Věta 3.7 (Darbouxova, o nabývání mezihodnot)

Nechť $-\infty < a \le b < +\infty$ a $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a,b]$. Pak

$f(a) \le c \le f(b) \Rightarrow$ existuje $\alpha \in [a,b]$, že $f(\alpha) = c$. $\quad a \in A$

D. ~~A~~ $\underline{\text{Búno } f(a) < c < f(b)}$. Nechť $A = \{z \in [a,b] : f(z) < c\}$. Položíme $\alpha = \sup(A)$ a ukážeme, že $f(\alpha) = c$. $\quad \alpha + \delta \in A$

patrně $a < \alpha < b$. Kdyby $f(\alpha) < c$, pak i $f(\alpha+\delta) < c$ pro nějaké $\delta > 0$ – spor

Kdyby $f(\alpha) > c$, pak ex. $\delta > 0$, že $\forall x \in (\alpha - \delta, \alpha] : f(x) > c$ – spor. ☒

Důsledek (spojitá funkce(interval) = interval)

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a $f: J \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak i obraz $f(J) = \{f(x) : x \in J\}$ je interval.

D. Co je to interval? $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $M = \begin{cases} (-\infty, a) ; (-\infty, a] \\ (a, +\infty) ; [a, +\infty) \\ (a,b), [a,b] \\ [a,b), (a,b] \end{cases}$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$

$M \subset \mathbb{R}$

M je interval $\iff \forall x, y \in M : x \le \underset{\mathbb{R}}{\hat{z}} \le y \Rightarrow z \in M$.

(konvexita)

$\Rightarrow$ je jasná. $\Leftarrow$: Nechť je M konvexní. Položme $a = \inf(M)$, $b = \sup(M)$. Pak máme, že $\underbrace{(a,b) \subset M \subset [a,b]}_{\text{(tabule)}} \rightsquigarrow M$ je interval podle definice.

Z pět k důsledku. Nechť $x, y \in f(J)$ a $x \leq z \leq y$. Takže $x = f(\alpha)$, $y = f(\beta)$, kde $\alpha, \beta \in J$. Búno $\alpha \leq \beta$ (případ $\alpha > \beta$ je podobný). Máme $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ spojitá, $f(\alpha) \leq z \leq f(\beta) \xrightarrow[\text{V. 3.7}]{} \exists \gamma \in [\alpha, \beta]: f(\gamma) = z$.

Takže: $z \in f(J) \rightsquigarrow f(J)$ je interval. $\boxtimes$

$f: M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$. Funkce f nabývá v bodě $a \in M$

- maxima (na M): $\forall x \in M: f(x) \leq f(a)$
- minima (na M): — ‖ — $f(x) \geq f(a)$
- ostrého maxima (na M): ~~$\forall x$~~ $f(x) < f(a)$
- ostrého minima (na M): ~~$\forall x$~~ $f(x) > f(a)$

- lokálního maxima (na M): $\exists \delta > 0 \ \forall x \in M \cap U(a, \delta): f(x) \leq f(a)$
- lok. minima atd. podobně

Věta 3.8 (spojitá funkce nabývá maxima i minima)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá. Potom f nabývá na $[a,b]$ svého maxima i minima.

D. Pro maximum (minimum podobně). Pomocí Heineho V a věty Bolzano & Weierstrass, tabule. ☒

Poznámka Neplatí pro nespojité funkce a neplatí pro jiné typy intervalů $(a,b]$; $(-\infty, a]$ apod. $[a,b]$ … uzavřený a omezený interval

kompaktní interval

Příklady: tabule.

Důsledek $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá $(a, b \in \mathbb{R}, a \leq b) \Rightarrow f$ je omezená

D. $\forall y \in [a,b]$ máme, že $\min\limits_{x \in [a,b]} f(x) \leq f(y) \leq \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. ☒

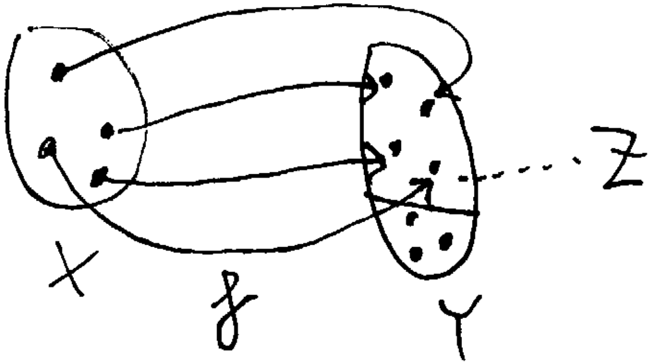
Příklady

obecně

- neplatí pro nespojité funkce
- neplatí pro jiné typy intervalů.

tabule: .

Připomeňme si, že pro prostou (injektivní) funkci $f: X \to Y$ (tj. $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$) máme na $Z = f(X) \subset Y$ definovanou inverzní funkci $f^{-1}: Z \to X$, kde $f^{-1}(z) = x \iff f(x) = z$.



f^{-1} dostaneme otočením šipek.

$\boxed{\text{Věta 3.9}}$ (O inverzní funkci) $J \subset \mathbb{R}$ buď interval, $f: J \to \mathbb{R}$ buď spojitá a rostoucí (klesající). Potom $f^{-1}: K \to \mathbb{R}$ je též spojitá a rostoucí (klesající); K je interval $f(J)$.

D. f buď klesající (pro rostoucí podobně)

Pomocí obrázku:

tabule ~~~~~~~~ .

$\boxtimes$

Nebo pomocí lemmatu:

$\boxed{\text{Lemma}}$ $J \subset \mathbb{R}$ interval, $f: J \to \mathbb{R}$ rostoucí (klesající), $f(J)$ též interval.
Potom je f spojitá na intervalu J. D. ~~~~~~ ⊠

Nyní máme ~~..~~ $f: J \to \mathbb{R}$ spojitá ~~..~~ a rostoucí, J interval.
$\leadsto f^{-1}: f(J) \to \mathbb{R}$ je rostoucí. Víme (~~..~~ důsledek V. 3.7), že $f(J)$ je interval. Ale $f^{-1}(f(J)) = J$ je interval $\leadsto f^{-1}$ spojitá podle lemmatu. ⊠

Shrnutí: Které operace s funkcemi zachovávají spojitost?
~~......~~ $f, g: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ spojité v a
$\Rightarrow f+g,\ fg,\ \frac{f}{g}\ (g(a) \neq 0)$ spojité v a.

$\left.\begin{array}{ll} g: U(a,\delta) \to \mathbb{R}, & f: U(g(a),\delta) \to \mathbb{R} \\ \text{spojitá v } a & \text{, spojitá v } g(a) \end{array}\right\} \Rightarrow f(g(x))$ spojitá v a*.

$f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ spojitá & rost. (kles.) $\Rightarrow f^{-1}$ spojitá v $f(a)$.