

Přednáška 9, 27. listopadu 2013

Důsledek. *Nechť má $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kladný poloměr konvergence $R > 0$. Pak i mocninné řady*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \quad a \quad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

mají poloměr konvergence R , a na intervalu $(-R, R)$ jimi určené funkce (tj. jejich součty) splňují, že $g = \int f$ a $h = f'$.

Důkaz. Že poloměry obou nových moc. řad zůstávají rovny R plyne z Hadamardova vzorce a z limity $\lim n^{1/n} = 1$. Že $g = \int f$ a $h = f'$ plyne z věty o výměně sumace a integrálu a věty o výměně sumace a derivace, díky lokálně stejnoměrné konvergenci moc. řady na poloměru konvergence. \square

Funkce f daná mocninnou řadou tedy má na intervalu konvergence primitivní funkci i derivaci (speciálně je f spojitá), a tyto funkce jsou opět dané mocninnými řadami, které vzniknou z původní mocninné řady integrací popřípadě derivací člen po členu. Totéž (tj. derivování člen po členu) můžeme udělat i s řadou pro f' a tak dál. Vidíme, že funkce f daná mocninnou řadou má na intervalu konvergence derivace všech řádů, opět dané mocninnými řadami, jež vzniknou postupnou derivací člen po členu mocninné řady pro f a mají stejný poloměr konvergence. Odtud plyne, že třeba funkci f definovanou jako $f(x) = 0$ pro $x \leq 0$ a $f(x) = x^2$ pro $x \geq 0$, nelze na žádném okolí nuly vyjádřit mocninnou řadou: $f''(0)$ neexistuje.

Věta (Abelova, o mocninné řadě). *Nechť má $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kladný a konečný poloměr konvergence R a tato mocninná řada konverguje v $x = R$. Pak*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow na [0, R] \quad a \quad \lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n .$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti buď $R = 1$ (proč? — úloha 1). Pro $x \in [0, 1]$ a indexy $n \geq m$ odhadneme velikost úsekového součtu

$$S_{m,n}(x) := a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \dots + a_n x^n .$$

Ukážeme, že pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0 , že pro každé indexy $n \geq m \geq n_0$ a každé $x \in [0, 1]$ je $|S_{m,n}(x)| < \varepsilon$. To znamená, že $\sum a_n x^n$ splňuje na $[0, 1]$ stejnoměrnou B.-C. podmínku, tedy $\sum a_n x^n \rightrightarrows$ na $[0, 1]$ a (podle věty z minulé přednášky) lze vyměnit sumu a limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

což chceme dokázat.

Označíme si $A_{m,n} := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$ a $A_{n+1,n} := 0$. Pak, díky rovnosti $a_k = A_{k,n} - A_{k+1,n}$ pro $m \leq k \leq n$, trojúhelníkové nerovnosti a nezápornosti $x^{k+1} - x^k$ pro $m \leq k < n$ a $x \in [0, 1]$, máme

$$\begin{aligned} |S_{m,n}(x)| &= \left| \sum_{k=m}^n (A_{k,n} - A_{k+1,n}) x^k \right| \\ &= \left| A_{m,n} x^m + \sum_{k=m+1}^n A_{k,n} (x^k - x^{k-1}) \right| \\ &\leq |A_{m,n}| x^m + |A_{m+1,n}| (x^{m+1} - x^m) + \dots + |A_{n,n}| (x^n - x^{n-1}) \\ &\leq \max(|A_{m,n}|, |A_{m+1,n}|, \dots, |A_{n,n}|) \cdot \left(x^m + \sum_{k=m+1}^n (x^k - x^{k-1}) \right) \\ &= \max(|A_{m,n}|, |A_{m+1,n}|, \dots, |A_{n,n}|) \cdot x^n \\ &\leq \max(|A_{m,n}|, |A_{m+1,n}|, \dots, |A_{n,n}|). \end{aligned}$$

Podle předpokladu řada čísel $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ konverguje, takže (podle Cauchyho podmínky pro řady čísel) pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0 , že $|A_{k,n}| < \varepsilon$ pro každé dva indexy $n \geq k \geq n_0$. Předchozí maximum je tedy pro $n \geq m \geq n_0$ menší než ε (bez ohledu na hodnotu x) a jsme hotovi. \square

Příklad. Sečteme řadu $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, která neabsolutně konverguje podle Leibnizova kritéria. Podle Abelovy věty a podle Taylorova rozvoje logaritmu máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \log(1+x) = \log 2.$$

Řada má proto součet $\log 2$. Stejnou metodou lze sečíst i spoustu dalších nekonečných číselných řad (úlohy 2, 3, 4 a 5).

Fourierovy řady. *Trigonometrickou řadou* rozumíme nekonečnou řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) ,$$

kde a_0, a_1, \dots a b_1, b_2, \dots jsou reálné koeficienty a proměnná x probíhá \mathbb{R} . Pro danou funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prozkoumáme otázku, kdy se dá vyjádřit součtem takové řady funkcí a jaké povahy je konvergence. Ve srovnání s mocninnými řadami lze trigonometrickými řadami vyjádřit širší třídu funkcí. Jak jsme viděli, součet mocninné řady s kladným poloměrem konvergence je spojitá funkce, která má na intervalu konvergence derivace všech řádů. Funkce, která v nějakém bodě nemá derivaci vůbec nebo ji nemá vlastní (např. $|x|$ na intervalu $(-1, 1)$), neřkuli nespojitá funkce, se proto nedá vyjádřit součtem mocninné řady. Uvidíme, že mnoho takových funkcí — třeba zmíněná $|x|$ na intervalu $(-1, 1)$ nebo i různé nespojité funkce — lze vyjádřit součtem vhodné trigonometrické řady, tzv. *Fourierovy řady* dané funkce.

