c-rozptýlenou reprezentací, čili součet vzdáleností všech dvojic vektorů je aspoň $4c(1-c)n^2$, a máme

$$\mathbb{E}O \geq 0.878c(1-c)n^2.$$

Označme $b = 0.878c(1-c)$. Pro střední hodnotu počtu dvojic, které naopak *nejsou* odděleny, pak jistě platí $\mathbb{E}N \leq n^2 - bn^2$ (vystačíme si s takovýmto neúsporným odhadem). Podle Markovovy nerovnosti máme (s využitím toho, že $b \leq 1$):

$$\Pr[N \geq n^2 - \frac{bn^2}{2}] \leq \frac{n^2 - bn^2}{n^2 - \frac{bn^2}{2}} = \frac{1-b}{1-\frac{b}{2}} \leq 1 - \frac{b}{2}.$$

Tedy $\Pr[O \geq \frac{bn^2}{2}] \geq \frac{b}{2}$, čili počet oddělených dvojic je s vysokou pravděpodobností aspoň $\frac{bn^2}{2}$. A máme-li aspoň $\frac{bn^2}{2}$ oddělených dvojic, potom v menší z obou částí musí být aspoň $\frac{bn}{2}$ vektorů.

Nyní využijeme první část Lemmatu 4.1 pro vektor u. Pravděpodobnost, že náhodný bod na jednotkové sféře padne do rovnoběžkového pásu se skalárním součinem s u velikosti nejvýš $\frac{\sigma}{\sqrt{d}}$, je nejvýš 3σ. Můžeme tedy pomocí volby σ a Markovovy nerovnosti docílit toho, aby pravděpodobnost jevu, že S_u i T_u budou malé, tady že více než $\frac{bn}{4}$ vektorů padne do zbytku sféry (rovnoběžníkového pásu), byla nejvýš $\frac{b}{4}$.

Chceme, aby velikost S_u i T_u byla aspoň $2c'n$, máme $\frac{bn}{4}$; zvolme tedy $2c' = \frac{b}{4}$. Zbývá ověřit, že spočtená pravděpodobnost $\frac{b}{4}$ je aspoň slibovaná $\frac{c}{8}$, a to už přenecháme čtenáři. $\square$

4.2 Počet mazání

Věta 4.3 (lidová moudrost)**.** *Kdo maže, ten jede.*

V této subsekci se budeme zabývat druhou (a obtížnější) částí analýzy algoritmu SET-FIND – analýze počtu vektorů vymazaných z množin S_u a T_u ve třetím kroku. Nejprve se zameříme na nejjednodušší případ: $\Omega(1/\log n)$-oddělené množiny. Zavedeme si následující pojem.

Definice 4.4. Jestliže pro jednotkový vektor $u \in \mathbb{R}^d$ a vektor v délky l platí, že $|\langle v, u\rangle| \geq \frac{tl}{\sqrt{d}}$, řekneme, že v je t-roztažený ve směru u.

4.2.1 $\Delta = \Omega(1/\log n)$-oddělené množiny

Uvažme dvojici vektorů v, w, která byla vymazána algoritmem SET-FIND. Protože došlo k vymazání, muselo platit, že $|v - w|^2 \leq \Delta$, a tedy velikost $v - w$ je nejvýš $\sqrt{\Delta}$. Na druhou stranu z toho, že v v prvním kroku byl v S_u a w v T_u, víme, že $\langle v - w, u\rangle \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{d}}$. Roztažení vektoru $v - w$ ve směru u je tedy aspoň $\frac{2\sigma}{\sqrt{\Delta}}$.

Kdybychom položili $\Delta = \frac{\sigma^2}{4\log n}$, analýza by byla velmi snadná. Každá mazaná dvojice je totiž aspoň $4\sqrt{\log n}$-roztažená, a to podle lemmatu 4.1 nastane s pravděpodobností menší než $e^{-4\log n} \ll \frac{1}{n^2}$. Střední počet vymazaných vektorů tedy bude asymptoticky menší než 1, čili obvykle nebude vymazáno nic.

5 Lepší analýza algoritmu SET-FIND

Ukázali jsme si, že pomocí algoritmu SET-FIND lze nalézt dvojici Δ-oddělených množin velikosti aspoň $c'n$ pro $\Delta = \Omega(1/\log n)$. Teď provedeme podrobnější analýzu tohoto algoritmu a dokážeme, že takto lze získat dokonce dvojici Δ-oddělených množin této velikosti pro hodnotu $\Delta = \Omega\left((\log n)^{-2/3}\right)$.

