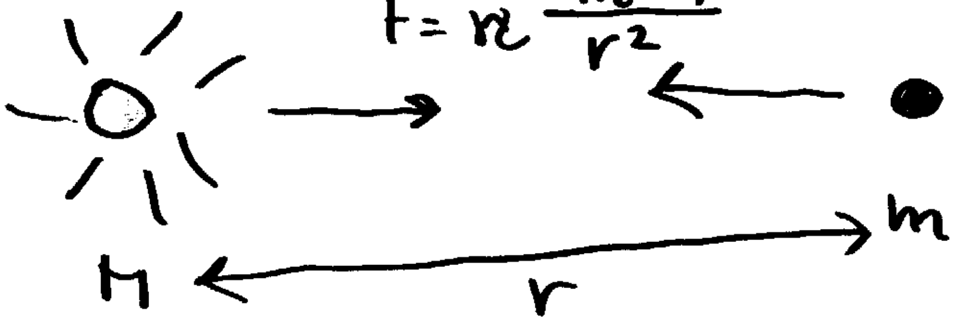
0 Úvod

Co je matematická analýza, proč dělat analýzu.

- Modelování světa kolem nás: Isaac Newton (1643 – 1727)

$F = \kappa \frac{m M}{r^2}$



matematické modely: reálná čísla, (reálné) funkce jedné i více proměnných, derivace (rychlost, zrychlení), integrály (plocha, objem, moment setrvačnosti, ...), ...

MATEMATICKÁ ANALÝZA I (MAI 054)

Přednášející: Doc. RNDr. Martin Klazar Dr.

Kontakt: pracovna 224, 221914238, klazar@kam.mff.cuni.cz

Konzultace: v pondělí po přednášce do 18:30.

Cvičení: zápočet nutný pro zkoušku; podle požadavků cvičících

cvičící: RNDr. Naděžda Krylová, CSc. a RNDr. Markéta Lopatková, Ph.D.

zápočtová písemka: pro zápočet, započítává se ke zkoušce

Zkouška: písemná; nerozhodné případy na ústní dozkoušení

písemka: 90 min, většinou teorie.

Výsledná známka: zkoušková písemka (cca 60%) + zápočtová písemka (cca 40%)

podrobněji během semestru

Co nás čeká v ZS

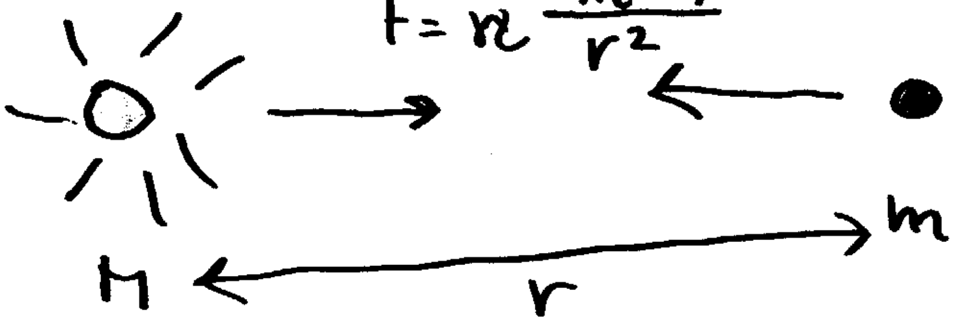
0. Úvod (opakování)
1. Reálná čísla a jejich vlastnosti.
2. Posloupnosti a řady (r. čísel)
3. Limity a spojitost reálných funkcí.
4. Derivace reálných funkcí.
5. Primitivní funkce (tj. antiderivování).

0 Úvod

Co je matematická analýza, proč dělat analýzu.

