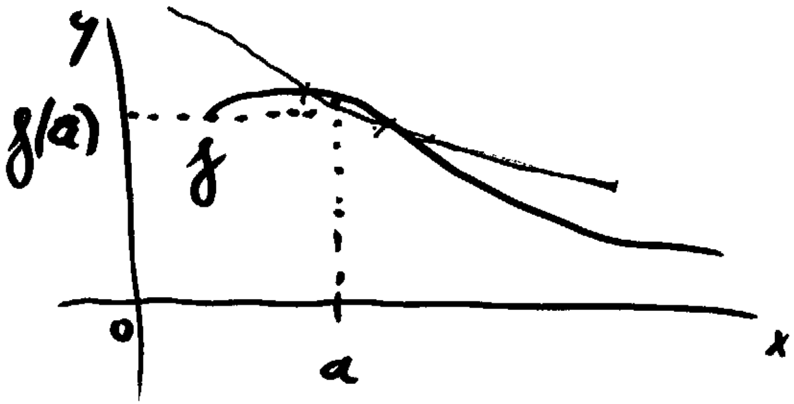
(4) Derivace reálných funkcí jedné proměnné



derivace funkce $f(x)$ v bodě a
= okamžitá míra (vychlost) růstu f
v bodě a.

$f: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $U(a,\delta) \subset M$ (tj. f je definovaná na okolí bodu a)

<u>Definice</u> Derivace funkce f v bodě a je limita

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

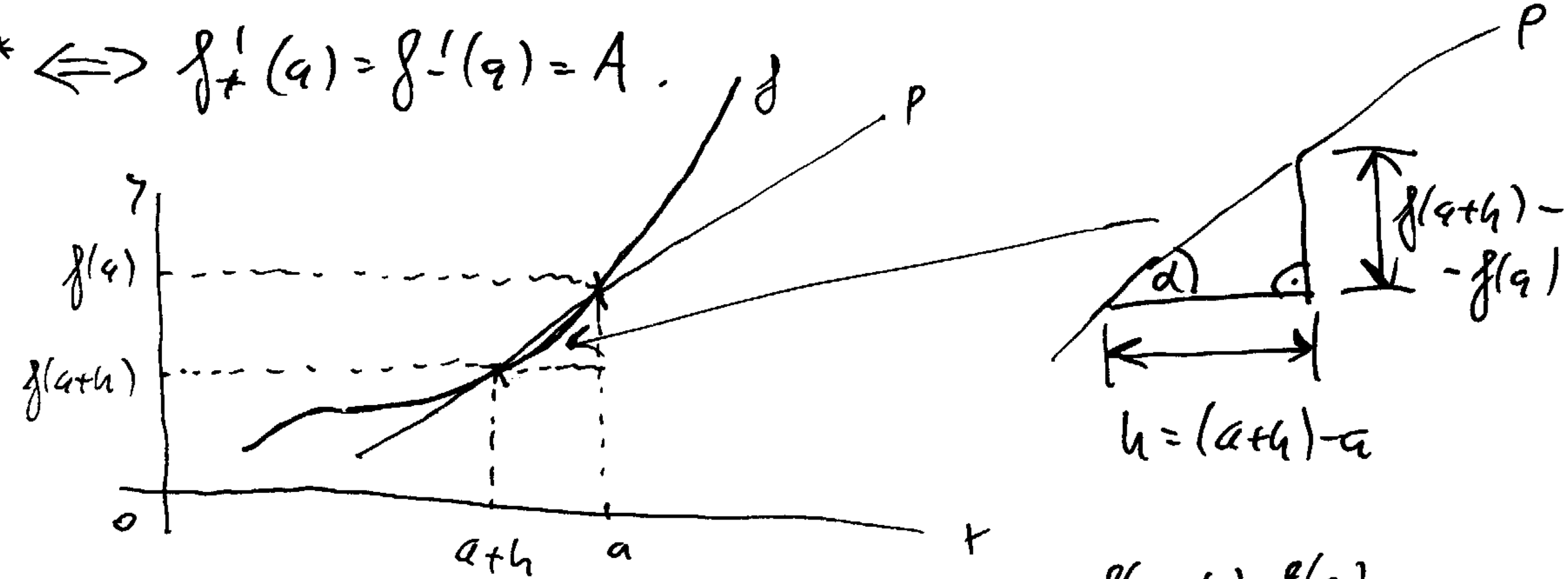
.... zprava ... : $h \to 0^+$; $x \to a^+$. značení: $f'_+(a)$.

.... zleva ... : $h \to 0^-$; $x \to a^-$. značení: $f'_-(a)$.

Pozn. • $f'(a)$ — existuje — vlastní ($\in \mathbb{R}$)
— nevlastní ($+\infty, -\infty$)
— neexistuje

• $f'(a) = A \in \mathbb{R}^* \iff f'_+(a) = f'_-(a) = A$.