Zamysleme se nad tím, co by se muselo stát, aby pro nějakou vektorovou reprezentaci náš algoritmus s velkou pravděpodobností selhal: víme, že v první fázi algoritmus s konstantní pravděpodobností najde množiny S_u a T_u, které mají velikost aspoň $2c'n$ a které jsou od sebe odděleny "rovníkovým pásem" o šířce $2\sigma/\sqrt{d}$. Jinými slovy, pro každou dvojici bodů $v \in S_u, w \in T_u$ platí $\langle v - w, u\rangle \geq 2\sigma/\sqrt{d}$. Pokud algoritmus SET-FIND nenašel dost velké Δ-oddělené množiny, znamená to, že ve třetí fázi vymazal alespoň $c'n$ disjunktních dvojic bodů $v_i \in S_u$ a $w_i \in T_u$ takových, že $|v_i - w_i|^2 \leq \Delta$ pro $i = 1, \ldots, c'n$. Z toho plyne, že každý vektor $v_i - w_i$ je alespoň

$(2\sigma/\sqrt{\Delta})$-roztažený ve směru u. Pokud SET-FIND pro danou vektorovou reprezentaci selže s velkou pravděpodobností (tj. selže pro většinu jednotkových směrů u), znamená to, že tato reprezentace obsahuje pro většinu směrů u nějaké párování, které je hodně roztažené ve směru u. To je motivace pro následující definici:

Definice 5.1. Řekneme, že množina n bodů $W \subseteq \mathbb{R}^d$ je (t, γ, β)-roztažená pro délku l, pokud s pravděpodobností alespoň γ pro náhodně zvolený jednotkový vektor u platí, že existuje párování $M_u \subseteq W \times W$ obsahující βn disjunktních dvojic (v_i, w_i) takových, že $|w_i - v_i| \leq l$ a zároveň $\langle w_i - v_i, u\rangle \geq tl/\sqrt{d}$. (Tedy speciálně každá dvojice v párování M_u tvoří vektor, který je alespoň t-roztažený ve směru u.)

Zdůrazněme, že slovem "párování" zde označujeme jakoukoliv množinu disjunktních dvojic bodů z W. Toto párování obecně nemusí být úplné, tj. ne každý bod musí být nutně spárován. Hrany tohoto párování nijak nesouvisí s hranami grafu G, pro nějž se snažíme najít řídký řez.

Úvaha před Definicí 5.1 ukazuje, že pokud algoritmus SET-FIND selže s pravděpodobností aspoň γ na nějaké vektorové reprezentaci, pak tato reprezentace musí být $(2\sigma/\sqrt{\Delta}, \gamma, c')$-roztažená pro délku l. Pro naši analýzu algoritmu SET-FIND je klíčová následující věta:

Věta 5.2. *Pro každé $\beta, \gamma > 0$ existuje konstanta $C = C(\beta, \gamma)$ s následující vlastností: pokud je nějaká ℓ_2^2-reprezentace (t, γ, β)-roztažená (pro libovolnou délku l), pak $t \leq C(\log n)^{1/3}$.*

Použitím této věty a předchozí úvahy dostáváme, že SET-FIND může selhat pouze v případě, že $2\sigma/\sqrt{\Delta} \leq C(\log n)^{1/3}$, to jest pouze pro $\Delta \geq \frac{4\sigma^2}{C^2(\log n)^{2/3}}$. To znamená, že můžeme zvolit $\Delta = \Omega\left((\log n)^{-2/3}\right)$ tak, aby SET-FIND s konstantní pravděpodobností našel dvojici Δ-oddělených množin, čímž dostaneme $\Theta\left((\log n)^{2/3}\right)$-pseudoaproximaci pro problém c-balancovaného separátoru — stačí jenom dokázat Větu 5.2, což bude hlavní obsah zbytku tohoto článku.

5.1 Důkaz Věty 5.2

Základní myšlenka důkazu je následující: předpokládejme, že máme jednotkovou ℓ_2^2-reprezentaci V, která je (t, γ, β)-roztažená pro nějakou délku l. To znamená, že pro podíl γ všech jednotkových směrů u najdeme hodně disjunktních dvojic bodů v, w takových, že vektor $w - v$ má délku nejvýš l a jeho projekce do směru u má délku aspoň $tl/\sqrt{d}$. Naším plánem je ukázat, že pro vhodné $r = \Theta(t)$ se pro $\Omega(1)$-podíl všech jednotkových směrů u dá dokonce nalézt $r + 1$ bodů $v_0, v_1 \ldots, v_r \in X$ tak, že pro všechna $i = 1, \ldots, r$ platí $|v_i - v_{i-1}| \leq l$ a zároveň projekce $v_r - v_0$ do směru u má délku $\Omega(rtl/\sqrt{d})$. Kdybychom využívali pouze běžnou euklidovskou normu, tak bychom konstatovali, že vektor $v_r - v_0$ má délku nejvýš rl a tudíž jeho roztažení ve směru u je $\Omega(t)$, což není příliš užitečný poznatek, protože podobné roztažení mají všechny dvojice v párování M_u. My ale teď poprvé využijeme trojúhelníkovou nerovnost pro ℓ_2^2-metriku (tj. nerovnost ($\blacktriangle$) našeho semidefinitního programu), z níž plyne následující silnější odhad na délku $v_r - v_0$:

