Přednáška 8, 20. listopadu 2013

Řady funkcí. Pro funkce $f_n : M \to \mathbb{R}$ symbol nekonečné řady (nekonečného součtu)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

chápeme stejně jako v případě číselných řad: jako způsob zápisu posloupnosti částečných součtů $(s_n) = (f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \dots)$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f \quad \text{na} \quad M$$

chápeme jako $s_n = f_1 + \cdots + f_n \rightrightarrows f$ na M. Podobně pro bodovou a lokální konvergenci a pro zápisy typu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$.

Následující tři věty pro řady funkcí plynou snadno z odpovídajících vět pro posloupnosti funkcí.

Věta (výměna sumy a limity v bodě). *Rovnost*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)$$

platí za těchto předpokladů: pro nějaké $\delta > 0$ máme $f_n : P(x_0, \delta) \to \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje vlastní limita $\lim_{x \to x_0} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $P(x_0, \delta)$.

Odtud plyne, že lokálně stejnoměrný součet spojitých funkcí je spojitá funkce.

Věta (výměna sumy a $\int$). *Rovnost*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)$$

platí za těchto předpokladů: pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $[a, b]$.

Věta (výměna sumy a d/dx). *Nechť $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots$, je posloupnost funkcí definovaná na omezeném otevřeném intervalu. Předpokládáme, že každá funkce f_n má na (a,b) vlastní derivaci, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ na (a,b) a že řada čísel $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje pro alespoň jeden bod $x_0 \in (a,b)$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b) pro nějakou funkci $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $f' = g$ na (a,b).*

Ze silnějšího předpokladu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows g$ na (a,b) plyne opět i $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na (a,b).

Věta (kritéria stejnoměrné konvergence řad).

1. *(Weierstrassovo kritérium) Nechť $f_n : M \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots$, jsou takové funkce, že řada nezáporných čísel*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x)|$$
konverguje. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M.

2. *(Důsledek Diniho věty) Jsou-li funkce $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ na kompaktním intervalu $[a,b]$ spojité a nezáporné a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f$ na $[a,b]$, kde f je též spojitá, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$.*

Důkaz. 1. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x)|$ konverguje, splňuje Cauchyovu podmínku pro číselné řady a existuje n_0, že pro každé $n \geq m > n_0$ máme
$$\sum_{i=m+1}^{n} \sup_{x\in M} |f_i(x)| < \varepsilon .$$
Pak ale pro každé $n \geq m > n_0$ a každé $x \in M$ máme
$$\begin{aligned} |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \cdots + f_n(x)| &\leq |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \cdots + |f_n(x)| \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{n} \sup_{x\in M} |f_i(x)| \\ &< \varepsilon . \end{aligned}$$

Posloupnost částečných součtů $(f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \ldots)$ tedy splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku a proto $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M.

2. Plyne použitím Diniho věty (část 2 tvrzení z předminulé přednášky) na posloupnost částečných součtů. $\square$

Následující zobecnění kritérií pro neabsolutní konvergenci číselných řad na řady funkcí jsem na přednášce pouze zmínil a v úplnosti ho uvádím zde.

Věta (Abelovo a Dirichletovo kritérium). *Buďte dány dvě posloupnosti funkcí $f_n, g_n : M \to \mathbb{R}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na M, když jsou splněny podmínky 1 nebo podmínky 2.*

1. *(Abelovo kritérium) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M; existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$ platí $|g_n(x)| < c$ (říkáme, že posloupnost (g_n) je stejně omezená); pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $(g_n(x))$ monotónní.*

2. *(Dirichletovo kriterium) existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$ platí $|f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)| < c$ (říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ má stejně omezené částečné součty); $g_n \rightrightarrows 0$ na M; pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $(g_n(x))$ monotónní.*

Důkaz. Nebudeme dělat. $\square$

Příklady. 1. Odvodíme jiným způsobem Taylorův rozvoj logaritmu. Podle Weierstrassova kritéria

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \rightrightarrows \quad \text{na } [-r, r] \text{ pro každé } 0 < r < 1.$$

Geometrickou řadu tedy můžeme (podle věty o výměně sumy a $\int$) integrovat člen po členu:

$$\begin{aligned} \log(1/(1-r)) &= \int_0^r \frac{dx}{1-x} = \int_0^r \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^r x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1} \,. \end{aligned}$$

Takže

$$\log(1/(1-r)) = r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} + \ldots, \ r \in (-1, 1) \,.$$

2. Podle Weierstrassova kritéria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightrightarrows \quad \text{na } [-R, R] \text{ pro každé } 0 < R\ .$$

Formálním zderivováním člen po členu dostáváme stejnou řadu, protože $(x^n/n!)' = x^{n-1}/(n-1)!$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $(x^0/0!)' = 0$. Podle věty o výměně sumy a derivace se tedy funkce, jež je (lokálně stejnoměrným) součtem této řady na $\mathbb{R}$, rovná své vlastní derivaci. Tato funkce je ovšem e^x, takže jsme jiným způsobem dokázali základní vlastnost exponenciály $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

3. Opět podle Weierstrassova kritéria,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \cos((32)^n \pi x) \rightrightarrows \quad \text{na } \mathbb{R}\ .$$

Z věty o výměně sumy a limity v bodě plyne, že součtem řady je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je všude spojitá. Na druhou stranu se dá ale dokázat (nebudeme to zde dělat), že tato funkce pro žádné $x \in \mathbb{R}$ nemá derivaci.