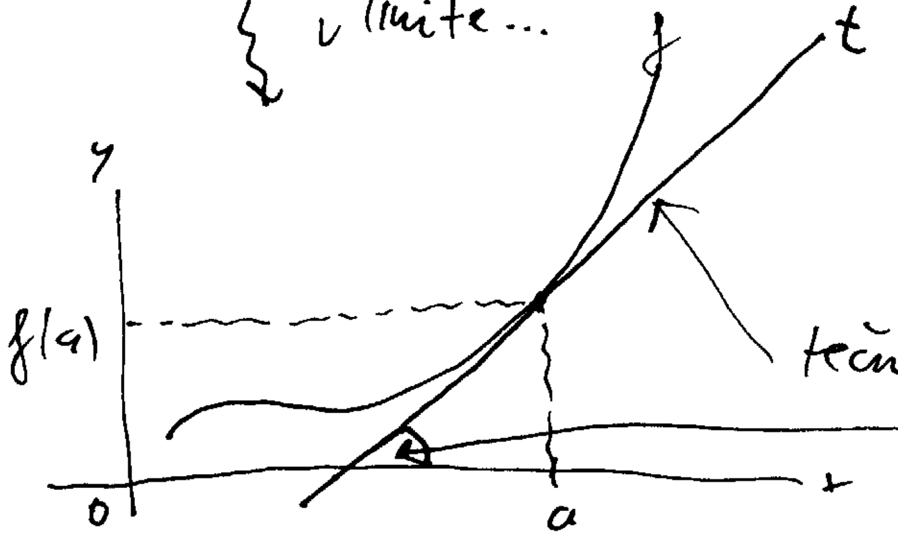
• geometricky:



$$tg(\alpha) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =$$

= směrnice přímky p (která je daná body $(a, f(a))$, $(a+h, f(a+h))$).

$h \to 0$
v limitě...



tečna ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a))$.

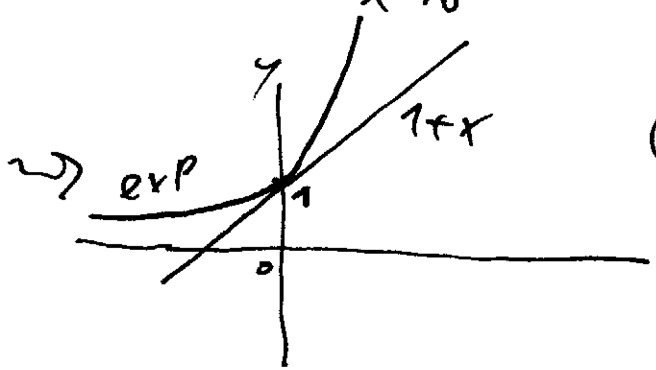
$f'(a)$

Příklady derivací

- $f(x) = x$, $a \in \mathbb{R}$ $\quad f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{x-a}{x-a} = 1.$

- $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. $\quad f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\cancel{a^n} + a^{n-1} h \binom{n}{1} + \dots + h^n \binom{n}{n} - \cancel{a^n}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(a^{n-1}\binom{n}{1} + \underbrace{a^{n-2} h \binom{n}{2}}_{\to 0} + \dots + \underbrace{h^{n-1}\binom{n}{n}}_{\to 0} \right) = n a^{n-1}.$

- $\exp'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \underset{\exp(0)}{\overset{\shortparallel}{1}}.$ $\quad \left(\exp'(a) = \exp(a) \right)$



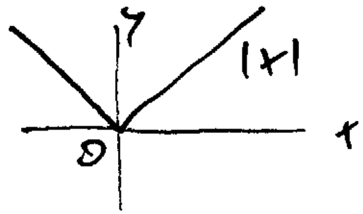
(1+x je tečna k exp v nule tj. v (0,1))

- $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \dots x > 0 \\ 0 & \dots x = 0 \\ -1 & \dots x < 0 \end{cases}$ $\quad f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \text{---}\ \shortparallel\ \text{---} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty.$

Takže $\operatorname{sgn}'(0) = +\infty$.

• $f(x) = |x|$:



$$\left.\begin{aligned} f'_+(0) &= \cdots = 1 \\ f'_-(0) &= \cdots = -1 \end{aligned}\right\} f'(0) \text{ neexistuje.}$$

$\boxed{\text{Tvrzení 4.1}}$ (existence vl. derivace $\Rightarrow$ spojitost)

$a \in \mathbb{R}$, $f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$, $f'(a)$ ex. a je vlastní $\Rightarrow$ f je spojitá v bodě a.