- Modelování světa kolem nás: Isaac Newton (1643–1727)

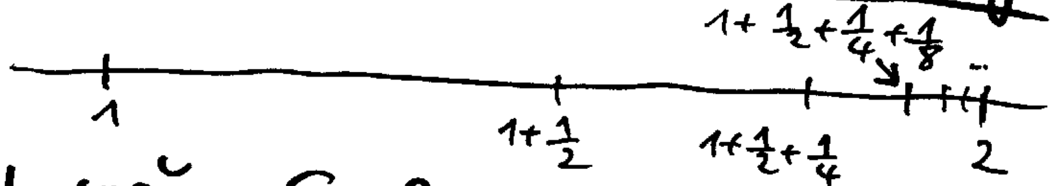
$$F = \varkappa \frac{mM}{r^2}$$



matematické modely: reálná čísla, (reálné) funkce jedné i více proměnných, derivace (rychlost, zrychlení), integrály (plocha, objem, moment setrvačnosti, ...), ...

• zvládání a zkoumání nekonečna, nekonečných struktur a dějů

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = ?$$



$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2 + S, \text{ takže } S = 2.$$

Ale co $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = ?$

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = S - 1, \text{ takže } S = -1 \; ???$$

$$\begin{array}{ccc|l} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} & & & \begin{array}{l} \Sigma = 6 \\ \Sigma = 15 \\ \Sigma = 24 \end{array} \end{array}$$

$\Sigma = 12$ $\quad \Sigma = 15$ $\quad \Sigma = 18$

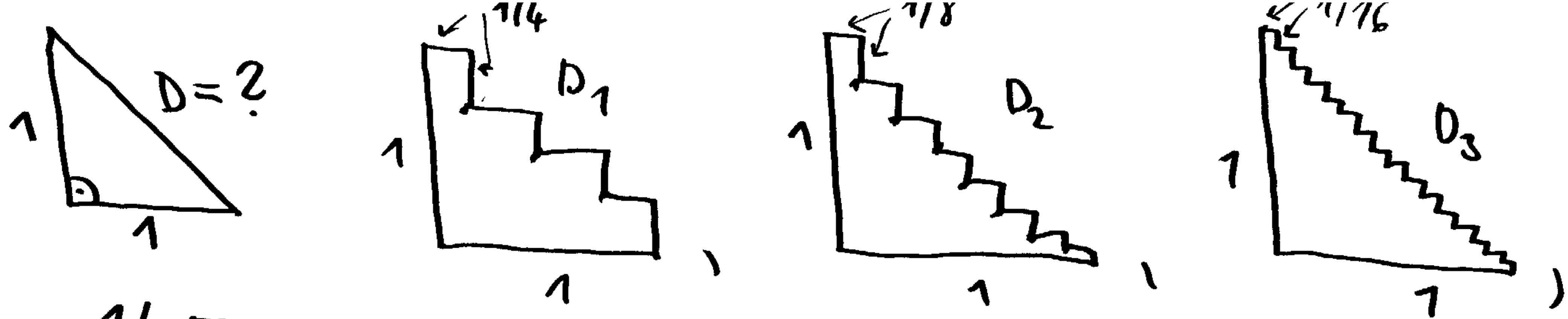
a celková suma $45 = 6 + 15 + 24 = 12 + 15 + 18$.

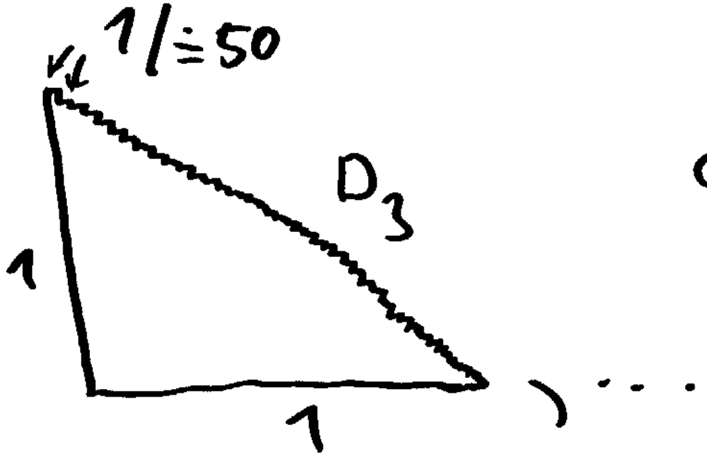
Ale co nekonečná matice

$$\Sigma=0 + \Sigma=0 + \Sigma=0 + \Sigma=0 + \Sigma=0 \cdots = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \left.\begin{array}{l} \Sigma = 1 \\ \Sigma = 0 \; + \\ \Sigma = 0 \; + \\ \Sigma = 0 \; + \\ \Sigma = 0 \; + \\ \Sigma = 0 \; + \\ \vdots \quad + \end{array}\right\} \text{celkem } \underline{1}$$

