Příklady

- $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n+\sqrt{n}}{n^2+3n}}_{a_n} = ?$ $\quad b_n = \frac{1}{n}$ a limitní srov. krit.

Tabule ~~~~.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^5}{3^n}}_{a_n} = ?$ $\quad b_n = \frac{1}{2^n}$ a limitní srov. krit.

Srovnávání s geometrickou řadou (připomenutí: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ $\overset{\|}{1+q+q^2+q^3+\dots}$ konv. $\Leftrightarrow |q| < 1$)

$\boxed{\text{Věta 2.17}}$ (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s ≥ 0 členy, tj. $a_n \geq 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. $\exists q,\ 0 < q < 1,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow a_n^{1/n} < q$. Pak řada konverguje.
2. $\limsup a_n^{1/n} < 1 \Rightarrow$ řada konv.
3. $\lim a_n^{1/n} < 1 \Rightarrow$ —— " ——
4. $\limsup a_n^{1/n} > 1 \Rightarrow$ řada diverguje
5. $\lim a_n^{1/n} > 1 \Rightarrow$ —— " ——.

$a_n^{1/n} = \sqrt[n]{a_n}$

D. 1. $b_n := q^n$, $\sum b_n$ konv., z $a_n^{1/n} < q$ $(n > n_0)$ máme $a_n < q^n$ a použijeme srovnávací kritérium. $\sum b_n = 1 + q + q^2 + \dots$ - geom. řada

2. $\limsup a_n^{1/n} = q < 1$. Vezmu q', $q < q' < 1 \rightsquigarrow$ ex. n_0, že $n > n_0 \Rightarrow a_n^{1/n} < q'$. Použiju 1.

3. Plyne z 2 ($\lim = \limsup$, když ex.)

4. $\limsup a_n^{1/n} = q > 1 \rightsquigarrow$ ex. podposl. (a_{k_n}), že $a_{k_n}^{1/k_n} \to q > 1$, tedy ex. n_0, že $n > n_0 \Rightarrow a_{k_n}^{1/k_n} > 1 \rightsquigarrow a_{k_n} > 1 \rightsquigarrow \sum a_n$ diverguje (není splněna nutná podmínka, že $a_n \to 0$).

5. Plyne z 4 ($\lim = \limsup$). $\boxtimes$

Věta 2.18 (d'Alambertovo podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s >0 členy, tj. $a_n > 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. $\exists q$, $0 < q < 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Pak řada konverguje.
2. $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow$ řada konverguje.

3. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow$ řada konverguje.

4. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow$ řada diverguje.

D. 1. $a_{n_0+1} < q a_{n_0}$, $a_{n_0+2} < q a_{n_0+1} < q^2 a_{n_0}$, ... ; vezmeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n =$

$= \underbrace{0+0+\cdots+0}_{n_0 \text{ členů}} + \underbrace{q a_{n_0} + q^2 a_{n_0} + q^3 a_{n_0} + \cdots}_{= a_{n_0}(q+q^2+q^3+\cdots) - \text{konverguje.}}$ a použijeme srovnávací kritérium.

$a_n < b_n$ pro $n \geq n_0$.

2. Plyne z 1, protože ex. $q' < 1$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q'$.

3. Plyne z 2 ($\lim = \limsup$)

4. Nyní ex. $q > 1$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0 \Rightarrow a_{n+1} > q a_n$. Takže $a_{n_0+1} > q a_{n_0}$, $a_{n_0+2} > q a_{n_0+1} > q^2 a_{n_0}$, ... speciálně: $n > n_0 \Rightarrow a_n > a_{n_0}$. Řada nesplňuje $a_n \to 0$, proto diverguje. ⊠

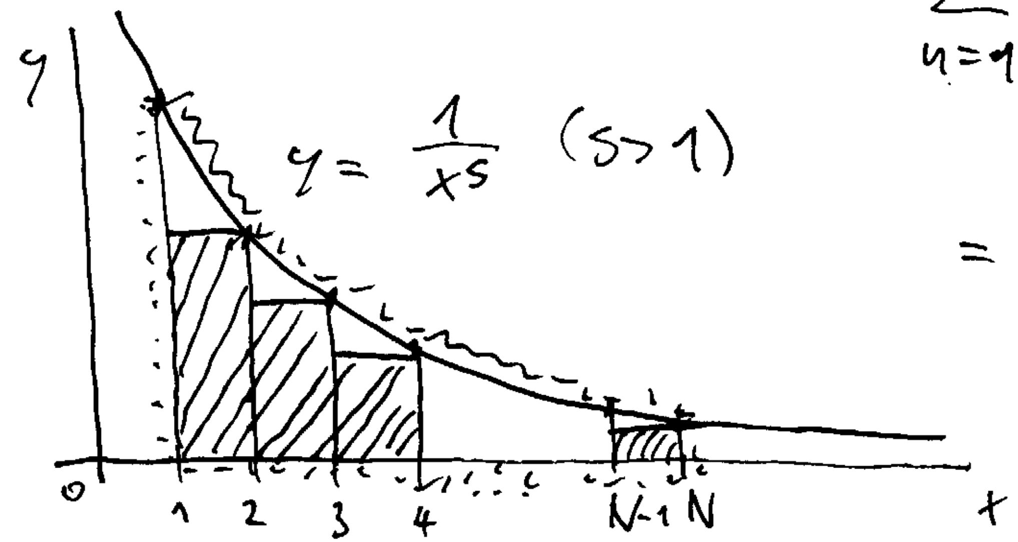
<u>Poznámka.</u> Na rozdíl od C. odm. krit. neplatí, že $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ řada diverguje. <u>Příklad</u>: tabule ~~~~.

<u>Poznámka.</u> Pokud $\lim a_n^{1/n} = 1$, C-ovo odm. kritérium neříká nic (řada může být konv. i diverg.). Totéž, když $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, d'A-ovo pod. kritérium neříká nic.

<u>Příklady.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, tabule ——— . $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$.

Konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ pro $s > 1$.

<u>1. důkaz pomocí integrálu.</u>



$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^s} \leq 1 + \text{plocha pod grafem, v intervalu } [2, N]$$

$$= 1 + \int_2^N \frac{dx}{x^s} = 1 + \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_2^N =$$

$$= 1 + \frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{N^{s-1}} - \frac{1}{2^{s-1}} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{2^{s-1}} - \frac{1}{N^{s-1}} \right) < 1 + \frac{1}{(s-1) 2^{s-1}}.$$

Takže část. součty $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$ jsou shora omezené a ex. vlastní $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$.

2. důkaz pomocí Cauchyova kritéria

$\boxed{\text{Věta 2.19}}$ (Cauchyovo kritérium) Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ splňuje $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \dots$ konverguje.

~~3.~~ Aplikace: Nechť $s > 1$, vezmeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{s-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{s-1})^k}$ $\left(= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^k\right)$ … to je ale geometrická řada s kvocientem $q = \frac{1}{2^{s-1}} < 1$ (protože $s-1 > 0$), která konverguje, takže podle C. kritéria i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konverguje.

Zbývá ovšem ~~dat~~ dokázat Cauchyovo kritérium.