$\boxed{\text{Věta 4.11}}$ $J \subset \mathbb{R}$ buď nedegenerovaný interval ($J \neq \emptyset$, $J \neq \{a\}$),
$f: J \to \mathbb{R}$ spojitá na J a má v každém vnitřním bodě J derivaci.
Potom $f' > 0$ na $J \Rightarrow f$ je na J rostoucí
$\geq$ — neklesající
< 0 — klesající
≤ 0 — nerostoucí

D. Pomocí Lagr. věty o stř. hodnotě. | Pozn. Neplatí obecně pro nesintervaly ⊠

Derivace vyšších řádů

~~[illegible]~~, $a \in \mathbb{R}$, $f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ a f má na $U(a,\delta)$ vlastní derivaci $f'(x)$.

~~[illegible]~~: ~~[illegible]~~ $f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$. Obecně
druhá derivace

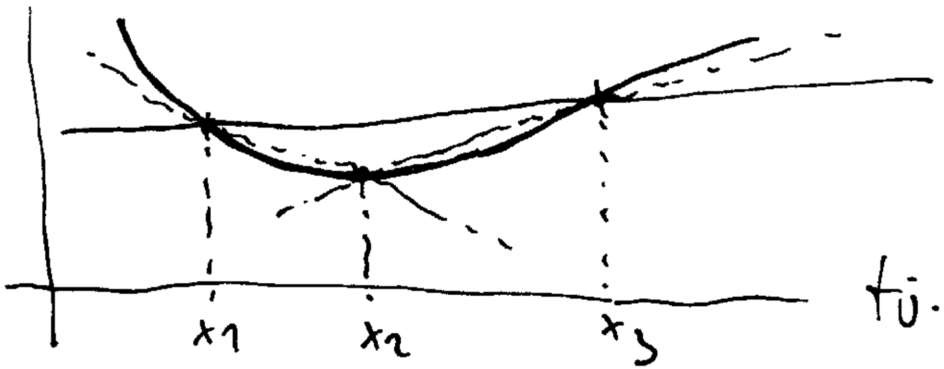
derivace $(n-1)$-tého řádu.

$f^{(n-1)}$ ex. vlastní na $U(a,\delta)$ $\to$ $f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}$.

Důsledek $f: J \to \mathbb{R}$, kde $J \subset \mathbb{R}$ interval, spojitá na J, $f'(x) = 0$ pro každý vnitřní bod $x \in J$. Potom $f = \text{const.}$ na J.

Konvexní a konkávní funkce

$I \subset \mathbb{R}$ interval, $f: I \to \mathbb{R}$ je na I konvexní: $\forall\, x_1 < x_2 < x_3$ z I platí: $(x_2, f(x_2))$ leží pod (nebo na) sečnou určenou body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$:

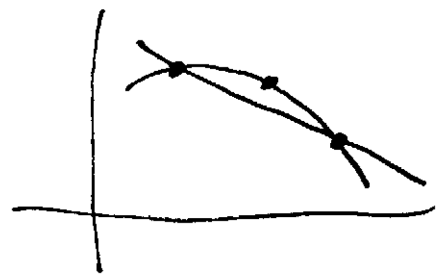


ryze konvexní: leží vždy ostře pod sečnou.

tj. $$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

konkávní: bod ... leží nad (nebo na) sečnou

ryze konkávní: —— " —— ostře nad —— " ——



Věta 4.12. $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, $a \in I$ je vnitřní bod. Pak f konvexní na I (konkávní) $f'_+(a), f'_-(a) \in \mathbb{R}$.

D. $f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Víme, že pro $a < x_1 < x_2$ platí $\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} \leq \frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}$

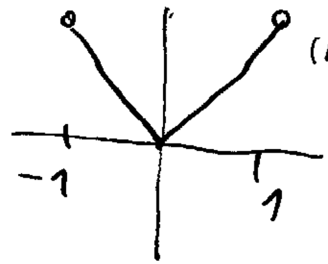
$\rightsquigarrow$ funkce $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ je neklesající. Zvolme $y \in J$, $y < a$.

Pro $x \in J$, $x > a$, máme $\frac{f(a)-f(y)}{a-y} \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \rightsquigarrow x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ je na $(a, a+\delta)$ omezená zdola. Tedy ex. $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a je vlastní. Podobně existence $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. $\boxtimes$

Důsledek. $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ konvexní (konkávní) $\Rightarrow f$ je spojitá.