???





ale vždy $D_1 = 2,\ D_2 = 2,\ D_3 = 2, \dots \to 2$

Takže i ... $D = 2$.

Ale, jak dobře víme, $D = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. ???

• Matem. analýza v informatice   diskrétní × spojité

Diskrétní (tj. přetržité, nespojité) modely a struktury informatiky se zkoumají často pomocí metod a modelů z analýzy. Je to často nejúčinnější postup.

Opakování (značení, pojmy, důkazy)

- **Logika** výrok – tvrzení, o němž má smysl říci, zda je pravdivé nebo nepravdivé

Vídeň je hlavní město ČR – výrok

Kéž by už byl konec! Ahoj! – nejsou výroky.

logické spojky & (a zároveň), ∨ (nebo), $\Rightarrow$ (implikace), $\Leftrightarrow$ (ekvivalence), ¬ (negace); pravdiv. tabulky: ___.

$A \Rightarrow B$, A je postačující podmínka pro B, B je nutná podmínka pro A platí

Kvantifikátory: $\forall$ („pro všechny"), $\exists$ („existuje")

Predikáty (výrokové funkce) Např. pred. sudosti $S(x)$ pro $x \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$

Tvrzení (sentence). $\forall x, y \in \mathbb{N}: S(x) \& S(y) \Rightarrow S(x+y)$. (pravdivé)
Součet každých 2 sudých přir. čísel je sudý. x, y sudá čísla $\Rightarrow x+y$ též sudé.

Predikáty s více proměnnými, např. binární se dvěma.
Např. $<$ („menší než") na množině celých čísel $\mathbb{Z}$ $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ je binární predikát

---

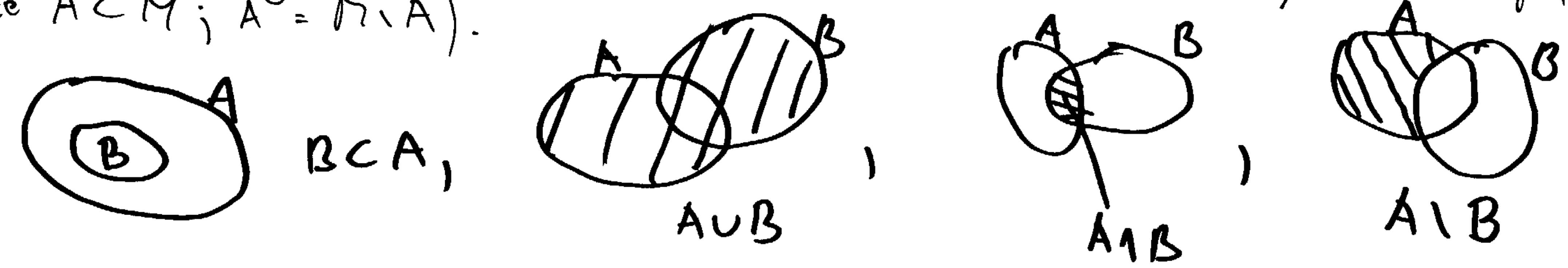
$\forall x \exists y : x<y$ | $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} (x<y)$ | Ke každému (celému) číslu existuje ~~menší~~ větší
– pravdivé tvrzení

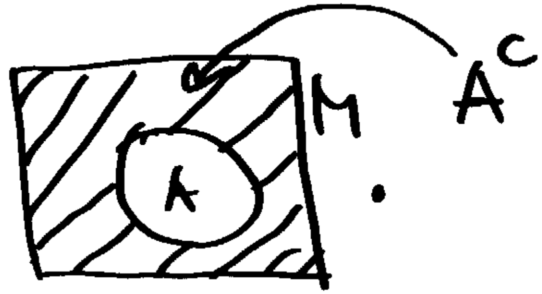
Ale $\exists y \forall x : x<y$ | $\exists y \forall x : (x=y \vee x<y)$ – nepravdivé tvrzení.

