Ještě pár poznámek o Taylorových řadách a polynomech

1) Taylorovy polynomy jsou mocným nástrojem pro počítání limit funkcí

<u>Př.</u> $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x} = ?$ Pomocí Peanova zbytku $(a=0)$

$$\arctan x = \underline{x - \tfrac{1}{3}x^3} + \tfrac{1}{5}x^5 \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0.$$

$$\sin x = \underline{x - \tfrac{1}{3!}x^3} + \tfrac{1}{5!}x^5 - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} -$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots} = \frac{x - x^3/6 + o(x^3)}{1 - x^2/2 + o(x^2)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \frac{x^3}{2} + \underbrace{\frac{x^2}{2}\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + o(x^2)\cdot\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}_{o(x^3)} = \underline{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).}$$

$$= \frac{1 \cdot x^1}{1!} + \frac{2\, x^3}{3!} + o(x^3)$$

kde jsme použili geometrickou řadu:

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = 1+\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)+\underbrace{\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2}_{O(x^4)=o(x^3)}+\dots = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)+o(x^2)$$
$$= 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

$\arcsin x = ?$, $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1+(-1)^1\binom{-1/2}{1}x^2 +$

$+(-1)^2\binom{-1/2}{2}x^4+o(x^4)$, nám postačí $= 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

$\leadsto \arcsin x = \arcsin 0 + \dfrac{x}{1}+\dfrac{1/2\,x^3}{3}+o(x^3) = \underline{x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3).}$

Lemma

Celkem $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-\sin x}{\tan x-\arcsin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}{\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)-\left(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)} = -1.$ $\quad\left|\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x} = 1\ \right|\ \frac{\sin x - x}{x^3}$

2) Uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \dots\ x\neq 0 \\ 0 & \dots\ x=0. \end{cases}$$

Jak vypadá její T. polynom a řada?

Víme, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^k} e^{-1/x^2} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

$f' = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$, ale f je všude spojitá a $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

Takže $f'(0) = 0$. Podobně $f^{(n)}(0) = 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

(tvrzení 4.10)

Tedy $T_n^{f,0}(x) \equiv 0$, identicky nulový polynom.

Tato funkce má Taylorovu řadu se středem v počátku

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + \frac{0}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 + \dots \equiv 0,$$ tj. tato řada má

součet 0 pro $\forall x \in \mathbb{R}$. Ovšem $f(x) = 0$ jen pro $x = 0$, jinak je $f > 0$.

$$\underbrace{\text{Pro tuto funkci tedy } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ jen pro } x = 0\ !}$$

Tedy $f(x) = o(x^n)$, $x \to 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, (což už jsme věděli).

3) Taylorovy řady a kombinatorika a diskrétní matematika

$(a=0)$ $f(x)$ - pěkná funkce, T. řada se středem v nule:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$ Často se stane, že $a_n \in \mathbb{N}$

a_n = počet nějakých struktur, objektů.

Př. 1. Střídavé permutace

$p_n = \#$ stř. permutací čísel $1,2,\dots,n$

$\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ je střídavá permutace čísel $1,2,\dots,n$, když $\sigma_1 < \sigma_2 > \sigma_3 < \sigma_4 > \sigma_5 < \dots$ Např. 132, 231 jsou $\forall$ stř. permutace pro $n=3$. Tedy $p_0 = 1$ (definujeme), $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 2$, ...

$n=4$: 1324, 1423, 2314, 2413, 3412 $\rightsquigarrow p_4 = 5$

Dále: (1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, 50521, ...)

Platí: $$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n x^n}{n!} = \tan x + \frac{1}{\cos x}}$$ (v okolí 0)

($\tan x$ přispívá liché n, $\frac{1}{\cos x}$ — " — sudé n)

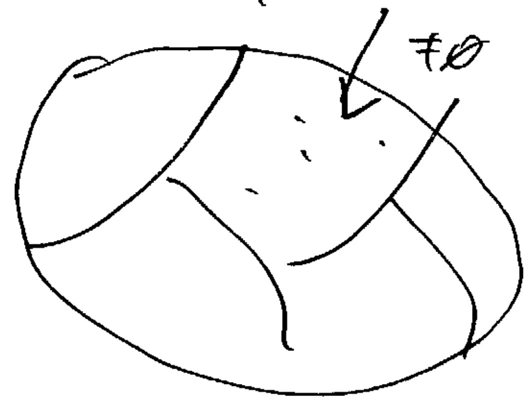
2. Množinové rozklady

b_n = # rozkladů množiny $\{1,2,\dots,n\}$ na $\neq \emptyset$ a disjunktní podmnožiny. $b_0 = 1$ (definujeme), $b_1 = 1$ ($\{1\}$)

$b_2 = 2$ ($\{1,2\}$, $\{1\} \dot\cup \{2\}$), $b_3 = 5$ ($\{1,2,3\}$, $\{1,2\} \dot\cup \{3\}$, $\{1,3\} \dot\cup \{2\}$, $\{2,3\} \dot\cup \{1\}$, $\{1\} \dot\cup \{2\} \dot\cup \{3\}$)

$$(b_n)_{n \geq 0} = (1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, \dots)$$

(Bellova čísla)



Platí: $$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!} = e^{e^x - 1}} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

3. $d_n = \#$ posloupností $a_1 a_2 \cdots a_n$, že $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, m\}$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ (nutně $m \leq n$).

