

POŽADAVKY KE ZKOUŠCE Z MA 1
A INFORMACE O NÍ (LS 2024)
(M. Klazar)

Definice základních pojmů

1. definice funkce, funkce prostá, na a bijekce (d. 2, př. 1)
2. supremum a infimum v lineárním uspořádání (d. 6, př. 1)
3. (nejvýše) spočetná a nespočetná množina (př. 1)
4. vlastní a nevlastní limita posloupnosti, podposloupnost (d. 2 a 5, př. 2)
5. liminf a limsup posloupnosti (d. 8, př. 3)
6. řada, částečný součet řady, součet řady (př. 3 a 4)
7. geometrická řada a její součet, absolutně konvergentní řada (v. 7 a před t. 5, př. 4)
8. limita funkce, jednostranná limita funkce (d. 10, př. 4 a d. 1, př. 5)
9. exponenciála, logaritmus, kosinus a sinus (př. 4)
10. spojitost funkce v bodě, jednostranná spojitost funkce v bodě (d. 2, př. 5)
11. asymptotické symboly O , o a \sim (d. 12 a 13, př. 5)
12. stejnoměrná spojitost (před v. 13, př. 6)
13. kompaktní, otevřená, uzavřená množina (př. 6)
14. globální, lokální a ostré extrémy funkce (př. 6)
15. derivace funkce, jednostranná derivace funkce (d. 1 a d. 4, př. 7)
16. standardní definice tečny (d. 6, př. 7)
17. derivace vyšších řádů (str. 4/5, př. 8)

18. (ryze) konvexní a konkávní funkce (d. 10, př. 8)
19. inflexní bod (d. 15, př. 8)
20. svislé asymptoty a asymptoty v nekonečnu (d. 18 a 19, př. 8)
21. Taylorův polynom funkce (d. 2, př. 9), Taylorova řada funkce (d. 10, př. 9)
22. primitivní funkce (d. 13, př. 9)
23. Newtonův integrál funkce (d. 19, př. 10 a úvod př. 11)
24. Riemannův integrál (d. 2, př. 10; v. 1, př. 12 a v. 10, př. 13)
25. množina míry 0 (d. 5, př. 13)
26. Henstock–Kurzweilův integrál (d. 12, př. 13)
27. plocha pod grafem funkce (d. 15, př. 10)
28. Stirlingova formule (př. 14)

Věty a tvrzení bez důkazů

1. Definice a vlastnosti \mathbb{R} (d. 9, v. 10 a důsl. 19, př. 1)
2. O podposloupnostech (t. 7, př. 2) a Existence monotónní podposloupnosti (t. 12, př. 2)
3. Geometrická posloupnost (t. 3, př. 3) a Liminf a limsup (v. 11, př. 3)
4. Asymptotika harmonických čísel (v. 3, př. 4) a Riemannova v. o řadách (v. 4, př. 4)
5. O Riemannově funkci (t. 5, př. 5) a Limita složené funkce (v. 10, př. 5)
6. Heineho definice spojitosti (začátek př. 6), Blumbergova (v. 3, př. 6) a Počet spojitých funkcí (v. 5, př. 6)
7. Derivace složené funkce (v. 17, př. 7) a Derivace inverzní funkce (v. 19, př. 7)

8. l'Hospitalovo pravidlo (v. 7 a 8, př. 8) a Konvexita a konkavita a $(f')'$ (v. 13, př. 8)
9. Lagrangeův a Cauchyův zbytek Taylorova polynomu (v. 11, př. 9) a Střídavé permutace (t. 12, př. 9)
10. Riemann = Newton (v. 13, př. 10 a v. 2, př. 13) a Integrace substitucí (v. 11, př. 10)
11. (N) $\int_A^B f$ per partes (v. 3, př. 11) a PF rac. funkce (v. 8, př. 11)
12. transcendence čísla e (v. 13, př. 12)
13. ZVA 2 (v. 2, př. 13) a Lebesgueova v. (v. 6, př. 13)
14. R. \int a horní/dolní \sum (v. 10, př. 13) a H.-K. \int a N. \int (v. 13, př. 13)
15. vzorec pro délku grafu (v. 2, př. 14)

