11. přednáška 13. prosince 2005

2.5. Základní věta algebry. Partii o extrémech funkcí více proměnných zakončíme jednou její pěknou aplikací. Dokážeme tzv. *Základní větu algebry* (ZVA), která praví:

> Každý nekonstantní polynom $p(z)$ s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen.

Nejprve připomeneme pár vlastností komplexních čísel, které budeme v důkazu potřebovat.

Každé nenulové komplexní číslo z má jednoznačné vyjádření v goniometrickém tvaru

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) = r\mathrm{e}^{i\phi},$$

kde $r = |z| > 0$ a $\phi \in [0, 2\pi)$; toto ϕ označíme jako $\arg(z)$. Řekneme, že nenulová čísla $u, v \in \mathbf{C}$ jsou *opačná*, když $|\arg(u) - \arg(v)| = \pi$. V důkazu ZVA použijeme tuto vlastnost opačných čísel:

$$u, v \in \mathbf{C} \text{ jsou opačná čísla a } 0 < |u| \leq |v| \ \Rightarrow |u+v| = |v| - |u|.$$

Je jasné, že pro dané nenulové $u \in \mathbf{C}$ a dané $r > 0$ existuje právě jedno číslo $v \in \mathbf{C}$ s $|v| = r$, které je opačné k u.

Na množinu komplexních čísel $\mathbf{C}$ zde pohlížíme jako na $\mathbf{R}^2$ s euklidovskou normou $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Funkce $f: \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ chápeme jako funkce $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ a podobně funkce $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ chápeme jako zobrazení $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

Lemma. *Nechť $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$ a $r > 0$. Potom funkce*

$$f(z) = az^n : \ \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < (r/|a|)^{1/n}\} \to \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < r\}$$

je surjekce.

Důkaz. Nechť $z \in \mathbf{C}$ a $0 < |z| < r$. Položíme

$$z_0 = \frac{|z|^{1/n}\mathrm{e}^{i\arg(z)/n}}{|a|^{1/n}\mathrm{e}^{i\arg(a)/n}}.$$

Pak $f(z_0) = z$ a $0 < |z_0| < (r/|a|)^{1/n}$. □

Důkaz Základní věty algebry. Nechť tedy polynom

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

splňuje $a_i \in \mathbf{C}$, $n \geq 1$ a $a_n \neq 0$. Chceme dokázat existenci komplexního čísla $z_0 \in \mathbf{C}$ splňujícího $p(z_0) = 0$. Použijeme funkci

$$f(z) = |p(z)| : \mathbf{C} \to \mathbf{R}_{\geq 0}.$$

Jako funkce $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ je $f(z)$ spojitá, protože $|p(a + bi)| = \sqrt{r(a,b)^2 + s(a,b)^2}$, kde r a s jsou nějaké polynomy dvou proměnných s reálnými koeficienty. Dokážeme dvě vlastnosti funkce $f(z)$.

Vlastnost 1. Nabývá na $\mathbf{C}$ svého minima: $\min_{z \in \mathbf{C}} f(z) = f(z_0)$ pro nějaké $z_0 \in \mathbf{C}$.

Vlastnost 2. Když $f(u) > 0$ pro nějaké $u \in \mathbf{C}$, potom existuje $u' \in \mathbf{C}$ takové, že $f(u') < f(u)$.

Z vlastnosti 2 vyplývá, že bod globálního minima z_0 zaručený vlastností 1 musí splňovat $f(z_0) = |p(z_0)| = 0$. Tedy $p(z_0) = 0$ a ZVA je dokázána. Zbývá ovšem dokázat obě vlastnosti.