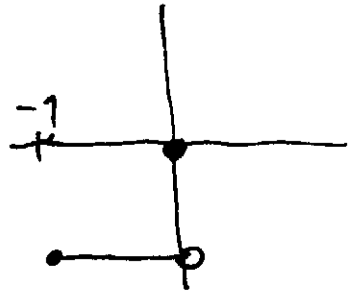
D. $c \in (a,b)$, $f'_-(c) \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \lim_{x \to c^-} (f(x)-f(c)) = 0$, takže f je spojitá v c zleva. Stejně $f'_+(c) \in \mathbb{R}$ dává spojitost f v c zprava. Celkem je f spojitá v c. $\boxtimes$

Příklady • $f(x)=|x|$ na $(-1,1)$



(ryze) konvexní na $(-1,1)$ a tedy spojitá, ale $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

• $\mathrm{sgn}(x)$ na $[-1,0]$



konvexní (ne ryze) na $[-1,0]$, ale není tam spojitá.

$\boxed{\text{Věta 4.13}}$ (druhá derivace a konvexita, konkavita)

$-\infty \le a < b \le +\infty$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ má na (a,b) spojitou $f'(x)$.

$f''>0$ na (a,b) $\Rightarrow$ f je na (a,b) ryze konvexní

$\quad \geq 0 \quad \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ konvexní

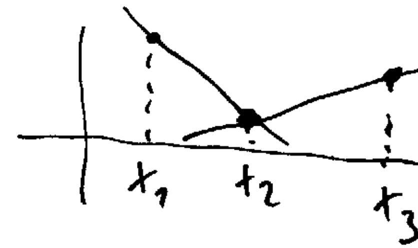
$\quad < 0 \quad \Rightarrow$ ryze konkávní

$\quad \leq 0 \quad \Rightarrow$ konkávní

D. Pouze případ $f' \geq 0$. $x\in(a,b) \Rightarrow f''(x)\geq 0$ znamená, že f' je na (a,b) neklesající. Zvolme $x_1<x_2<x_3$ z (a,b). Podle Lagr. v. o stř. hodnotě máme body c_1 a c_2 takové, že

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c_1), \quad \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(c_2), \quad x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < x_3.$$

$\rightsquigarrow f'(c_1) \leq f'(c_2)$, čili $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$



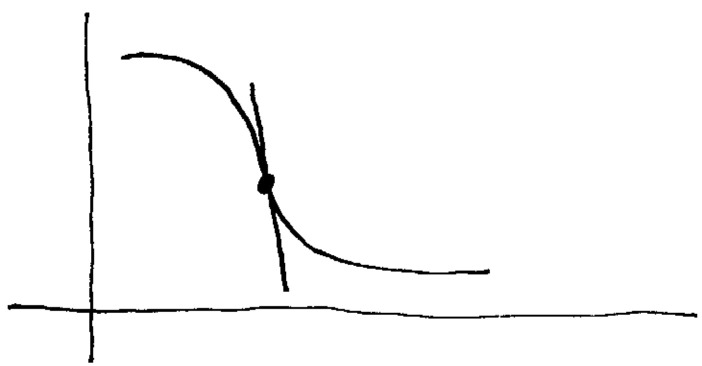
$\left(\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \right.$ už nutně leží mezi $\left.\right)$, takže f je na (a,b) konvexní. $\boxtimes$

<u>Inflexní bod</u> $f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ má v a inflexi (inflexní bod), má-li f v bodě $(a, f(a))$ tečnu T která není svislá, a ex. Δ, $0 < \Delta < \delta$, takové, že

$x \in (a-\Delta, a) \Rightarrow (x, f(x))$ leží pod tečnou T $\}$ nebo naopak.

$x \in (a, a+\Delta) \Rightarrow$ — " — nad — " —

Tj. f přechází v a z jedné strany tečny na druhou

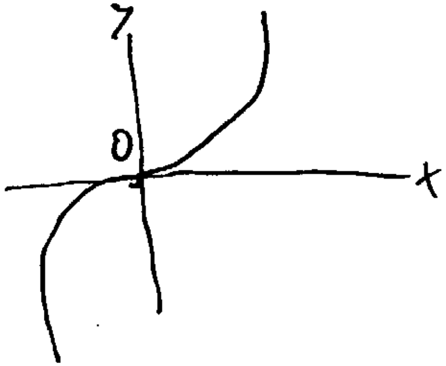


Tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$, $T(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$

$x \in (a-\Delta, a) \Rightarrow f(x) < T(x)$ | resp. $>$

$x \in (a, a+\Delta) \Rightarrow f(x) > T(x)$ | resp. $<$.

<u>Příklad</u> $f(x)=x^3 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ má v $a=0$ inflexní bod



tečna v $(0,0)$ je vodorovná přímka $y=0$.

