Jméno a příjmení:

Zápočtová písemka z Matematické analýzy I, 7. ledna 2015 (90 minut)

1. (4 b.) Načrtněte graf a určete lokální a globální extrémy funkce $f:\ [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definované jako $f(0) = \frac{1}{3}$ a

$$f(x) = x^x \quad \text{pro } x > 0.$$

Odpovědi zdůvodněte.

Derivace $(x^x)' = \exp(x \log x)' = x^x(1 + \log x)$ je záporná na $(0, 1/e)$ a f tam klesá, nulová v $x = 1/e$ a kladná na $(1/e, +\infty)$ a f tam roste. Dále $x^x \to +\infty$ pro $x \to +\infty$, pro $x \to 0^+$ je $x^x \to 1$ (protože $x \log x = -\log(1/x)/(1/x) = -(\log y)/y \to 0$, $y \to +\infty$) a $f(1/e) = (1/e)^{1/e} > 1/e > 1/3$. Funkce f má tedy v $x = 0$ globální (ostré) minimum a v $x = 1/e$ lokální (ostré) minimum. Jiné extrémy nemá, protože 0 a $1/e$ jsou jediné podezřelé body.

2. (4 b.) Rozhodněte, zda následující řada konverguje a zda konverguje absolutně. Pokud konverguje, nalezněte její součet.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3^n}{4^n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} \right) .$$

Odpovědi zdůvodněte.

$|\frac{3^n}{4^n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}| \le \frac{3^n}{4^n} + \frac{2}{n(n+2)} < (3/4)^n + \frac{2}{n^2}$. Což je pro $n > n_0$ menší než $\frac{3}{n^2}$. Srovnáním se $\zeta(2) = \sum \frac{1}{n^2}$ vidíme, že řada absolutně konverguje, takže i konverguje. Má součet $\frac{9}{4} - \frac{5}{6} = \frac{17}{12}$, protože $\sum_{n \ge 2} (3/4)^n = (3/4)^2/(1 - 3/4) = 9/4$ (součet geometrické řady) a $\sum_{n \ge 2}(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}$ (ostatní sčítance se povybíjejí mezi sebou).

3. (4 b.) Nechť $p(x)$ je polynom s reálnými koeficienty. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \to -\infty} (p(x+1) - p(x)) .$$

Odpovědi zdůvodněte.

Nechť $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $n \in \mathbb{N}_0$, $a_i \in \mathbb{R}$ a $a_n \neq 0$, je (nenulový) polynom stupně n. Rozdíl $p(x+1) - p(x) = a_n n x^{n-1} + \ldots$ je polynom stupně $n-1$ s vedoucím koeficientem rovným $a_n n$. To plyne z binomické věty: $(x+1)^m - x^m = \binom{m}{1}x^{m-1} + \binom{m}{2}x^{m-2} + \cdots + \binom{m}{m-1}x + 1$ pro $m \in \mathbb{N}$. Když je $p(x)$ nulový či konstantní polynom (tj. $n = 0$), je $p(x+1) - p(x) = 0$ a hledaná limita je 0. Když je $p(x) = a_1 x + a_0$ lineární polynom (tj. $n = 1$), je $p(x+1) - p(x) = a_1$ a hledaná limita je a_1. Když je $n \geq 2$, je (po jistých úpravách)

$$\lim_{x \to -\infty} (p(x+1) - p(x)) = \lim_{x \to -\infty} a_n n x^{n-1} = \operatorname{sgn}(a_n)(-1)^{n-1}(+\infty) \ .$$

4. (4 b.)Nechť je posloupnost (a_n) daná rekurencí $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ pro $n \geq 2$. Spočtěte limity

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{3a_n} \quad \text{a} \quad \lim_{n \to \infty} (-1)^n a_n / n \ .$$

Odpovědi zdůvodněte.

Máme $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, \ldots$ a indukcí se snadno dokáže, že $a_n = n^2$. Jak víme z přednášky, $\lim n^{1/n} = 1$. Tedy $\lim(3a_n)^{1/n} = \lim 3^{1/n} \lim n^{1/n} \lim n^{1/n} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. $\lim(-1)^n a_n / n = \lim(-1)^n n$ neexistuje, na sudých n jde posloupnost do $+\infty$ a na lichých do $-\infty$.