Vlastnost 1. Položíme

$$R = \max\left(1,\ 2(|a_0| + 1)/|a_n|,\ 2n \cdot |a_n|^{-1} \cdot \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|\right).$$

Pak pro každé $z \in \mathbf{C}$ se $|z| > R$ máme

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0| \\
&= |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \\
&\geq |z|^n \left(|a_n| - \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{a_i}{z^{n-i}} \right| \right) \\
&\geq |z| \left(|a_n| - \frac{n \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|}{|z|} \right) \\
&\geq 2 \frac{|a_0| + 1}{|a_n|} \cdot \frac{|a_n|}{2} \\
&= |a_0| + 1 \\
&> |a_0|.
\end{aligned}$$

Nerovnost $|z| > R$ tedy implikuje $|p(z)| > |p(0)| = |a_0|$. Pak ale

$$\inf_{z \in \mathbf{C}} |p(z)| = \inf_{|z| \leq R} |p(z)| = \min_{|z| \leq R} |p(z)| = |p(z_0)|$$

pro nějaké číslo z_0 z kruhu $K = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq R\}$, protože K je kompaktní a $f(z) = |p(z)|$ je spojitá. Takže $\min_{z \in \mathbf{C}} |p(z)| = \min_{|z| \leq R} |p(z)| = |p(z_0)|$.

Vlastnost 2. Nechť $u \in \mathbf{C}$ a $f(u) > 0$, to jest $p(u) \neq 0$. Polynom $p(z)$ rozvineme do Taylorovy řady se středem v u neboli, řečeno v jazyce lineární algebry, místo v kanonické bázi $\{1, z, z^2, \ldots\}$ ho vyjádříme jako lineární kombinaci v bázi $\{1, z-u, (z-u)^2, \ldots\}$:

$$p(z) = b_0 + b_1(z-u) + \cdots + b_n(z-u)^n, \ b_i \in \mathbf{C}.$$

Zde $b_0 = p(u) \neq 0$ a $b_n = a_n \neq 0$. Nejmenší index $k \geq 1$, pro nějž $b_k \neq 0$, dělí součet na tři sčítance:

$$\begin{aligned} p(z) &= b_0 + b_k(z-u)^k + \sum_{i=k+1}^{n} b_i(z-u)^i \\ &= b_0 + p_1(z) + p_2(z), \end{aligned}$$

kde $p_1(z) = b_k(z-u)^k$, $b_k \neq 0$, a $p_2(z) = \sum_{i=k+1}^{n} b_i(z-u)^i$. Index k a sčítanec $p_1(z)$ jsou vždy definovány, ale může se stát, že $k = n$. Potom klademe $p_2(z) \equiv 0$.

Je zřejmé, že pro $z \to u$ máme $p_2(z) = o(p_1(z))$. Zvolíme tedy $\delta > 0$ tak, že $|z-u| < \delta$ implikuje $|p_2(z)| \leq \frac{1}{2}|p_1(z)|$. Dále zvolíme $r > 0$ tak malé, že $r < |b_0|$ a $(r/|b_k|)^{1/k} < \delta$. Zvolíme $c \in \mathbf{C}$ tak, že $0 < |c| < r < |b_0|$ a c je číslo opačné k b_0. Pak podle lemmatu existuje $u' \in \mathbf{C}$ takové, že $0 < |u'-u| < (r/|b_k|)^{1/k} < \delta$ a $p_1(u') = c$. Pak ale

$$\begin{aligned} |p(u')| &= |b_0 + p_1(u') + p_2(u')| \\ &\leq |b_0 + c| + |p_2(u')| \\ &= |b_0| - |c| + |p_2(u')| \\ &\leq |b_0| - \tfrac{1}{2}|c| \\ &< |b_0| \\ &= |p(u)| \end{aligned}$$

a $f(u') = |p(u')| < |p(u)| = f(u)$, což jsme chtěli dokázat. □

Vlastně jsme dokázali, že jediná lokální minima funkce $f(z) = |p(z)|$ jsou kořeny polynomu p. Mírnou modifikací důkazu vlastnosti 2 lze dokázat, že $f(z) = |p(z)|$ nemá žádná lokální maxima.

Kapitola 3 — Úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic

3.1. Úvod do úvodu. Diferenciální rovnice (DR), to jest relace mezi hodnotami derivací hledaných funkcí, hrají stěžejní úlohu v matematických modelech problémů z fyziky, techniky, biologie, ekonomie atd.