Mocninné řady. *Mocninnou řadou* rozumíme nekonečnou řadu funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\ .$$

Čísla $a_n \in \mathbb{R}$ jsou *koeficienty* a číslo $x_0 \in \mathbb{R}$ je *střed* mocninné řady. Pro jednoduchost značení se v dalším omezíme na mocninné řady se středem v nule, tedy na řady tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ .$$

Všechny výsledky se ale jednoduše přenášejí na řady s obecným středem.

Věta (o poloměru konvergence m. řady). *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ buď mocninná řada a $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ (R je nezáporné reálné číslo nebo $+\infty$) buď definováno vztahem*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \quad (\textit{kde } 1/0 = +\infty \textit{ a } 1/+\infty = 0)\ .$$

Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ s $|x| < R$ mocninná řada absolutně konverguje a pro každé $x \in \mathbb{R}$ s $|x| > R$ mocninná řada diverguje.

Důkaz. Nechť nejprve $0 < R < +\infty$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{|x|}{R} \ .$$

Podle Cauchyova odmocninového kritéria z MA I vidíme, že mocninná řada pro $|x| < R$ absolutně konverguje a pro $|x| > R$ diverguje. Pokud $R = +\infty$, je $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0 \ .$$

Podle Cauchyova odmocninového kritéria mocninná řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pokud $R = 0$, je $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty$ a pro každé $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ máme

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty \ .$$

Mocninná řada tedy pro každé $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ diverguje □

Číslu R říkáme *poloměr konvergence mocninné řady* a intervalu $(-R, R)$ *interval konvergence.* Pro $R = 0$ je interval konvergence prázdný, ovšem každá mocninná řada konverguje pro $x = 0$ (k součtu a_0). Pro $|x| = R$, to jest $x = \pm R$, věta o konvergenci neříká nic (viz úloha 5).

Příklady poloměrů konvergence. Mocninné řady $\sum x^n$, $\sum (n^3 - n^2 + 1) x^n$ a $\sum x^n/n^2$ mají všechny poloměr konvergence rovný 1. Mocninná rada definující exponenciálu, $\sum x^n/n!$, má poloměr konvergence rovný $+\infty$. Naopak

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

má poloměr konvergence rovný nule.

Tvrzení (lok. stejn. konvergence m. řady). *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Potom*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{loc}{\rightrightarrows} \quad \textit{na } (-R, R) \ .$$

Ekvivalentně řečeno (viz část 1 tvrzení z předminulé přednášky), mocninná řada stejnoměrně konverguje na každém kompaktním podintervalu intervalu konvergence.

Důkaz. Stačí se omezit na kompaktní podintervaly $[-S, S]$, kde $0 < S < R$. Na $[-S, S]$ máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n x^n\|_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| S^n \ .$$

Cauchyovo odmocninové kritérium opět dává konvergenci této číselné řady (vzhledem k $\limsup |a_n S^n|^{1/n} = S/R < 1$), takže podle Weierstrassova kritéria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows$ na $[-S, S]$. □

Úlohy

1. Ano nebo ne: když $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} \rightrightarrows$ na M.

2. Ano nebo ne: když $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M podle Weierstrassova kritéria, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} \rightrightarrows$ na M podle Weierstrassova kritéria.

3. Platí následující obrácení Weierstrassova kritéria? Když $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je taková posloupnost funkcí, že $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty$, potom řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nekonverguje na $\mathbb{R}$ stejnoměrně.

4. Ano nebo ne: existují dvě mocninné řady $\sum a_n x^n$ a $\sum b_n x^n$ lišící se jen v konečně mnoha koeficientech, které mají různé poloměry konvergence.

5. Uveďte 4 příklady mocninných řad $\sum a_n x^n$ s poloměrem konvergence R, $0 < R < +\infty$, odpovídající čtyřem možnostem (ne)konvergence ve dvou bodech $x = -R$ a $x = R$.

6. Nechť $\sum a_n x^n$ a $\sum b_n x^n$ jsou mocninné řady s poloměry konvergence R a S, a $\sum (a_n + b_n) x^n$ má poloměr konvergence T. Jaká platí nerovnost mezi čísly R, S a T?

7. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Jak to je s konvergencí v krajních bodech intervalu konvergence?

   (a) $\sum_{n \geq 1} x^n / n$.

(b) $\sum_{n\geq 0} 4^n x^{2n}$.

(c) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n2^n}$.