$d_0 = 1$ (definujeme), $d_1 = 1$ (1), $d_2 = 3$ $(11, 12, 21)$, $d_3 = 13$

$(111, 112, 121, 211, 122, 212, 221, \underbrace{123, \dots, 321}_{6})$

$(1, 1, 3, 13, 73, 501, 4051, 37633, 394353, \dots)$ $\quad d_n \doteq \left(\frac{1}{\log 2}\right)^n$

Platí: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n x^n}{n!} = \frac{1}{2 - e^x}}$ (v okolí 0)

$x \in (-\log 2, \log 2)$

5 Primitivní funkce

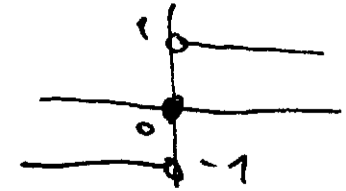
$-\infty \le a < b \le +\infty$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Funkce $F:(a,b)$ je **primitivní funkce k funkci f** (na intervalu (a,b)), když $F'=f$ na (a,b), tj. $\forall x\in(a,b)$ ex. $F'(x)$ a $F'(x)=f(x)$.

$\boxed{\text{Tvrzení 5.1}}$ F, G buďte dvě primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b). Potom ex. $c\in\mathbb{R}$, že $\forall x\in(a,b)$: $F(x)-G(x)=c$.

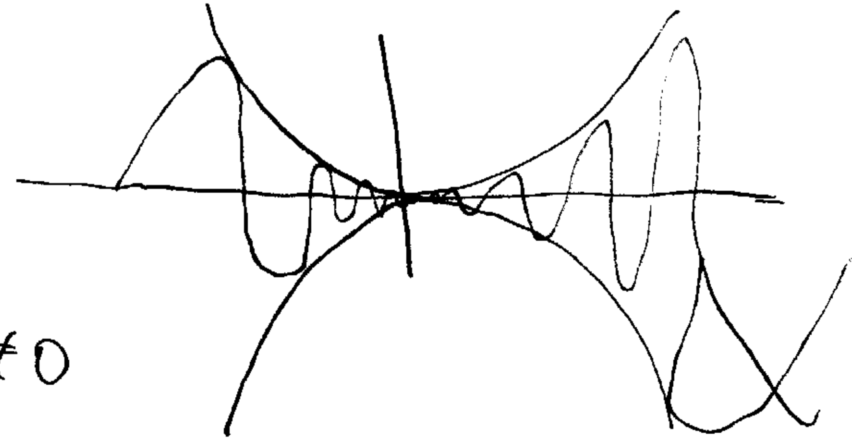
D. ~~~ tabule. ⊠

Poznámky: 1. F je prim. k f na I $\Rightarrow$ F je na I spojitá.

2. $f(x)=\operatorname{sgn} x$ nemá na $\mathbb{R}$ primitivní funkci.
(Tvrzení 4.10)



3. $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \ldots x \neq 0 \\ 0 & \ldots x = 0 \end{cases}$



$F'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \ldots x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - 0^{=F(0)}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

$\exists F'(0)$ takže $F'(0) = 0$.

$\rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \ldots x \neq 0 \\ 0 \ldots & x = 0 \end{cases}$

$F' = f$ ~~na~~ na $\mathbb{R}$.

má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci $F(x)$. Ale f není v 0 spojitá;
$\lim_{x \to 0^\pm} f(x)$ neexistuje

4. Dokážeme: f má prim. funkci $\Longrightarrow$ f má Darbouxovu vlastnost, tj.
f nabývá všech mezihodnot.

Značení: $\int f(x)\,dx$ = množina všech prim. funkcí k f na I.

$\int f(x)\,dx = F(x)+c$, $\int f(x)\,dx \overset{c}{=} F$

např. $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$, $\int x^2\,dx \overset{c}{=} \frac{1}{3}x^3$. na $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Věta 5.2}}$ (O existenci prim. funkce)

Nechť I je $\neq\emptyset$ otevřený interval (tj. $I=(a,b)$ pro nějaké $-\infty\leq a<b\leq+\infty$) a $f: I\to\mathbb{R}$ je spojitá na I. Pak má f na I primitivní funkci.

D. Pomocí Riemannova integrálu, uvidíme v LS; zatím na to nemáme. $\boxtimes$