• Důkazy Typické matem. tvrzení má tvar $A \Rightarrow B$.

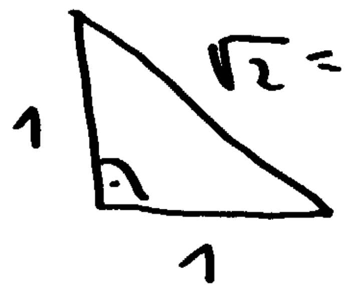
Dokazujeme: $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n = B$, každé A_i je buď axiom nebo plyne z již dokázaných tvrzení. <u>Přímý důkaz.</u>

Nepřímý důkaz čili <u>důkaz sporem</u>: předpokládáme, že A platí, ale B neplatí, a odvodíme spor.

$\boxed{\text{Příklad}}$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, tj. $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

<u>Důkaz.</u> 1. Aritmetický. Nechť $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{Z}$. Pak (tabule) .

2. Geometrický. Nechť



$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

Pak (tabule) .

$\boxtimes$

1 Reálná čísla a jejich vlastnosti

$\mathbb{R}$: $\cdots$ ——————————————— $\cdots$

Už známe zlomky (rac. čísla) $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$.

<u>Vlastnosti $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$</u>: $x, y, z \in \mathbb{Q}$ lib., pak

A1. $x+y=y+x$, A2. $(x+y)+z=x+(y+z)$, A3. $x+0=x$,

A4. $x+(-x)=0$, A5. $xy=yx$, A6. $(xy)z=x(yz)$

A7. $x1=x$, A8. $x \neq 0 \Rightarrow x \cdot x^{-1}=1$, A9. $x(y+z)=xy+xz$.

<u>Poznámka</u> Neutr. prvky 0 a 1 jsou určeny jednoznačně, podobně i inv. prvky $(-x)$ a x^{-1}. Obecně $(T, +, \cdot)$ splňující A1–A9 je (komut.) <u>těleso.</u>

A10. Nastává právě jedna z možností $x<y$, $x=y$, $x>y$.

A11. $(x<y) \& (y<z) \Rightarrow x<z$,

A12. $x<y \Rightarrow x+z<y+z$, A13. $(x<y) \& (z>0) \Rightarrow xz<yz$.

Poznámka $x \leq y :\overset{\text{def.}}{=} x<y$ nebo $x=y$. Obecně $(T,<)$ splňující A10 a A11 je lineární uspořádání. $(T,+,\cdot,<)$ spl. A1–A13 je uspořádané těleso.

$\mathbb{Q}$ spolu s $+$, $\cdot$ a $<$ splňuje A1–A13, je to usp. těleso.

Izomorfismus (těles, usp. těles, lin. uspořádání)

$(T,+,\cdot,<) \cong (U,\oplus,\odot,\circledless)$, tj. obě usp. tělesa jsou izomorfní, když ex. bijekce $f: T \to U$ taková, že $\forall x,y \in T$ platí

$f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$, $f(x\cdot y) = f(x) \odot f(y)$, $x<y \Leftrightarrow f(x) \circledless f(y)$.

<u>Příklady</u> $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ je těleso, stejně jako $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$, ale jsou neizomorfní. $(\mathbb{Q},+,\cdot,<)$ a $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ jsou neizom. usp. tělesa (ovšem zatím „nevíme", co $\mathbb{R}$ je).

<u>Maximum a minimum</u> $(T,<)$ buď lin. uspořádání, $X \subset T$.

$\max(X)$, $\min(X)$, největší / nejmenší prvek X, je $a \in X$ takový, že $a \geq b$ ($a \leq b$) pro $\forall b \in X$

Nemusí existovat, ale existuje-li, je jediný.

<u>Příklady</u>: tabule.

<u>Horní (dolní) mez</u> množiny X je $m \in T$, že $m \geq a$ $(m \leq a)$ pro $\forall a \in X$.

<u>X je shora (zdola) omezená</u>: má horní (dolní) mez.

<u>Supremum a infimum</u> množiny X ($X \subset T$, $(T, <)$ je lin. usp.)
$\sup(X)$, <u>supremum</u> mn. X, je $\min(M)$, kde M je mn. všech horních mezí $m \in T$ množiny X. Takže <u>$\sup(X) := \min($horní meze $X)$</u>.

Podobně <u>$\inf(X) := \max($dolní meze $X)$</u>.
↑
<u>infimum</u>

Opět nemusí existovat, ale existuje-li, je jediné. Nemusí patřit do X. Je to relativní pojem (přidám-li k $T \setminus X$ prvky, může se sup. objevit).
<u>Příklady</u>: tabule.

Trochu jinak řečeno:
- $\sup(X) \geq a$ pro $\forall a \in X$, ale
- $b \in T$, $b < \sup(X) \Longrightarrow \exists a \in X$, že $a > b$.

Podobně pro infimum.

Axiom suprema $(T, <)$ je lin. uspořádání

A14. Každá $X \subset T$, neprázdná a shora omezená, má supremum.

Uvidíme, že $(\mathbb{Q}, <)$ nesplňuje a. suprema, ale $(\mathbb{R}, <)$ ano.

Věta 1.1 (definice $\mathbb{R}$) Existuje usp. těleso splňující axiom suprema. Až na izom. je určené jednoznačně.

Toto těleso nazýváme usp. tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ (nebo $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$)

Příklad $(\mathbb{Q}, <)$ nesplňuje A14. Uvaž množinu zlomků $X = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$. Ukazuje se, že X je $\neq \emptyset$ a shora omezená, ale nemá supremum. D. tabule.