$$
\begin{aligned}
|v_r - v_0|^2 &\le |v_r - v_{r-1}|^2 + |v_{r-1} - v_{r-2}|^2 + \dots + |v_1 - v_0|^2 \\
&\le rl^2,
\end{aligned}
$$

tudíž $|v_r - v_0| \le \sqrt{r}l$, z čehož plyne, že $v_r - v_0$ je $\Omega(\sqrt{r}t)$-roztažený ve směru u. A my ukážeme, že takto roztažený vektor můžeme získat pro konstantně mnoho směrů u. Zároveň ale z části 4.2.1 víme, že pro skoro žádný směr neexistuje vektor, který by byl $\Omega(\sqrt{\log n})$-roztažený. Odtud plyne odhad $\sqrt{r}t = O(\sqrt{\log n})$, a protože $r = \Theta(t)$, dostáváme požadovaný výsledek $t = O\left((\log n)^{1/3}\right)$.

Nyní přistoupíme k samotnému důkazu. Vzpomeňme si, že Definice 5.1 říká, že množina je (t, γ, β)-roztažená, pokud na ní existuje hodně "roztažených" párování M_u. A my nyní ukážeme, že v každé (t, γ, β)-roztažené množině lze dokonce najít velkou podmnožinu, jejíž každý bod je obsažen v nějakém "roztaženém" párování pro hodně směrů. Tuto myšlenku formalizuje následující definice a lemma.

Definice 5.3. O množině bodů $X \subseteq \mathbb{R}^d$ řekneme, že je (ε, δ)-*pokrytá párováními pro délku* l, pokud pro každý jednotkový vektor u existuje párování $N_u \subseteq X \times X$ s následujícími vlastnostmi:

1. Pro každou dvojici $(v, w) \in N_u$ platí $|v - w| \le l$ a $\langle w - v, u \rangle \ge \varepsilon$.
2. Pro každý bod $v \in X$ platí s pravděpodobností aspoň δ, že když vybereme náhodný směr u, tak N_u bude obsahovat hranu vycházející z v (tj. hranu tvaru (v, w) pro nějaké w).

Lemma 5.4. *Pokud je n-bodová množina $W \subseteq \mathbb{R}^d$ (t, γ, β)-roztažená pro délku l, pak obsahuje podmnožinu X, která má velikost aspoň $\beta\gamma n$ a která je (ε, δ)-pokrytá párováními pro délku l, kde $\delta = \beta\gamma/4$ a $\varepsilon = tl/\sqrt{d}$.*

Důkaz. Z definice (t, γ, β)-roztaženosti víme, že na W existují roztažená párování M_u velikosti aspoň βn pro aspoň γ-podíl všech jednotkových směrů u. Tato párování nemusí být určena jednoznačně, pro daný směr u může existovat více možností, jak zvolit párování M_u. Není obtížné se přesvědčit, že můžeme vždy tato párování zvolit tak, že $(v, w) \in M_u$ právě když $(w, v) \in M_{-u}$. Zároveň je možné zvolit tato párování tak, aby pro každé párování $M \subseteq W \times W$ platilo, že množina těch vektorů u, pro něž $M = M_u$, je měřitelná podmnožina jednotkové sféry (to nebudeme dokazovat). Pro ty směry u, kde vhodné M_u neexistuje, dodefinujme $M_u = \emptyset$.

Reprezentujme si nyní tento systém párování jako orientovaný graf, jehož vrcholy jsou body z W a jehož hrany jsou všechny dvojice bodů, které jsou obsažené v některém M_u. Každé hraně (v, w) přiřaďme váhu, která je rovná pravděpodobnosti, že pro náhodně zvolené u bude M_u obsahovat dvojici (v, w). Dle předpokladu má (v, w) stejnou váhu jako (w, v). Navíc každému vrcholu v přiřaďme váhu která je rovna součtu vah všech hran vycházejících z v. Všimněte si, že váha vrcholu je přesně pravděpodobnost, že pro náhodně zvolené u bude M_u obsahovat hranu vycházející z vrcholu v. A protože součet vah všech hran obsahujících v je nejvýš 1, a součet vah hran vcházejících do v je stejný jako součet vah hran vycházejících, nemůže být váha v větší než 1/2.