$\boxed{\text{Tvrzení 4.14}}$ (druhá derivace a inflexní bod)

Nechť $f''(a)\neq 0$. Pak a není inflexním bodem funkce f.

<u>D.</u> Búno $f''(a)>0$. Protože $f''(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}>0$, ex. $\Delta>0$, že

$x\in(a,a+\Delta) \Rightarrow f'(x)>f'(a)$

$x\in(a-\Delta,a) \Rightarrow f'(x)<f'(a)$. Pro $y\in(a,a+\Delta)$ máme $\frac{f(y)-f(a)}{y-a}=f'(c)>f'(a)$

kde $a<c<y$.

Podobně pro $y\in(a-\Delta,a)$ máme $\frac{f(a)-f(y)}{a-y}=f'(c)<f'(a)$, $y<c<a$. Tedy

$f(y)>f'(a)\cdot(y-a)+f(a)$ pro $y\in(a-\Delta,a)\cup(a,a+\Delta)$ – graf leží nad tečnou po obou stranách a.

$\boxtimes$

$\boxed{\text{Věta 4.15}}$ (postačující podmínka inflexe)

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, f' je spojitá na (a,b), $z \in (a,b)$ je takový bod, že $f'' > 0$ na (a,z) a $f'' < 0$ na (z,b). Potom je z inflexním bodem f.

D. f' je rostoucí na $(a,z]$ a klesající na $[z,b)$. Podle Lagr. v. o stř. h.

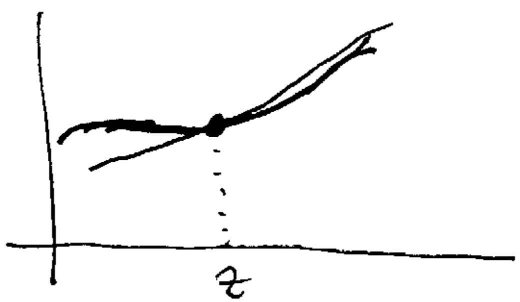
pro $x \in (a,z)$ máme $\cancel{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) < f'(z)}$ $\quad \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(c) < f'(z)$

(kde $x < c < z$) tj. $\cancel{f(x) < f(a) + f'(z)\cdot(x-a)}$ $\quad \underline{f(z) + (x-z)f'(z) < f(x)}$

pro $x \in (z,b)$ máme $\quad \frac{f(x)-f(z)}{x-z} = f'(c) < f'(z)$

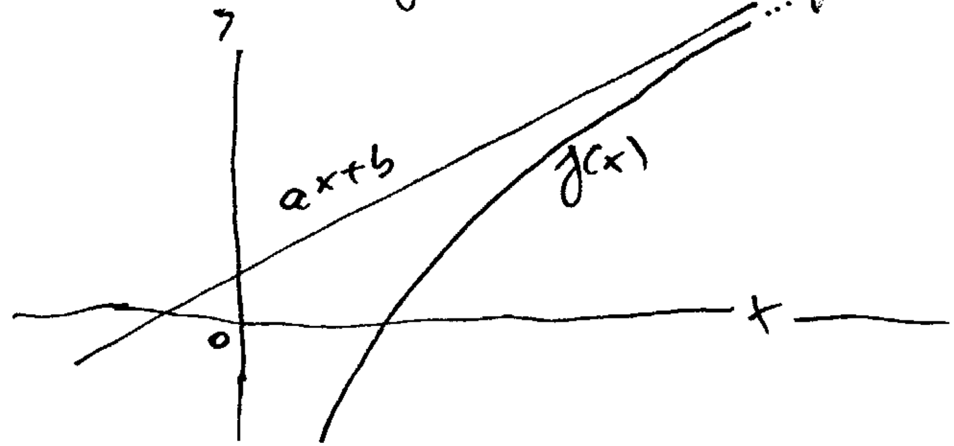
(kde $z < c < x$) tj. $\underline{f(x) < f(z) + (x-z)f'(z)}$

$\boxtimes$



Lineární funkce $x \mapsto ax+b$ je <u>asymptota</u> funkce f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), když $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$

(resp. $x\to-\infty$)



$\boxed{\text{Tvrzení 4.16}}$ f má v $+\infty$ asymptotu $ax+b$

$$\iff \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \ \ \& \ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$$

D. $\Rightarrow$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\Big(\underbrace{\frac{f(x)-ax-b}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{ax+b}{x}}_{\to a}\Big)=a$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\underbrace{f(x)-ax-b}_{\to 0}+b)=b.$$

$\Leftarrow$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)-b=b-b=0.$ $\boxtimes$