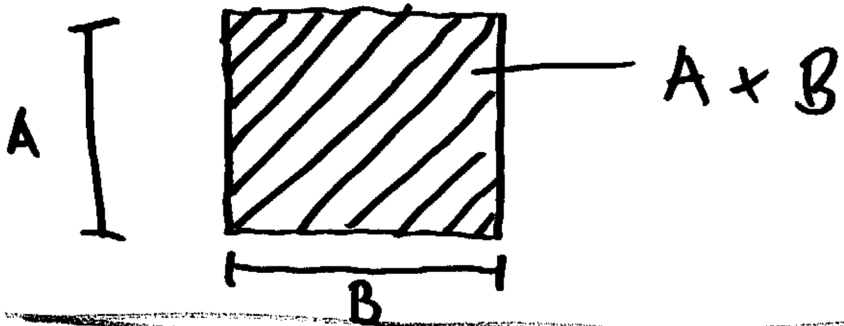
• Množiny zadání množiny výčtem : $X = \{a, *, -5, 7\}$, $* \in X$
— " — vlastností : $Y = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ je sudé}\}$ | $0 \notin X$

množinové značení $\in$ … být prvkem, $\subset$ … být podmnožinou, $\cup$ … sjednocení dvou množin, $\cap$ … průnik dvou množin, $\emptyset$ … prázdná množina,

$A\setminus B$ … rozdíl dvou množin, A^c … doplněk množiny do množiny M (předp., že $A\subset M$; $A^c = M\setminus A$).







<u>Kartézský součin 2 množin</u> $A\times B=\{(a,b): a\in A,\ b\in B\}$ (množina usp. dvojic (prvek z A, prvek z B))

<u>binární relace na množině A</u> je $R\subset A\times A$. Např. $\leq$ na množině přir. čísel $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$. ($R\subset A\times B$ – mezi množinami A a B)

syntakticky: ~~…~~ $4\leq 2$ = NE, $10\leq 100$ = ANO, …

sémanticky: $\leq \; = \{(1,1),(1,2),(2,2),(1,3),(2,3),(3,3),(1,4),\dots\}$.

<u>zobrazení, funkce z množ. X do množ. Y</u> je $F \subset X \times Y$ taková, že

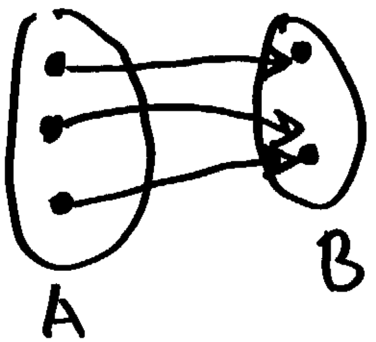
relace

$\forall a \in X\ \exists$ právě jedno $b \in Y$, že $(a,b) \in F$. <u>píšeme</u> $F: X \to Y$

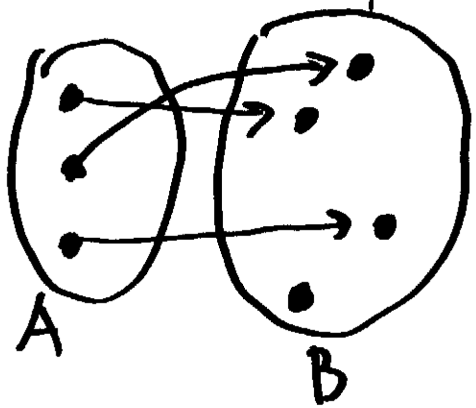
Píšeme $b = F(a)$, b je <u>funkční hodnota</u> F na <u>argumentu</u> a.