Protože pro alespoň γ-podíl všech směrů u obsahuje párování M_u alespoň βn hran, je součet vah všech hran (což je zároveň součet vah všech vrcholů) aspoň $\beta\gamma n$. Průměrný vrchol má tedy váhu aspoň $\beta\gamma$.

Pokud tento graf obsahuje vrchol s vahou menší než $\beta\gamma/4$, tak tento vrchol smažeme a spolu s ním ze všech párování odstraníme i všechny hrany obsahující tento vrchol. To opakujeme tak dlouho, dokud existuje nějaký vrchol s vahou menší než $\beta\gamma/4$. Protože v každém kroku smažeme vrchol s vahou menší než $\beta\gamma/4$ a zároveň snížíme váhu ostatních vrcholů o méně než $\beta\gamma/4$, musí nám po skončení všech mazání (kterých je nejvýš n) zůstat vrcholy s celkovou vahou větší než $\beta\gamma n/2$. A protože, jak jsme si již všimli, žádný vrchol nemá váhu větší než $1/2$, znamená to, že nám zbylo aspoň $\beta\gamma n$ vrcholů. Označme X množinu těchto zbylých vrcholů a pro každé u označme N_u množinu zbylých hran z párování M_u. Víme, že každý vrchol z X má váhu aspoň $\beta\gamma/4$; jinými slovy, pro náhodně zvolený směr u má každý bod z X pravděpodobnost aspoň $\beta\gamma/4$, že N_u bude obsahovat hranu vycházející z v. To dokazuje, že N_u má požadované vlastnosti, pro $\delta = \beta\gamma/4$. $\square$

Od této chvíle se budeme věnovat výhradně množině X a párováním N_u, jejichž existenci jsme dokázali v předchozím lemmatu. Označme H orientovaný graf, jehož vrcholy jsou body z množiny X a jehož množina hran je sjednocení všech párování N_u. Pro $v \in X$ označme $\mathrm{Ball}(v, i)$ množinu těch vrcholů $w \in H$, které mají od v vzdálenost nejvýš i, přičemž vzdálenost v tuto chvíli měříme jako počet hran nejkratší cesty z v do w v grafu H. Graf H je sice orientovaný, ale zároveň platí, že když H obsahuje hranu (v, w), tak obsahuje i hranu (w, v), takže orientace nemá vliv na vzdálenost v grafu.

Definice 5.5. Řekneme, že množina vektorů E tvoří (ε, δ)-*síť*, pokud s pravděpodobností alespoň δ pro náhodný jednotkový vektor $u \in \mathbb{R}^d$ platí, že existuje $e \in E$ splňující $\langle e, u\rangle \geq \varepsilon$.

Poznámka 5.6. Všimněme si, že pokud nějaká množina vektorů E je (ε, δ)-síť, tak pro náhodný jednotkový vektor u také s pravděpodobností aspoň δ musí platit, že existuje $e \in E$ splňující $\langle e, u\rangle \leq -\varepsilon$. To proto, že když u je náhodný jednotkový vektor, tak $-u$ je také náhodný jednotkový vektor, pro nějž musí platit podmínka v definici (ε, δ)-sítě.

Poznámka 5.7. Často budeme uvažovat (ε, δ)-sítě, které mají tvar $\{w - v; w \in Y\}$ pro nějaké pevné $v \in X$ a $Y \subseteq X$; pro takovou množinu vektorů budeme používat zkrácené značení $Y - v$. Všimněme si, že například $\mathrm{Ball}(v, 1) - v$ tvoří (ε, δ)-síť pro libovolné $v \in X$: to plyne přímo z toho, že X je (ε, δ)-pokrytá párováními N_u. Platí dokonce, že pro náhodný směr u s pravděpodobností aspoň δ existuje hrana $(v, w) \in N_u$ taková, že $\langle w - v, u\rangle \geq \varepsilon$ (a protože (v, w) je hrana N_u, platí, že $w \in \mathrm{Ball}(v, 1)$ a tedy $w - v \in \mathrm{Ball}(v, 1) - v$).

Značení 5.8. *Označme $S_k \subseteq X$ množinu všech $v \in X$ takových, že $Ball(v, k) - v$ tvoří $(\varepsilon k/2, 1 - \delta/2)$-síť.*

Lemma 5.9.

1. *Existuje konstanta $t_0 = t_0(\delta)$ taková, že pokud $t > t_0$, pak $S_1 = X$.*[1]

[1] Uvědomme si, že S_1 závisí na ε (viz Značení 5.8) a $\varepsilon = \frac{tl}{\sqrt{d}}$, tedy S_1 závisí na t.

2. *Existují konstanty $\eta = \eta(\delta)$ a $\rho = \rho(\delta)$, takové, že pro každé přirozené $k \leq \eta t$ platí $|S_{k+1}| \geq \rho |S_k|$.*

Toto lemma má poměrně technický důkaz, který však zároveň obsahuje podstatné myšlenky celého článku. Než si onen důkaz předvedeme, ukážeme si, jak z tohoto lemmatu plyne Věta 5.2.