D. $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ nutně $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = 0$, tj.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ $\boxtimes$

Poznámka. Jinak řečeno, $f(x) = \overbrace{f(a) + (x-a) f'(a)}^{\text{lineární aproximace } f(x)} + \Delta(a,x)$, kde

pro $\forall x \in P(a,\delta)$: $\dfrac{\Delta(x,a)}{x-a} \to 0$ pro $x \to a$ (speciálně, $\Delta(x,a) \to 0$).

• $f(x) = |x|$ je příklad funkce spojité v bodě, která v něm nemá derivaci.

$\boxed{\text{Věta 4.2}}$ (aritmetika derivací) $f, g : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$, derivace $f'(a), g'(a)$ existují (popř. nevlastní).

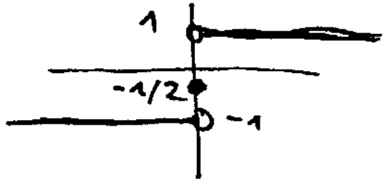
1. $\boxed{(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)}$, je-li pravá strana definována.
2. $\boxed{(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)}$, je-li p. strana definována a f nebo g je spojitá v a.

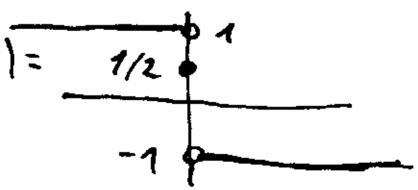
Leibnizova formule

3. Nechť g je spojitá v a, $g(a) \neq 0$. Pak $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}}$.

D. Tabule ——————. ⊠

Příklad. K bodu 2, bez předp. spojitosti f nebo g v a L. formule obecně neplatí:

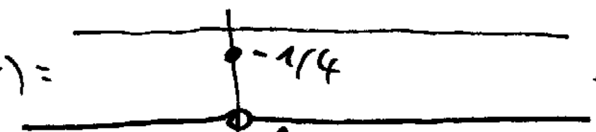
$f(x) =$ 

, $g(x) =$ 

. Pak $f'(0)g(0) + f(0)g'(0) =$

$= (+\infty)\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})(-\infty) = (+\infty) + (+\infty)$

$= +\infty$.

$f(x)g(x) =$ 

$\rightsquigarrow (fg)'(0)$ neexistuje!

Věta 4.3 (derivace složené funkce)

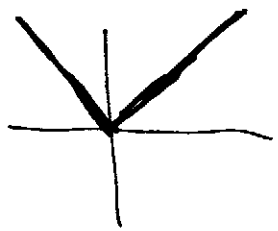
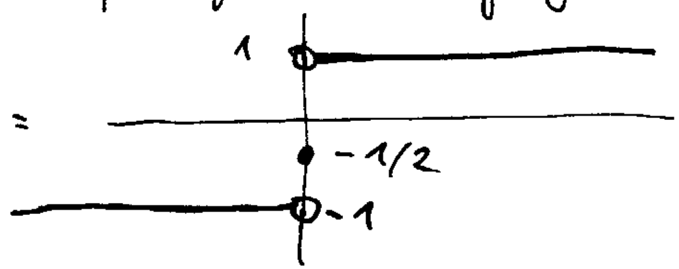
Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x_0)=y_0$ a g je spojitá v x_0. Potom

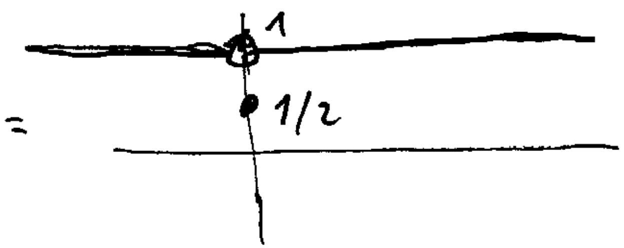
$$f(g(x))'(x_0) = \boxed{(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)\cdot g'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0),}$$

je-li výraz vpravo definován. $\boxtimes$

D Tabule ~~~~~.

Příklad Věta neplatí, vynecháme-li předpoklad spojitosti g.

$f(x) = |x| =$ , $g(x) =$ 

$f(g(x)) =$ 

$\rightsquigarrow f(g(x))'(0)$ neexistuje

ale
$g'(0) = +\infty$
$g(0) = -1/2$
$f'(-1/2) = -1$
$f'(-\frac{1}{2})\cdot g'(0) = (-1)\cdot(+\infty) = -\infty.$

Věta 4.4 (derivace inverzní funkce)

$J \subset \mathbb{R}$ buď interval, $a \in J$ vnitřní bod, $f: J \to \mathbb{R}$ spojitá a ryze monotónní na J, $f(a) = b$. Potom:

1. $f'(a) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\} \implies \boxed{(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}}$

2. $f'(a) = 0$, f je rost. (kles.) $\implies (f^{-1})'(b) = +\infty \quad (-\infty)$.

D. tabule.

$\boxtimes$