Protože $\cos(nx)$ a $\sin(nx)$ jsou 2π -periodické funkce, je jasné, že každý bodový součet trigonometrické řady je také 2π -periodická funkce. Každá 2π -periodická funkce f je jednoznačně určena svými hodnotami na intervalu $[-\pi, \pi)$ nebo jakémkoli jiném intervalu tvaru $[a, a + 2\pi)$.

Pro $f, g \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, což jsou funkce s Riemannovým integrálem na intervalu $[-\pi, \pi]$, definujeme značení

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f g .$$

Z vlastností integrálu snadno plyne, že pro každé $f_1, f_2, g \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ a každé $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ platí:

- (symetrie) $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_2, f_1 \rangle$;
- (bilinearita) $\langle a_1 f_1 + a_2 f_2, g \rangle = a_1 \langle f_1, g \rangle + a_2 \langle f_2, g \rangle$ a stejně (díky symetrii) ve druhé souřadnici;
- (pozitivní semidefinitnost) $\langle g, g \rangle \geq 0$.

Máme tak skoro všechny vlastnosti skalárního součinu, kromě $\langle g, g \rangle = 0 \Rightarrow g = 0$, která není splněna, protože z nulovosti integrálu neplyne nulovost integrandu, i když je nezáporný.

Tvrzení (ortogonální systém sinů a cosinů). Pro každá dvě čísla $m, n \in \mathbb{N}_0$ máme

$$\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle = 0 .$$

Pro každá dvě čísla $m, n \in \mathbb{N}_0$, pokud nejsou současně nulová, máme

$$\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = \begin{cases} \pi & \text{pro } m = n \\ 0 & \text{pro } m \neq n . \end{cases}$$

Pro $m = n = 0$ máme $\langle \sin(0x), \sin(0x) \rangle = 0$ a $\langle \cos(0x), \cos(0x) \rangle = 2\pi$.

Důkaz. Příště. □

Fourierovy koeficienty a_0, a_1, \dots a b_1, b_2, \dots funkce $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ jsou definovány jako

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\langle f, \cos(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{\langle f, \sin(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Proč jsou tak definované? Předpokládejme, že funkce $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ je na $[-\pi, \pi]$ stejnoměrným součtem trigonometrické řady

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) .$$

Z vlastností součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ plyne, že pak a_n a b_n musejí být rovny Fourierovým koeficientům funkce f . Například, pro $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} \langle f, \cos(kx) \rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \cos(kx) \right\rangle \\ &= (a_0/2) \langle \cos(0x), \cos(kx) \rangle \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \langle \cos(nx), \cos(kx) \rangle + b_n \langle \sin(nx), \cos(kx) \rangle) \\ &= a_k \langle \cos(kx), \cos(kx) \rangle \text{ pro } k > 0 \\ &\quad \text{a } (a_0/2) \langle \cos(0x), \cos(0x) \rangle \text{ pro } k = 0 \\ &= \pi a_k , \end{aligned}$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili stejnoměrnou konvergenci (umožňující zaměnit pořadí integrace a nekonečné sumace podle věty z minulé přednášky) a vlastnosti skalárního součinu a ve třetí a čtvrté rovnosti jsme použili předchozí tvrzení. Takže $a_k = \langle f, \cos(kx) \rangle / \pi$ a podobně pro b_k , $k \in \mathbb{N}$.

Fourierovou řadou funkce $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ rozumíme trigonometrickou řadu, jejíž koeficienty a_n a b_n jsou rovny Fourierovým koeficientům funkce f . Jak jsme viděli, pokud nějaká trigonometrická řada stejnoměrně konverguje k f , musí to být její Fourierova řada. Ukážeme postačující podmínky na funkci f , aby její Fourierova řada k ní konvergovala.

Věta (B. nerovnost a R.-L. lemma). *Nechť $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ a čísla $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ jsou Fourierovy koeficienty funkce f .*

1. (*Besselova nerovnost*). *Platí nerovnost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{\langle f, f \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

Tedy řada čtverců Fourierových koeficientů funkce f konverguje.

2. (*Riemannovo-Lebesgueovo lemma*). *Pro $n \rightarrow \infty$ platí, že $a_n \rightarrow 0$ a $b_n \rightarrow 0$, tedy*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

Důkaz. Příště. Nicméně je jasné, že $1 \Rightarrow 2$: z konvergence řady čísel $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ plyne, že $a_n^2, b_n^2 \rightarrow 0$, tedy $a_n, b_n \rightarrow 0$. \square

Úlohy

- Proč můžeme v důkazu Abelovy věty předpokládat, že poloměr konvergence dané mocninné řady je 1?
- Z $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ odvoďte, že $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$
-

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = ???$$

(A co $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$?)

4.
$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots = ???$$

5.
$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} - \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots = ???$$

6. Pro x v okolí $\frac{1}{2}$ funkci

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

(střed $x_0 = 0$) vyjádřete součtem mocninné řady se středem v $x_0 = \frac{1}{2}$. Jaké jsou poloměry konvergence obou mocninných řad? Na jakém intervalu platí obě vyjádření funkce $f(x)$?

7. Dokažte, že funkce $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ je definovaná na $(1, +\infty)$ a má tam derivace všech řádů.

8. Nalezněte poloměr konvergence následující mocninné řady. Jak je to s konvergencí v krajních bodech intervalu konvergence? Návod: Stirlinova aproximace faktoriálu.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n .$$