$\forall a \in \mathbb{R}: -\infty < a < +\infty$ ; $|\pm\infty| = +\infty$ ; $\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq -\infty: +\infty + a = +\infty$

$\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq +\infty: -\infty + a = -\infty$ ;

$\forall a \in \mathbb{R}^*, a > 0: a(\pm\infty) = \pm\infty$

$\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0: a(\pm\infty) = \mp\infty$ ; $\forall a \in \mathbb{R}: \frac{a}{\pm\infty} = 0.$

<u>Nedefinováno (neurčité výrazy)</u>: $(-\infty) + (+\infty)$ ; $0 \cdot (\pm\infty)$ ; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ; $\frac{\text{cokoli}}{0}$.

V. 2.1 (jednozn. limity), Tvrz. 2.3 (vybraná posl.), Tvrz. 2.6 (limita a $<$), Tvrz. 2.7 (2 policajti) platí i pro nevlastní limity.

$\boxed{\text{Tvrzení 2.8*}}$ (limita, popř. nevlastní, a $+, \cdot, :$)

$\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim (a_n + b_n) = A + B$, je-li $A+B$ definováno;

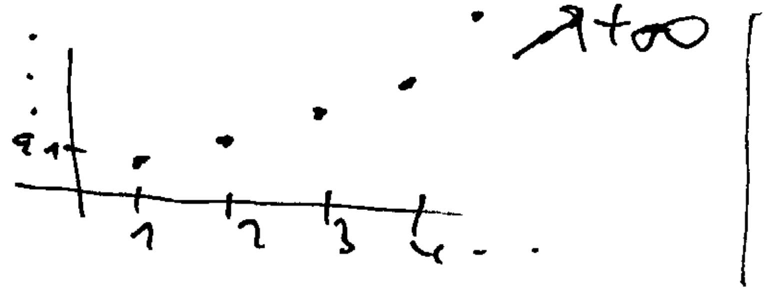
$\lim (a_n b_n) = AB$, je-li –"– ;

pokud $b_n \neq 0$ pro $\forall n$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, je-li –"– .

<u>D.</u> Nebudeme dělat, do cvičení. $\boxtimes$

**Věta 2.2*** (monotonie ⇒ existence limity)

Je-li $(a_n) \subset \mathbb{R}$ neklesající (nerostoucí) posl., potom $\lim a_n$ existuje (může být i nevlastní).




D. cvičení. ⊠

~~[illegible]~~ **Věta 2.4*** (B.-W. pro všechny posloupnosti)

Každá posloupnost má podposloupnost, která má limitu (popř. nevlastní).

D. cvičení. ⊠

---

A co V.2.5? Pokud $\lim a_n = \pm\infty$, $(a_n)$ není zjevně cauchyovská.

T.2.9? Pokud $\lim a_n = 0$ a $\lim b_n = +\infty$, $\lim (a_n b_n)$ nemusí být vůbec definovaná nebo to může být cokoli (neurčitý výraz $0 \cdot \pm\infty$!)

---

**Tvrzení 2.10** (dělení nulou a limita) $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, $\lim a_n = A > 0$, $\lim b_n = 0$ a ex. $n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0 \Rightarrow b_n > 0$. Pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

D. ~~~ ⊠

# Limes superior a limes inferior posloupností

rozšíření def. suprema: $A \subset \mathbb{R}$, neomezená shora → $\sup(A) := +\infty$

—"— zdola → $\inf(A) := -\infty$

$\sup(\emptyset) := -\infty$, $\inf(\emptyset) := +\infty$.

---

$(a_n) \subset \mathbb{R}$, definujeme, pro $k \in \mathbb{N}$, $b_k := \sup(\{a_n : n \geq k\})$

$$c_k := \inf(\underbrace{\{a_n : n \geq k\}}_{M_k})$$

$M_k \supset M_{k+1}$

~~$(c_k \in M_{k+1})$~~

$(b_k)$ je nerostoucí, tj. $b_k \geq b_{k+1}$

$(c_k)$ je neklesající, tj. $c_k \leq c_{k+1}$

$c_k \leq a_k \leq b_k$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$.

$b_1 = b_2 = \dots = +\infty$, pak $\lim b_k := +\infty$. Podobně s $-\infty$.

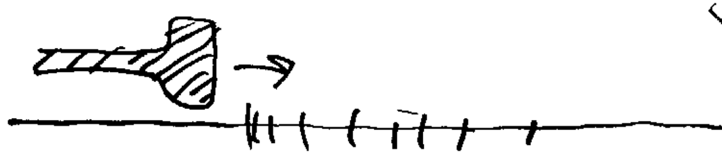
<u>limes superior</u> posloupnosti $(a_n)$ je $\lim\limits_{k\to\infty} b_k$,

<u>limes inferior</u> —"— $\lim\limits_{k\to\infty} c_k$,

značení: $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\overline{\lim}\, a_n$,

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, $\underline{\lim}\, a_n$.