Příklady. Newtonův zákon síly, s nímž jsme se už na přednášce setkali, se dá vyjádřit diferenciální rovnicí

$$mx'' = F,$$

kde $x = x(t) \in \mathbf{R}$ je poloha částice o hmotnosti m v čase t (uvažujeme jen jednoduchý jednorozměrný případ), pokud je vystavena působení síly F. Ta může být obecně nějakou funkcí času, polohy částice a její rychlosti: $F = F(t, x, x')$. Uvažme nejjednodušší situaci, kdy je F konstantní—představuje třeba působení tíhového pole Země, které se nemění s časem a nezávisí na poloze částice a už vůbec ne na její rychlosti (zjevné idealizace). Dostaneme tak *rovnici volného pádu*

$$mx'' = -mg$$

(g je konstanta tíhového zrychlení), jejímž řešením je zřejmě každá funkce

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty. Tyto dvě konstanty vyjadřují skutečnost, že pohyb částice je určen úplně teprve zadáním její polohy a rychlosti v nějakém čase.

Jako druhý příklad DR si uvedeme *rovnici radioaktivního rozpadu*

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -kR.$$

Popisuje vývoj množství $R = R(t)$ rozpadajícího se radioaktivního materiálu v čase t; k je materiálová konstanta. Je jasné, že každá funkce $R = c\exp(-kt)$, kde c je konstanta, je řešením této rovnice.

DR dělíme na *obyčejné diferenciální rovnice* (ODR, anglicky ODE), v nichž vystupují funkce pouze jedné proměnné, a na *parciální diferenciální rovnice* (PDR, anglicky PDE), které obsahují funkce více proměnných a jejich parciální derivace. Obě předchozí rovnice jsou ODR. V této přednášce se podíváme jen na teorii ODR a to ještě jen trochu. Než tedy PDR úplně opustíme, uvedeme si pro informaci jejich tři důležité reprezentanty: Laplaceovu rovnici nebo také rovnici potenciálu

$$u = u(x, y) : \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

rovnici difuze nebo také rovnici vedení tepla

$$u = u(x, t) : \ \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

a vlnovou rovnici

$$u = u(x, t) : \ a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

α a a jsou konstanty. O fyzikálním významu těchto rovnic už něco napovídají jejich názvy.

Obecný tvar ODR pro neznámou funkci $y = y(x)$ je

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kde F je nějaká funkce $n + 2$ proměnných. Nejvyššímu řádu n derivace vyskytujícímu se v rovnici se říká *řád rovnice.* Hořejší rovnice pro volný pád je tedy (obyčejná diferenciální) rovnice druhého řádu, kdežto rovnice radioaktivního rozpadu je prvního řádu.

Diferenciální rovnice tvaru

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

kde $a_i(x)$ a $b(x)$ jsou zadané funkce a $y = y(x)$ je neznámá funkce, je *lineární diferenciální rovnice (řádu n) s pravou stranou* $b(x)$. Pokud je $b(x)$ identicky nulová, mluvíme o *homogenní lineární rovnici.* Diferenciální rovnice, které nejsou tohoto tvaru (a závisejí tedy na některých proměnných pro neznámou funkci a její derivace nelineárně), jsou *nelineární diferenciální rovnice.* Například *rovnice kyvadla*

$$\theta'' + (g/l) \sin \theta = 0,$$

která popisuje pohyb kyvadla délky l kývajícího se v homogenním tíhovém poli—úhel $\theta = \theta(t)$ je odchylka kyvadla od svislice v čase t—je nelineární. Pro malé výchylky θ platí $\sin\theta \approx \theta$ a můžeme řešit lineární aproximaci rovnice kyvadla $\theta'' + (g/l)\theta = 0$, což už je lineární ODR. Rovnice volného pádu i rovnice radioaktivního rozpadu jsou lineární.

Diferenciální rovnice $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, v nichž je funkce F polynom $n+2$ proměnných, jsou *algebraické diferenciální rovnice*. Lineární diferenciální rovnice jsou speciálním případem algebraických. Rovnice kyvadla není algebraická.

