Máme ~~$\lim_{x\to a} P(x) - T(x)$~~ $\lim_{x\to a} \frac{P(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{P(x)-f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}$

$= \underbrace{0}_{\text{podle předp.}} + \underbrace{0}_{\text{podle implikace } \Leftarrow} = 0$. Podle lemmatu $P(x) = T_n^{f,a}(x)$.

$\boxtimes$

$\boxed{\text{Věta 4.17}}$ $f:(a,x)\to\mathbb{R}$, $f^{(n+1)}$ je vlastní na (a,x), $\varphi:[a,x]\to\mathbb{R}$ je spojitá na $[a,x]$, φ' vlastní na (a,x). Pak ex. $c\in(a,x)$, že
$a \neq 0$

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!}\,\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(c)}\,f^{(n+1)}(c)\,(x-c)^{n+1}.$$
$\| \; R_n^{f,a}(x)$

D. tabule. **Poznámka** Stejně pro interval (x,a).

$\boxed{\text{Důsledky}}$ • (Lagrangeův tvar zbytku) Za předp. V. 4.18. ex. $c\in(a,x)$, že

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(c)\cdot(x-a)^{n+1}$$ ← opravte si!

• (Cauchyův tvar zbytku) Za předp. V. 4.19 ex. $c \in (a,x)$, že

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)\,(x-c)^n\,(x-a)$$

D. Polož $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, resp. $\varphi(t) = t$. Tabule ~~~. ☒ ☒

Rozvoje elementárních funkcí do mocninných řad

$a = 0$

e^x $(e^x)^{(n)} = e^x$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ $\rightsquigarrow$ $T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} x^i$

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} x^i + R_n(x), \text{ kde } R_n(x) = \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} e^{c_n} x^{n+1}}_{\to 0 \text{ pro } n \to \infty \ (x \text{ pevné libovolné})},$$

lépe: c leží mezi 0 a x. $|c_n| \le |x|$ (Lagr. tvar zbytku)

Takže $\boxed{e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

Speciálně $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

$\sin x$ $\quad f = \sin x,\ f' = \cos x,\ f'' = -\sin x,\ f''' = -\cos x,\ f^{IV} = \sin x, \dots$

$$\rightsquigarrow \quad \sin x = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} + R_{2n+1}(x), \text{ kde } R_{2n+1}(x) = \frac{\sin^{(2n+2)}(c_n)\cdot x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

(Lagr. tvar zbytku)

$|c_n| \leq |x|$. Protože $|\sin, \cos| \leq 1$, máme $R_{2n+1}(x) \to 0$ pro $n \to \infty$.

Takže $\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

podobně $\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

$\log(1+x)$ $\quad \underline{a=0} \quad f(x) = \log(1+x),\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, tedy

$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + R_n(x)$. Cauchyův tvar zbytku:

$$|R_n(x)| = \left| \cancel{\frac{1}{n!}} \frac{(-1)^n \cancel{n!}}{(1+c)^{n+1}} \cdot (x-c)^n x \right|$$, kde ~~$|c| \leq x$~~ pišme $c = \theta x$, ~~$|\theta| \leq 1$~~ $\theta \in (0,1)$

c mezi 0 a x

$$|R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{|1+\theta x|} \cdot \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^n \qquad 0<\theta_n<1. \quad \theta = \theta_n$$

Pro $|x|<1$ (dokonce pro $x>-1$) máme $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ a tedy pro $|x|<1$

$R_n(x) \to 0$ pro $n \to \infty$.

Pro $|x|>1$ nebo $x=-1$ řada $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ diverguje.

A co $x=1$? Řada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ konverguje (neabsolutně) podle Leibnitzova kritéria. Co dělá zbytek? Cauchyův tvar nám nepomůže, dával odhad pouze $|R_n(1)|<1$. Lagrangeův tvar zbytku pro $x=1$:

$$|R_n(1)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} \frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}} \cdot 1^{n+1} \right|, \text{ kde } c \in (0,1), \; c = c_n$$

$$= \frac{1}{n+1} \frac{1}{(1+c_n)^{n+1}} < \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ pro } n \to \infty.$$ Celkem máme

$$\boxed{\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{pro } -1 < x \leq 1}$$

Speciálně,

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

$$\rightsquigarrow \quad \log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \qquad -1 \leq x < 1$$

$$\log \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \qquad -1 \leq x < 1.$$

$(1+x)^\alpha$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad f = (1+x)^\alpha, \quad f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

$(a=0)$ $\qquad \rightsquigarrow \boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{pro } |x| < 1}$, kde $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

(pomocí Cauchyova tvaru zbytku)

Pro $\alpha \in \mathbb{N}$ platí pro $\forall x \in \mathbb{R}$: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. (binomická věta)

Symboly o a O

$f, g: P(a,\delta) \to \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}^*$, $\delta > 0$, f a g jsou obě definované na $P(a,\delta)$, $g > 0$ na $P(a,\delta)$.

Píšeme, že $\underline{f = O(g) \text{ pro } x \to a}$, když ex. δ_1, že $0 < \delta_1 < \delta$ a

$\frac{f(x)}{g(x)}$ je na $P(a,\delta_1)$ omezená - tj. ex. $c > 0$, že $\forall x \in P(a,\delta_1)$: $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < c$

čili $\underline{|f(x)| < c\, g(x)}$.

Píšeme, že $\underline{f = o(g) \text{ pro } x \to a}$, když $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

<u>Víme</u>: • f má vlastní $(n+1)$-tou derivaci na okolí $U(a,\delta)$ bodu $a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$\forall x \in U(a,\delta)\ \exists c$ mezi x a a, že:

(Lagrangeův tvar zbytku)

- f má derivace až do řádu n včetně v bodě $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ na okolí a platí vztah

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n), \quad x \to a.$$

(Peanův tvar zbytku)

<u>Pozn.</u> Je-li $f^{(n+1)}(x)$ omezená na okolí a, je $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} =$ $c = c(x)$
$= O((x-a)^{n+1}) = o((x-a)^n)$ pro $x \to a$; Lagrangeův tvar zbytku implikuje Peanův tvar zbytku.

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + O(x^{2n+3}), \ x \to 0.$$

z $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ a lemmatu. <u>D.</u> ~~ tabule.

$\boxed{\text{Lemma}}$ f ∞ krát diferencovatelná v ~~okolí~~ 0, $f'(x) = c_0' + c_1' x + \dots + c_n' x^n + O(x^{n+1})$ pro $x \to 0$

$$\Rightarrow f(x) = f(0) + \frac{c_0'}{1}x + \frac{c_1'}{2}x^2 + \dots + \frac{c_n'}{(n+1)}x^{n+1} + O(x^{n+2}), \ x \to 0.$$