~~Jednoznačnost: $f(x) = (\log x)^{\langle -1 \rangle}$~~

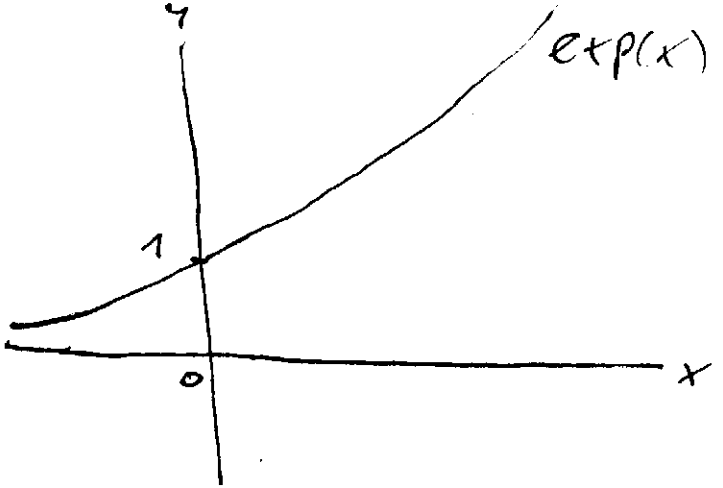
logaritmická funkce

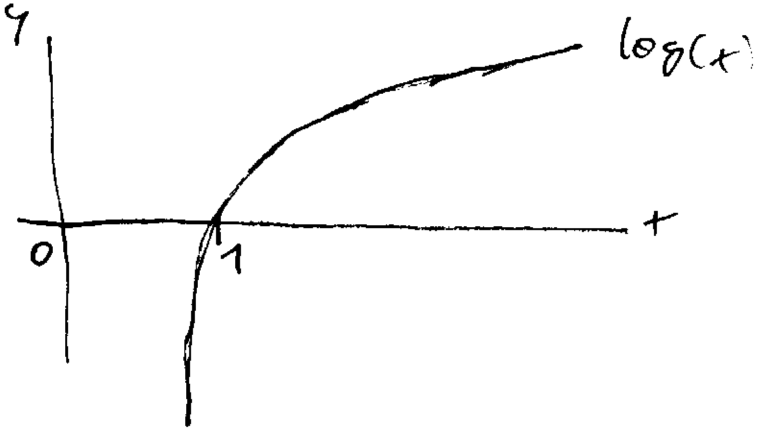
$\log(x) : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definujeme jako inverzní funkci k exponenciále:

$\log(x) := \exp(x)^{\langle -1 \rangle}$. **Vlastnosti:**

- $\log(x)$ je rostoucí – jasné z definice
- $\forall\, x,y \in (0,+\infty) : \log(xy) = \log x + \log y$
  - $x = \exp(\alpha)$, $y = \exp(\beta)$ (víme, že α a β jsou určené jednoznačně)

    $\rightsquigarrow\ xy = \exp(\alpha)\exp(\beta) = \exp(\alpha+\beta) \rightsquigarrow \log(xy) = \alpha+\beta = \log x + \log y$.
- $\log(x)$ je spojitá na ~~$\mathbb{R}$~~ $(0,+\infty)$ – podle V. 3.9.
- $\log((0,+\infty)) = \mathbb{R}$ – plyne z Darbouxovy věty a z $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty$.





• $\log(1)=0$ • $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=1$ – z $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\exp(y)-1}{y}=1$,

$x=\exp(y)$, $\log x = y$, $x\to 1 \Rightarrow y\to 0$ (spojitost log), $\frac{\log x}{x-1}=\frac{y}{\exp(y)-1}$.

<u>Obecná mocnina a^b</u>, kde $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$

$\boxed{a^b := \exp(b\cdot\log(a)).}$ Je to rozšíření ~~z~~ mocniny s rac. exponentem $\underset{\in\mathbb{Q}}{b=p/q}$, $a^{p/q}=\sqrt[q]{\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{p}}$

$\alpha=\exp(\frac{1}{q}\log(a))=a^{1/q}$ ($b=1/q$)

$\underset{q\in\mathbb{N}}{\alpha^q}=\exp(\frac{1}{q}\log(a))^q=\exp(\log(a))=a.$

Vlastnosti obecné mocniny a^b

1^0 a pevné : b probíhá $\mathbb{R}$

a^b — rostoucí ... pro $a>1$
— konst. ... $a=1$
— klesající .. $0<a<1$

$b\in\mathbb{R}$ pevné, a probíhá $(0,+\infty)$

a^b — rostoucí ... $b>0$
— konst. ... $b=0$
— klesající ... $b<0$

– plyne z definice a^b.

- při pevném a je a^b spojitá funkce b a při pevném b to je spojitá funkce a. – plyne ze spojitosti exp, log a spojitosti složené funkce

- $a^b = \lim\limits_{\substack{\beta\to b \\ \beta\in\mathbb{Q}}} a^\beta$. | $60^{-\pi} \leftarrow 60^{-3}, 60^{-3.1}, 60^{-3.14}, 60^{-3.141}, 60^{-3.1415}, \dots$

Tvrzení 3.11

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty$ pro $\forall \alpha\in\mathbb{R}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^\varepsilon} = 0$ pro $\forall \varepsilon \in (0,+\infty)$.

D. (jevidět z násl. věty) $\boxtimes$

$\boxed{\text{Věta 3.12.}}$ (exponenciála zadaná nekonečnou řadou)

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{pro } \forall x \in \mathbb{R}.$$

D. Řada abs. konverguje pro $\forall x \in \mathbb{R}$ podle podílového kritéria ∼∼∼ .

$$\frac{(x+y)^n}{n!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{binomická} \\ \text{věta}}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

⇝ ~~$\exp(x)\cdot\exp(y)=\exp(x+y)$~~ funkce $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ splňuje identitu $f(x)f(y) = f(x+y)$ ∼∼∼ . Pomocí Cauchyova součinu řad - tabule.

Dále $f(x) \geq 1 + x$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ ∼∼∼ . Takže $f(x) = \exp(x)$

☒

$e = \exp(1)$

Závěr:

$$\boxed{e^x = \exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad \text{pro } \forall x\in\mathbb{R}}$$

Věta 3.13 e je iracionální číslo, tj. $e \notin \mathbb{Q}$.

D. Plyne to z $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^n}{n!} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$.

tabule

$\square$

$\frac{\log 2}{\log 3} \notin \mathbb{Q}$ rovněž, neboť

$\left(e^{\log 3}\right)^{\log 2/\log 3}$

$\frac{\log 2}{\log 3} = \log_3 2$

$3^{\log 2/\log 3} = e^{(\log 2/\log 3)\cdot\log 3} = e^{\log 2} = 2$

ale $3^{p/q} = 2$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, nelze, protože $3^p = 2^q$ nelze (kromě $p = q = 0$). $p, q \in \mathbb{Z}$