Příklady. Nechť

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}$$

je mocninná řada, v níž koeficienty B_n jsou tzv. *Bellova čísla*; B_n je počet rozkladů n-prvkové množiny na neprázdné disjunktní bloky, například $B_0 = B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$, $B_4 = 15$, $B_5 = 52$ atd. Dá se dokázat, že tato řada má poloměr konvergence ∞ a definuje tedy libovolněkrát diferencovatelnou funkci $B(x): \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Dále se dá dokázat, že $B(x)$ splňuje algebraickou diferenciální rovnici

$$B'' - (B')^2 - B'B = 0.$$

Jako cvičení ji odvoďte z faktu, že $B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$.

Pro permutaci $\pi = a_1 a_2 \dots a_n$ čísel $1, 2, \dots, n$ označíme $r(\pi)$ délku nejdelší rostoucí podposloupnosti v π, například $r(5642713) = 3$ kvůli podposloupnosti 567. Dá se dokázat, že pro náhodnou permutaci π a velké n je délka $r(\pi)$ s velkou pravděpodobností rovna zhruba $2\sqrt{n}$. Ještě přesněji se dá dokázat, že rozdělení náhodné veličiny $r(\pi)$, třeba jak silně je koncentrována kolem své střední hodnoty $2\sqrt{n}$, je určeno řešením $u = u(x)$ algebraické diferenciální rovnice

$$u'' - 2u^3 - xu = 0.$$

Pro přesnou formulaci tohoto výsledku viz přehledový článek R. P. Stanleyho na `http://www.arxiv.org/abs/math.CO/0512035`.

Při řešení diferenciálních rovnic se neobejdeme bez implicitních funkcí. Zaprvé obvykle chceme rovnici $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ rozřešit vzhledem k nejvyšší derivaci a převést ji do tvaru $y^{(n)} = G(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$. Za jistých předpokladů o funkci F to je, jak víme z věty 14 v kapitole 2, vždy lokálně možné. Zadruhé, často—hlavně v případě nelineárních rovnic—samotná řešení diferenciálních rovnic vycházejí jen jako implicitně zadané funkce.

Příklad. Uvažme (de facto algebraickou a nelineární) diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' = \frac{x^2}{1+y^2}$$

pro funkci $y = y(x)$. Implicitní funkce y daná rovnicí $y^3 + 3y - x^3 + c = 0$, kde c je konstanta, je řešením, jak se snadno přesvědčíme zderivováním: $3y^2y' + 3y' - 3x^2 = 0$, čili $y' = x^2/(1+y^2)$.

Co to ale přesně je *řešení* diferenciální rovnice $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$? Dvojice (y, I), kde $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval a $y : I \to \mathbf{R}$ je na něm definovaná funkce, která pro každé $a \in I$ má vlastní n-tou derivaci $y^{(n)}(a)$ (tím pádem i všechny derivace předchozí) a pro každé $a \in I$ platí $F(a, y(a), y'(a), \ldots, y^{(n)}(a)) = 0$. Řešení (y_1, I_1) dané diferenciální rovnice je *rozšířením* jiného řešení (y_2, I_2) (a to je *zúžením* prvního), pokud $I_1 \supset I_2$, $I_1 \neq I_2$ a pro každé $a \in I_2$ platí $y_1(a) = y_2(a)$. Řešení, které nemá rozšíření, je *maximální*.

Některé problémy, jimiž se zabývá teorie diferenciálních rovnic:

- Sestavení diferenciální rovnice pro daný problém—často nejobtížnější krok při řešení problému.
- Podmínky existence řešení a jeho (ne)jednoznačnost.
- Explicitní tvary řešení a metody jejich nalézání.
- Vlastnosti řešení (například asymptotické chování řešení $y = y(t)$ pro $t \to \infty$).
- Numerické aproximace řešení.

Existence řešení diferenciální rovnice často není jen výhradně matematickým faktem—z fyzikálního hlediska bývá zřejmá z toho, že fyzikální systém jí modelovaný se prostě nějak vyvíjet a chovat musí.

3.2. Lineární a nelineární ODR prvního řádu.