Důkaz Věty 5.2. Předpokládejme, že máme dánu (t, γ, β)-roztaženou množinu V. Dle Lemmatu 5.4 lze z množiny V vybrat podmnožinu X, která je (ε, δ)-pokrytá párováními, pro $\varepsilon = tl/\sqrt{d}$ a $\delta = \Omega(\beta\gamma)$.

Kdyby $t = O\left((\log n)^{1/3}\right)$, byl by závěr věty splněn a neměli bychom už co dokazovat. Předpokládejme tedy, že $t = \Omega\left((\log n)^{1/3}\right)$. Potom je ale pro dost velké n splněn předpoklad $t > t_0(\delta)$ Lemmatu 5.9, a tudíž víme, že pro $r = \lfloor \eta t \rfloor$ máme $|S_r| \geq \rho^{r-1}|X| > 0$.

S_r tedy obsahuje aspoň jeden bod v, a dle definice S_r proto víme, že $\mathrm{Ball}(v, r) - v$ tvoří $(\varepsilon r/2, 1 - \delta/2)$-síť. Čili s konstantní pravděpodobností $(1 - \delta/2)$ platí, že pro náhodně zvolený jednotkový vektor u má některý vektor z množiny $\mathrm{Ball}(v, r) - v$ průmět do směru u dlouhý aspoň $\varepsilon r/2 = rtl/(2\sqrt{d})$.

Jak jsme zdůvodnili na začátku této podkapitoly, pro každé $w \in \mathrm{Ball}(v, r)$ platí $|w - v|^2 \leq rl^2$, takže $w - v$ je aspoň $\sqrt{r}t/2$-roztažený ve směru u. Z toho, jak už jsme si také všimli na začátku podkapitoly, plyne nerovnost $\sqrt{r}t = O(\sqrt{\log n})$, tudíž $t = O\left((\log n)^{1/3}\right)$, a to jsme chtěli dokázat. □

6 Koncentrace míry a důkaz Lemmatu 5.9

K důkazu Lemmatu 5.9 budeme potřebovat některé netriviální výsledky týkající se geometrie d-rozměrné jednotkové koule. Zaveďme následující značení: $\mathscr{S}$ označuje množinu $\{x \in \mathbb{R}^d; |x| = 1\}$, tj. povrch d-dimenzionální koule. Dále označme μ standardní pravděpodobnostní míru na množině $\mathscr{S}$, tj. pro $A \subseteq \mathscr{S}$ je $\mu(A)$ pravděpodobnost, že náhodný jednotkový vektor $u \in \mathscr{S}$ bude patřit do A. Pro $\zeta > 0$ a $A \subseteq \mathscr{S}$ označme A_ζ množinu všech bodů $\mathscr{S}$, které mají od A vzdálenost nejvýš ζ.

Naším základním nástrojem bude následující lemma:

Lemma 6.1 (Koncentrace míry). *Nechť $A \subseteq \mathscr{S}$ je měřitelná množina, nechť $\tau > 0$, nechť*

$$\zeta > \frac{2\sqrt{\log(1/\mu(A))} + \tau}{\sqrt{d}}.$$

Potom $\mu(A_\zeta) \geq 1 - \exp(-\tau^2/2)$.

Mlhavý náznak důkazu. Základním kamenem důkazu je izoperimetrická nerovnost, kterou dokázal P. Levy [2] a která říká, že podíl $\mu(A_\zeta)/\mu(A)$ nabývá minima pokud A je "polární čepice", tj. množina tvaru $\{\langle x, u\rangle \geq \kappa/\sqrt{d};\ x \in \mathscr{S}\}$ pro nějakou konstantu κ a nějaký jednotkový vektor u. Můžeme tedy předpokládat, že A je taková čepice, a použít vhodný odhad pro její míru $\mu(A)$. Hrubou představu nám dá aproximace $\mu(A) \approx \exp(-\kappa^2/2)$.

Všimněme si, že pokud A je čepice, pak z nerovnosti

$$\zeta > \frac{2\sqrt{\log(1/\mu(A))} + \tau}{\sqrt{d}}$$

se s pomocí výše uvedeného odhadu odvodí nerovnost

$$\zeta > \sqrt{2} \cdot \frac{\kappa}{\sqrt{d}} + \frac{\tau}{\sqrt{d}},$$

která ukazuje, že doplněk A_ζ je čepice tvořená body, které mají od rovníku vzdálenost alespoň $\tau/\sqrt{d}$, z čehož se dá získat požadovaný odhad na míru A_ζ. Podrobný výpočet si raději odpustíme. □

Koncentraci míry využijeme k důkazu následujícího lemmatu, které říká, že každá vhodná (ε, δ)-síť je zároveň (ε', δ')-síť, kde ε' je o něco menší než ε, ale na druhou stranu δ' je exponenciálně blízké jedné. Jinými slovy, když o něco zjemníme oka naší sítě, chytíme do ní skoro všechny jednotkové vektory.