- vždy definovány, patří do $\mathbb{R}^*$.

lim sup a lim inf jako mezní polohy pístu: 

**Příklady.**

$(1.1, -1.01, 1.001, -1.0001, 1.00001, \ldots)$ — $1, -1$

$(1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, \ldots)$ — $+\infty, -\infty$

$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots)$ — $+\infty$, $c_\varepsilon = \varepsilon \rightsquigarrow +\infty$

$(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots)$ — $0, 0$

lim sup = ?
lim inf = ?

$\alpha \in \mathbb{R}^*$ je <u>hromadný bod</u> posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$, když $a_{k_n} \to \alpha$ pro $n \to \infty$ pro nějakou podposloupnost posloupnosti $(a_n)$.

$\alpha \in \mathbb{R}$, pak $\alpha$ je hromadným bodem $(a_n) \iff \forall \varepsilon > 0$: interval $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ obsahuje $\infty$ mnoho členů posloupnosti $(a_n)$.

$A = (a_n)$, $H(A) = \{$hromadné body posl. $A\}$  $H(A) \neq \emptyset$ pro $\forall A$.

$\boxed{\text{Věta 2.11}}$ (hromadné body a lim sup a lim inf) $A = (a_n) \subset \mathbb{R}$. Potom $\limsup a_n = \max(H(A))$, $\liminf a_n = \min(H(A))$.

<u>Důkaz.</u> $S := \limsup a_n$. Ukážeme, že $S \in H(A)$.

$S = +\infty \rightsquigarrow (b_1, b_2, \dots) = (+\infty, +\infty, \dots)$, $A$ není shora omezená $\rightsquigarrow$ $A$ má podposloupnost konvergující k $+\infty \rightsquigarrow +\infty \in H(A)$.

$S = -\infty \rightsquigarrow \forall c \in \mathbb{R}\ \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \underset{a_k \leq}{b_k} < c \rightsquigarrow a_n \to -\infty$ a $-\infty \in H(A)$.

$S \in \mathbb{R}$. $\varepsilon > 0$ buď lib. pevné. Ex. $k_0$, že $k \geq k_0 \Rightarrow S \leq b_k < S + \varepsilon$.

$\rightsquigarrow$ ~~Ex. $k_1$, $k_1 \geq k_0$, že $S - \varepsilon < a_{k_1} \leq b_{k_0} < S + \varepsilon$~~ Vezmu $k \geq k_0$.

Pak ex. $k_1$, $k_1 \geq k$, že $S - \varepsilon < a_{k_1} \leq b_k < S + \varepsilon$. $\rightsquigarrow$ interval $(S - \varepsilon, S + \varepsilon)$ obsahuje nekonečně mnoho členů posl. $A$. Takže $S \in H(A)$.

Podobně se pro $R = \liminf a_n$ dokáže, že $R \in H(A)$.

$\alpha \in H(A) \Rightarrow \alpha \leq S$: $a_{k_n} \to \alpha$ pro nějakou podposl. Tedy $a_{k_n} \leq b_{k_n}$ a v limitě (T.2.6*) $\alpha \leq S$.

Takže $S = \max(H(A))$. Podobně se ukáže, že $R = \min(H(A))$. $\boxtimes$

<u>Důsledek</u> $A=(a_n)\subset\mathbb{R}$. Pak $\lim a_n = L \in \mathbb{R}^* \iff \limsup a_n = \liminf a_n = L \in \mathbb{R}^*$.

<u>D.</u> $\lim a_n = L \rightsquigarrow H(A)=\{L\}$. Naopak, ~~kdyz~~ nechť $H(A)=\{L\}$. Pro $\forall k\in\mathbb{N}$ máme $c_k \le a_k \le b_k$ a $c_k\to L$, $b_k\to L$, podle věty o 2 policajtech též $a_k\to L$. $\boxtimes$

## Pár standardních limit

Víme: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ (zde $(a_n)=(c,c,c,\dots)$).

$q\in\mathbb{R}$, $q>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$; $0\le q<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \dots\ q>1 \\ 1 & \dots\ q=1 \\ 0 & \dots\ -1<q<1 \\ \text{neex.} & \dots\ q\le -1 \end{cases}}$$

$\alpha\in\mathbb{Q}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \dots\ \alpha>0 \\ 1 & \dots\ \alpha=0 \\ 0 & \dots\ \alpha<0 \end{cases}}$$

A co třeba $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}$? Nebo $\lim\limits_{n\to\infty}((1.1)^n - n^6)$?

Každé ~~nekonečno~~ $+\infty$ typu $\lim n^\alpha$ („polynomiální $+\infty$“) je řádově menší než $+\infty$ typu $\lim q^n$ (exponenciální $+\infty$).