<u>Bijektivní zobrazení</u>, <u>bijekce</u>, <u>vzájemně jednoznačné zobrazení</u>

je zobr. $F: X \to Y$ taková, že $\forall b \in Y\ \exists$ právě jedno $a \in X$, že $F(a)=b$



,



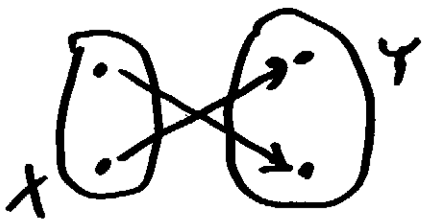
, $F: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$F(n) = n+1$

Nejsou bijekce

$F: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,

$F(n) = n+1$



– Jsou bijekce

<u>posloupnost</u> prvků z množiny A je funkce $F: \mathbb{N} \to A$. Píšeme:

$F_1 := F(1)$, $F_2 := F(2), \dots$; celkem $(F_1, F_2, F_3, \dots)$.

Např. $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, $a_1 = a_2 = 1$

$A = \mathbb{N}$ $\qquad = (a_n)_{n \geq 1}$ $\qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Fibonacciova čísla

<u>binární operace na množině A</u> je zobrazení $F: A \times A \to A$.

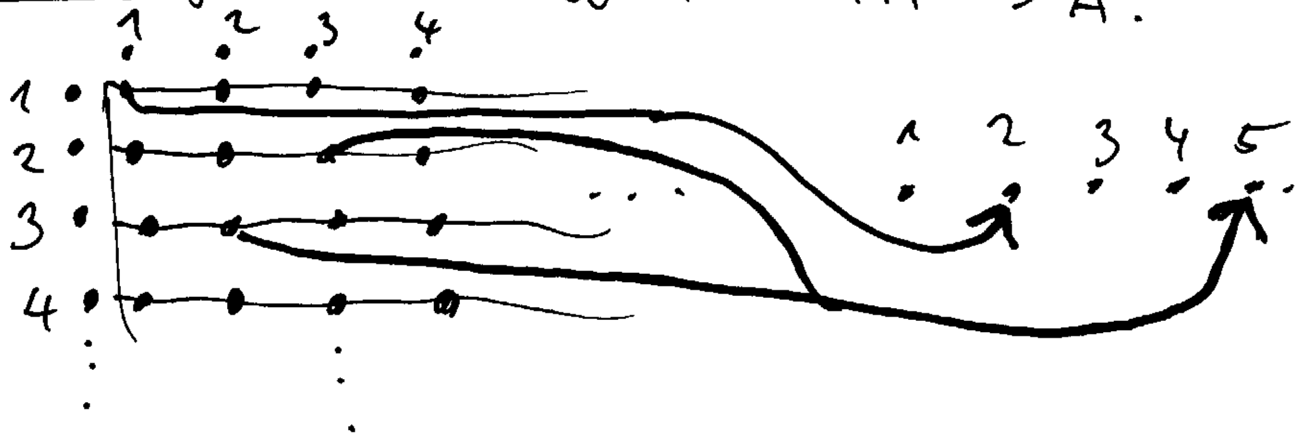
Např. $+$ na množině $\mathbb{N}$,

$2 + 3 = 5$

$3 + 2 = 5$

$1 + 1 = 2$

$\vdots$



Nebo (na množině $\mathbb{N}$) x^y, $\mathrm{NSD}(x, y), \dots$

Číselné množiny

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ jsou přirozená čísla; $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

(množináři: $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, kde $0 = \emptyset$, $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$, $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ atd.)

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ jsou celá čísla.

$\mathbb{Q}$ „=" $\left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ jsou racionální čísla (zlomky).

přesněji: $\mathbb{Q} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\} / \sim$, kde $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

$(a,b) \leftrightarrow \frac{a}{b}$ ekvivalence

$\mathbb{Q}$ = „rodinky" vzájemně ekvivalentních zlomků.

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{200}{300} = \frac{-34}{-51} = \dots$ | základní tvar zlomku: ...