Lemma 6.2. *Nechť $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ je konečná (ε, δ)-síť pro libovolné $\varepsilon, \delta \in (0,1)$, splňující navíc $|e_i| \leq \lambda$ pro každé i. Zvolme ζ, τ tak, že platí*

$$\zeta > \frac{2\sqrt{\log(1/\delta)} + \tau}{\sqrt{d}}.$$

Potom E je také (ε', δ')-síť, kde $\varepsilon' = \varepsilon - \lambda\zeta$ a $\delta' = 1 - \exp(-\tau^2/2)$.

Důkaz. Označme A množinu všech bodů $u \in \mathscr{S}$ pro něž existuje vektor $e \in E$ takový, že platí $\langle u, e \rangle \geq \varepsilon$. Tato množina je uzavřená a podle předpokladů má míru alespoň δ. Z lemmatu o koncentraci míry pak dostaneme $\mu(A_\zeta) \geq \delta'$.

Nyní chceme dokázat, že pro každé $u' \in A_\zeta$ existuje $e \in E$ takové, že $\langle u', e \rangle \geq \varepsilon'$. Z toho pak vyplyne, že E je opravdu (ε', δ')-síť. Nechť tedy máme dáno libovolné $u' \in A_\zeta$. Z definice A_ζ plyne, že existuje $u \in A$ takové, že $|u' - u| \leq \zeta$. Z definice A pak plyne existence vektoru $e \in E$, pro nějž platí $\langle u, e \rangle \geq \varepsilon$. Pro toto e ale zároveň platí

$$\begin{aligned} \langle u', e \rangle &= \langle u, e \rangle - \langle u - u', e \rangle \\ &\geq \varepsilon - |e| \cdot |u - u'| \\ &\geq \varepsilon - \lambda\zeta = \varepsilon' \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, co jsme potřebovali. □

Teď jsme konečně připraveni dokázat první část Lemmatu 5.9.

Důkaz Lemmatu 5.9, části 1. Chceme dokázat, že $S_1 = X$. Inkluze $S_1 \subseteq X$ platí už podle definice S_1. Ve zbytku se tedy budeme soustředit na ověření toho, že $X \subseteq S_1$, čili pro každé $v \in X$ chceme dokázat, že $v \in S_1$, tj. že množina $\mathrm{Ball}(v, 1) - v$ tvoří $(\varepsilon/2, 1 - \delta/2)$-síť. Přitom víme, že tato množina vždy tvoří (ε, δ)-síť (viz Poznámka 5.7) a že každý vektor z této množiny má délku nejvýš l. To se hodí pro použití Lemmatu 6.2, položme proto $\lambda = l$, $\varepsilon' = \varepsilon/2$ a $\delta' = 1 - \delta/2$. Úpravou těchto rovností dostaneme hodnoty $\zeta = \varepsilon/2l$ a $\tau = \sqrt{2\log(2/\delta)}$. Zbývá ověřit poslední předpoklad Lemmatu 6.2, jímž je nerovnost

$$\zeta > \frac{2\sqrt{\log(1/\delta)} + \tau}{\sqrt{d}} = \frac{2\sqrt{\log(1/\delta)} + \sqrt{2\log(2/\delta)}}{\sqrt{d}}.$$

Výraz na pravé straně má tvar $f(\delta)/\sqrt{d}$ pro nějakou funkci f. Výraz na levé straně je roven $\zeta = \varepsilon/2l = t/(2\sqrt{d})$. Pokud tedy $t > 2f(\delta)$, jsou předpoklady Lemmatu 6.2 splněny, takže pro první část Lemmatu 5.9 stačí brát $t_0 = 2f(\delta)$. $\square$

Nyní přistoupíme k důkazu druhé části Lemmatu 5.9. Budeme postupovat indukcí podle k, přičemž základní krok indukce je obsažen už v první části. Zaveďme značení $\varepsilon_k = \varepsilon k/2$.