Věty a tvrzení s důkazy

1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (v. 7, př. 1) a Cantorova (v. 14, př. 1)
2. Jednoznačnost limity (t. 4, př. 2) a Bolzano–Weierstrassova v. (v. 14, př. 2)
3. Limita a uspořádání (v. 4, př. 3) a Cauchyova podmínka (v. 16, př. 2)
4. Nutná podmínka konvergence řady (t. 1, př. 4) a divergence harmonické řady (t. 2, př. 4)
5. Heineho definice limity funkce (v. 12, př. 4) a Aritmetika limit funkcí (v. 7, př. 5)
6. Nabývání mezíhodnot (v. 6, př. 6) a Minimax (v. 8, př. 6)
7. Nutná podmínka extrému (v. 2, př. 7) a Leibnizův vzorec (v. 13, př. 7)
8. Lagrangeova VSH (v. 2, př. 8) a Monotonie 1 (v. 4, př. 8)
9. Taylorův polynom (v. 3, př. 9) a Nejednoznačnost PF (v. 14, př. 9)
10. slabá ZVA 2 (v. 13, př. 10) a Derivace jsou Darbouxovy (v. 8, př. 10)

11. Bachetova identita (t. 10, př. 11)
12. Neomezená funkce nemá R. \int (str. 4, př. 12) a Eulerův integrál (t. 10, př. 12)
13. ZVA 1 (v. 1, př. 13) a složenina 2 (důsl. 9, př. 13)
14. vzorec pro objem rotačního tělesa (v. 8, př. 14)

Vzorová písemka

1. (10 b.) Vypočítejte objem rotačního tělesa

$$V(1, 2, \log x) .$$

Svůj výpočet přiměřeně zdůvodněte.

2. (a) (2 b.) Definujte součet řady.
 - (b) (4 b.) Ano nebo ne: když $c \in \mathbb{R}$ a $\sum a_n$ je řada, pak tato řada konverguje, právě když konverguje řada $\sum ca_n$.
 - (c) (4 b.) $\frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \frac{5}{81} + \frac{5}{243} + \dots = ?$
- Své odpovědi přiměřeně zdůvodněte.

3. (a) (2 b.) Napište tvrzení o Heineho definici spojitosti.
- (b) (4 b.) Ano nebo ne: funkci $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} \sin(1/x)$ lze v 0 spojitě dodefinovat.
- (c) (4 b.) Ano nebo ne: funkci $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ lze v 0 spojitě dodefinovat.

Své odpovědi přiměřeně zdůvodněte.

4. (a) (4 b.) Napište znění věty: Lagrangeova věta o střední hodnotě.
- (b) (6 b.) Dokažte ji.

Technické poznámky o zkoušce. Písemka na 90 minut se 4 příklady po 10 bodech: (1) počítací (zjednodušený průběh funkce nebo výpočet integrálu), (2) definice, (3) věta/tvrzení bez důkazu a (4) věta/tvrzení s důkazem,

s doplňkovými otázkami. Hodnocení: 0–19 za 4, 20–26 za 3, 27–33 za 2 a 34–40 za 1. Při zisku bodů blízko horní hranice možnost ústního dozkoušení na lepší známku. Konkrétní požadavky jsou uvedeny výše. U zkoušky nejsou povoleny žádné pomůcky (kalkulačky, zápisky, přítel na telefonu . . . , výjimky u hendikepovaných studentů povoluje examinator). U zkoušky je povoleno používat připravenou tabulku derivací, např. v rozsahu konce přednášky 7. Další příklady minulých zkuškových písemek jsou na stránce mé minulé výuky (jsou ale pro MA 1 ve staré akreditaci).