(o) F je prim. k f na I, G je prim. ke g na I, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow \alpha F + \beta G$ je prim. k $\alpha f + \beta g$ na I.

Tabulka prim. funkcí

1) $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$, pak $\int x^{\alpha} dx \overset{c}{=} \dfrac{x^{\alpha+1}}{1+\alpha}$

| $\alpha \in \mathbb{N}_0$ ... na $\mathbb{R}$
| $\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha < -1$ ... na $(-\infty, 0), (0, +\infty)$
| $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ... na $(0, +\infty)$

2) $\int \dfrac{dx}{x} \overset{c}{=} \log|x|$ ... $x \in (-\infty, 0)$
$x \in (0, +\infty)$

3) $\int e^x dx \overset{c}{=} e^x$ ... $x \in \mathbb{R}$

4) $\int \sin x \, dx \overset{c}{=} -\cos x$, $\int \cos x \, dx \overset{c}{=} \sin x$ ... $x \in \mathbb{R}$

5) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} \overset{c}{=} \tan x_k$ ... $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6) $\displaystyle\int -\frac{dx}{\sin^2 x} \overset{c}{=} \operatorname{cotg} x$, ... $x \in (0, \pi) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x$ ... $x \in \mathbb{R}$

$\overset{c}{=} -\operatorname{arccotg} x$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \overset{c}{=} \arcsin x$ ... $x \in (-1, 1)$

$\overset{c}{=} -\arccos x$

Věta 5.3 (nutná podmínka existence prim. funkce)

$I = (a,b)$, $f : I \to \mathbb{R}$ má na I prim. funkci. Potom $f(I)$ je interval (f má na I Darbouxovu vlastnost)

D. ~ tabule $\boxtimes$

$\boxed{\text{Věta 5.4}}$ (O substituci) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $\varphi:(\alpha,\beta)\to(a,\cancel{\beta}\,b)$

$F:(a,b)\to\mathbb{R}$ je na (a,b) prim. k funkci f, φ' je vlastní na (α,β). Potom $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \overset{c}{=} F(\varphi(t))$ na (α,β).

D. Derivováním složené funkce: $\big(F(\varphi(t))\big)' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) =$

$= f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$ ⊠

Důsledek Nechť navíc platí, že $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,\cancel{\beta}\,b)$ a $\varphi'\neq 0$ na (α,β) a ~~[illegible]~~ $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \overset{c}{=} G(t)$ na (α,β).
Potom $\int f(x)\,dx \overset{c}{=} G(\varphi^{-1}(x))$ na (a,b).

D. ~~~~~ tabule ~~~~~. ⊠

Příklady. 1. Nechť $\int f(x)\,dx \overset{c}{=} F(x)$ na $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Pak $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ (ax+b)'}}{a}\,dx \overset{c}{=} \frac{1}{a}F(ax+b)$.

2. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = ?$ na $(-1,1)$; substituce $x = \sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos t} (\cos t)\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos(2t))\,dt \overset{c}{=}$$

$$\overset{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t), \text{ na } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Tedy $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x)$, $x \in (-1,1)$.

$\boxed{\text{Věta 5.5}}$ (Integrace per partes) $I=(a,b)$

$f, g: I \to \mathbb{R}$ jsou na I spojité, $\int f(x)\,dx = F(x)$, $\int g(x)\,dx = G(x)$ na I.

Potom $\int g(x)F(x)\,dx \stackrel{c}{=} G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,dx$ na I.

D. tabule ~~~~~~~~. $\boxtimes$

Příklady 1. $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = ?$ na $\mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$.

2. $\int e^x \sin x\,dx = ?$ na $\mathbb{R}$.