Důkaz Lemmatu 5.9, části 2. Položme $\rho = \delta/4$. Předpokládejme, že už jsme dokázali, že $|S_k| \geq \rho^{k-1}|X|$. Připomňme, že podle definice pro každé $v \in S_k$ množina $\mathrm{Ball}(v,k) - v$ tvoří $(\varepsilon_k, 1-\delta/2)$-síť, což jinými slovy znamená, že cesty délky k z vrcholu v tvoří $(\varepsilon_k, 1-\delta/2)$-síť. Chceme dokázat, že existuje hodně vrcholů (ne nutně patřících do S_k) takových, že cesty délky $k+1$ z nich vycházející tvoří $(\varepsilon_{k+1}, 1-\delta/2)$-síť. Důkaz je složen z následujících tří hlavních kroků:

1. Ukážeme, že pro každé $v \in S_k$ platí, že cesty délky $k+1$, které obsahují v jako svůj *druhý* vrchol, tvoří $(\varepsilon_k + \varepsilon, \delta/2)$-síť.

2. Pomocí počítání dvěma způsoby ukážeme, že existuje poměrně velká množina $T \subseteq X$ taková, že v každém vrcholu $w \in T$ začíná "hodně" cest zkonstruovaných v předchozím kroku. Přesněji řečeno, pro každé $w \in T$ platí, že cesty délky $k+1$ začínající ve w tvoří $(\varepsilon_k + \varepsilon, \rho^k)$-síť.

3. Aplikujeme Lemma 6.2, a ukážeme, že $(\varepsilon_k + \varepsilon, \rho^k)$-sítě zkonstruované v předchozím kroku jsou také $(\varepsilon_{k+1}, 1-\delta/2)$-sítě, z čehož vyplyne $T \subseteq S_{k+1}$, čímž získáme požadovaný odhad na velikost S_{k+1}.

Zvolme pevně vrchol $v \in S_k$. Označme A'_v množinu všech vektorů $u' \in \mathscr{S}$, pro které existuje bod $w' \in \mathrm{Ball}(v,k)$ takový, že $\langle w' - v, u' \rangle \geq \varepsilon_k$. Množina A'_v má podle předpokladů míru alespoň $1-\delta/2$. Dále označme A''_v množinu všech vektorů $u'' \in \mathscr{S}$, pro něž existuje vrchol $w'' \in \mathrm{Ball}(v,1)$ takový, že $\langle v - w'', u'' \rangle \geq \varepsilon$. Množina A''_v má míru alespoň δ (to plyne z Poznámek 5.6 a 5.7). Označme $A_v = A'_v \cap A''_v$ a všimněme si, že $\mu(A_v) \geq \delta/2$, což plyne z nerovností

$$1 \geq \mu(A'_v \cup A''_v) = \mu(A'_v) + \mu(A''_v) - \mu(A_v) \geq (1-\delta/2) + \delta - \mu(A_v).$$

Shrňme si, co zatím víme: pro každý vektor $u \in A_v$ existuje $w' \in \mathrm{Ball}(v,k)$ a $w'' \in \mathrm{Ball}(v,1)$, pro které platí $\langle w' - v, u \rangle \geq \varepsilon_k$ a $\langle v - w'', u \rangle \geq \varepsilon$. Z těchto dvou nerovností ale dostáváme $\langle w' - w'', u \rangle \geq \varepsilon_k + \varepsilon$, z čehož plyne, že množina

$$\{w' - w'';\ w' \in \mathrm{Ball}(v,k),\ w'' \in \mathrm{Ball}(v,1)\}$$

tvoří $(\varepsilon_k + \varepsilon, \delta/2)$-síť. Pro každý směr $u \in A_v$ si nyní pevně zafixujeme odpovídající w' a w'', pro něž platí výše uvedené nerovnosti, a říkejme, že w'' *pokrývá směr* u *skrz* v.

Jak plyne z Poznámky 5.7, můžeme vždy zvolit w'' tak, aby platilo $(w'', v) \in N_u$, kde N_u je párování z párovacího pokrytí, které jsme zkonstruovali v Lemmatu 5.4. Tím jsme završili první hlavní krok našeho důkazu.

Předchozí argumenty ukazují, že pro každé $v \in S_k$ existuje relativně hodně směrů $u \in \mathscr{S}$, které jsou pokryté nějakým $w'' \in X$ skrz v (takové směry u jsou právě prvky množiny A_v). Nyní budeme chtít dokázat, že existuje poměrně hodně bodů w'', z nichž každý pokrývá hodně směrů (skrz různá v). Pro přesnou formulaci zaveďme následující značení: pro $x \in X$ označme $B_x \subseteq \mathscr{S}$ množinu všech směrů u, které jsou pokryté bodem x (skrz alespoň jedno libovolné v). Všimněme si, že množina $\mathrm{Ball}(x, k+1) - x$ je $(\varepsilon_k + \varepsilon, \mu(B_x))$-síť.

Nyní dokážeme, že existuje množina $T \subseteq X$ s následujícími vlastnostmi:

1. $|T| \geq \delta |S_k|/4 = \rho |S_k|$
2. Pro každý bod $x \in T$ platí $\mu(B_x) \geq \rho^k$. (Tato podmínka mimo jiné znamená, že $\mathrm{Ball}(x, k+1) - x$ je $(\varepsilon_k + \varepsilon, \rho^k)$-síť.)

K důkazu tohoto tvrzení použijeme podobný průměrovací argument, jaký jsme uplatnili v důkazu Lemmatu 5.4. Zaveďme vážený orientovaný graf, jehož vrcholy jsou body X a v němž váha hrany (x, y) je míra množiny všech směrů $u \in \mathscr{S}$, které jsou pokryty vrcholem x skrz vrchol y. Víme, že pro $y \in S_k$ je součet vah hran vstupujících do y přesně míra množiny A_y, tj. aspoň $\delta/2$. Všimněme si, že když vrchol x pokrývá směr u, tak existuje přesně jedno y takové, že x pokrývá u skrz y. To proto, že x jsme volili tak, aby (x, y) patřilo do N_u, což je párování. Z toho plyne, že součet vah hran vycházejících z x je přesně míra B_x. Protože do každého vrcholu $y \in S_k$ vstupují hrany o celkové váze $\delta/2$, znamená to, že celková váha všech hran je aspoň $\delta |S_k|/2$. Z "průměrného" vrcholu $x \in X$ tedy vycházejí hrany o celkové váze aspoň $\delta |S_k|/(2|X|) \geq \delta \rho^{k-1}/2 = 2\rho^k$.

Řekneme, že vrchol $x \in X$ je *hubený*, pokud z něj vycházejí hrany o celkové váze menší než $\delta |S_k|/(4|X|)$, tj. menší než polovina průměru; ostatní vrcholy označíme jako *tlusté*. Ze všech hubených vrcholů dohromady tedy vycházejí hrany o celkové váze nejvýše $\delta |S_k|/4$, tj. nejvýše polovina celkové váhy všech hran. Ze všech tlustých vrcholů dohromady vychází hrany o celkové váze aspoň $\delta |S_k|/4$, takže existuje aspoň $\delta |S_k|/4$ tlustých vrcholů. Množinu všech tlustých vrcholů označíme T a snadno se přesvědčíme, že má obě vlastnosti, které jsme požadovali.

Naším posledním krokem bude dokázat, že pro každý vrchol $x \in T$ platí, že $\mathrm{Ball}(x, k+1) - x$ je $(\varepsilon_{k+1}, 1 - \delta/2)$-síť. Potom budeme vědět, že $T \subseteq S_{k+1}$, a důkaz lemmatu bude hotový. Zatím pouze víme, že $\mathrm{Ball}(x, k+1) - x$ tvoří $(\varepsilon_r + \varepsilon, \rho^k)$-síť. Musíme tedy znovu použít Lemma 6.2, podobně jako v důkazu první části Lemmatu 5.9. Použijeme Lemma 6.2 s parametry $\lambda = \sqrt{k+1} \cdot l$, $\zeta = \varepsilon/(2\lambda)$ a $\tau = \sqrt{2\log(2/\delta)}$. Nerovnost v předpokladech Lemmatu 6.2 má tentokrát tvar

$$\zeta > \frac{2\sqrt{\log(1/\rho^k)} + \tau}{\sqrt{d}} = \frac{2\sqrt{\log(1/\rho^k)} + \sqrt{2\log(2/\delta)}}{\sqrt{d}}. \tag{3}$$

Levá strana této nerovnosti se rovná $\varepsilon/(2\lambda) = t/(2\sqrt{k+1}\sqrt{d})$, což je větší nebo rovno $t/(4\sqrt{k}\sqrt{d})$. Pravá strana se dá upravit například takto:

$$\frac{2\sqrt{\log(1/\rho^k)} + \sqrt{2\log(2/\delta)}}{\sqrt{d}} = \frac{2\sqrt{k}\sqrt{\log(4/\delta)} + \sqrt{2\log(2/\delta)}}{\sqrt{d}} < \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{d}} \cdot g(\delta)$$

pro nějakou vhodně zvolenou funkci g. Aby tedy platila nerovnost (3), stačí zajistit $k < t/(4g(\delta))$. Označíme $\eta(\delta) = 1/(4g(\delta))$ a jsme hotovi. $\square$

Tímto jsme slavně zakončili důkaz správnosti našeho pseudoaproximačního algoritmu.

Reference

[1] S. Arora, S. Rao, U. Vazirani: *Expander flows, geometric embeddings, and graph partitions*, in Proc. of the 36th ACM Symposium on Theory of Computing, 2004.

[2] K. Ball: *An elementary introduction to modern convex geometry,* in Flavors of Geometry, S. Levy (ed.), Cambridge University Press, 1997.

[3] Poznámky z přednášky Toky, cesty a řezy pořízené v LS 2006.