Přednáška 6, 6. listopadu 2013

Kapitola 2. Posloupnosti a řady funkcí.

V dalším jsou $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, reálné funkce jedné reálné proměnné definované na (neprázdné) množině $M \subset \mathbb{R}$. Co to znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad \text{popřípadě} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \ ?$$

Zavedeme tři druhy konvergence posloupností a řad funkcí. Začneme posloupnostmi a k řadám se dostaneme později.

- **bodová konvergence.** Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) *bodově konverguje* k funkci f na množině M, symbolicky

  $$f_n \to f \text{ na } M\ ,$$

  když pro každé $x \in M$ máme rovnost $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Explicitně,

  $$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in M\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ .$$

- **stejnoměrná konvergence.** Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) *stejnoměrně konverguje* k funkci f na množině M, symbolicky

  $$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M\ ,$$

  když

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n > n_0,\ x \in M \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ .$$

- **lokálně stejnoměrná konvergence.** Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) *lokálně stejnoměrně konverguje* k funkci f na množině M, symbolicky

  $$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \text{ na } M\ ,$$

  když každé $x \in M$ má okolí $U = (x - \delta, x + \delta)$, kde $\delta > 0$ může záviset na x, že $f_n \rightrightarrows f$ na $M \cap U$.

Je podstatný rozdíl mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí. V bodové konvergenci pro dané $\varepsilon > 0$ může n_0 záviset na bodu x, v němž konvergenci posloupnosti funkčních hodnot $(f_n(x))$ uvažujeme. Ve stejnoměrné konvergenci však pro dané $\varepsilon > 0$ index n_0 na x záviset nesmí, jediné n_0 musí fungovat pro všechny body $x \in M$.

Nejsilnější z těchto pojmů je stejnoměrná konvergence, lokálně stejnoměrná konvergence je prostřední a bodová konvergence je nejslabší: z definic plyne, že

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \ \Rightarrow\ f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \text{ na } M \ \Rightarrow\ f_n \to f \text{ na } M \ .$$

Stejnoměrná konvergence je víceméně konvergence v supremové metrice: $f_n \rightrightarrows f$ na $M \iff \lim d(f_n, f) = 0$, kde $d(\cdot,\cdot)$ je supremová metrika na množině funkce reálných funkcí definovaných na množině M. „Víceméně“ proto, že teď, narozdíl od definice metriky, povolujeme i neomezené funkce a tedy můžme dostat i vzdálenost $+\infty$.

Příklady. 1. Nechť $M = [0,1]$ a $f_n = x^n$. Posloupnost funkcí (f_n) konverguje na intervalu $[0,1]$ bodově k funkci f dané předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0,1) \ , \\ 1 & \text{pro } x = 1 \ . \end{cases}$$

Je to stejnoměrná konvergence? Není. Položíme $a_n = 1 - 1/n \in M$. Pak

$$f_n(a_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to 1/e,\ n \to \infty \ .$$

Pro každé n jsme nalezli v množině M „špatný“ bod a_n splňující pro každé $n > n_0$, že

$$|f_n(a_n) - f(a_n)| = f_n(a_n) > 1/2e > 1/6 \ ,$$

což vylučuje stejnoměrnou konvergenci. Konvergence není ani lokálně stejnoměrná. Body a_n zleva limití k 1, a tento bod tak nemá okolí U, na němž by $f_n \rightrightarrows f$.

Jiné zdůvodnění, proč zde konvergence není stejnoměrná, je následující. Na minulé přednášce jsme fakticky dokázali, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je opět spojitá funkce. Zde ovšem limitní funkce f není na M spojitá (není spojitá v bodě 1), ačkoli každá funkce f_n spojitá je. Takže konvergence není stejnoměrná.

Jak se konvergence této posloupnosti funkcí změní, když interval $M = [0,1]$ zmenšíme, třeba na $M = [0, 1-\delta]$ pro pevné $\delta > 0$? Pro každé $x \in [0, 1-\delta]$ máme $0 \le f_n(x) = x^n \le (1-\delta)^n$. Protože $(1-\delta)^n \to 0$ pro $n \to \infty$, dostáváme horní odhad $|f_n(x) - f(x)|$, který jde k nule pro $n \to \infty$ a nezávisí na $x \in [0, 1-\delta]$. Takže

$$f_n \rightrightarrows f \ \text{ na } \ M = [0, 1-\delta] \ .$$

Pro $M = [0,1)$ konvergence stejnoměrná není, kvůli bodům a_n, ale je lokálně stejnoměrná, protože každý bod $a \in [0,1)$ je obsažen v intervalu typu $M = [0, 1-\delta]$ s $\delta > 0$, totiž v $[0, a]$.

2. Posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$$

na množině $M = \mathbb{R}$ bodově konverguje k identicky nulové funkci $f \equiv 0$. Špatné body $a_n = 1/n$, v nichž $f_n(a_n) = f_n(1/n) = 1/2$, jdou v limitě k nule. Konvergence není proto ani lokálně stejnoměrná. Je lokálně stejnoměrná na každé množině M, která neobsahuje nulu. Rozmyslete si, že na každé množině $M \subset \mathbb{R}$, která neobsahuje nějaké okolí nuly, je konvergence stejnoměrná.

3. Platí, že

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \rightrightarrows 0 \ \text{ na } M = \mathbb{R} \ ,$$

protože $|f_n(x)| \le 1/n$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Pro funkci $f: \ M \to \mathbb{R}$ definujeme označení

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in M} |f(x)|$$

— „el-nekonečno norma“. Hodnota normy může být i $+\infty$. Z definice plyne, že $\|cf\|_\infty = |c| \cdot \|f\|_\infty$ pro každou konstantu $c \in \mathbb{R}$ a že platí trojúhelníková nerovnost $\|f + g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Z definice stejnoměrné spojitosti a z předchozích příkladů by mělo být jasné, že

$$f_n \rightrightarrows f \ \text{ na } \ M \iff \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \ .$$

Tvrzení (stejnoměrná Bolzanova–Cauchyova podmínka). *Posloupnost funkcí (f_n) konverguje na množině M stejnoměrně k nějaké funkci f, právě když je splněna podmínka*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ m, n > n_0, \ x \in M \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \ .$$

Říkáme jí (stejnoměrná) Bolzanova–Cauchyova podmínka.

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na M. Pro dané $\varepsilon > 0$ tedy máme n_0, že $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro každé $n > n_0$ a každé $x \in M$. Pro každé $m, n > n_0$ a $x \in M$ tak (díky trojúhelníkové nerovnosti) máme

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\ .$$

Je tedy splněna B.–C. podmínka.

Opačnou implikaci $\Leftarrow$ jsme dokázali již na minulé přednášce. Nechť posloupnost funkcí (f_n) splňuje B.–C. podmínku. To znamená, že je cauchyovská v supremové metrice, a v tvrzení na předchozí přednásce jsme dokázali, že (f_n) v supremové metrice konverguje k nějaké funkci f, tedy $f_n \rightrightarrows f$ na M. $\square$

Bolzanova–Cauchyova podmínka nám umožňuje testovat stejnoměrnou konvergenci posloupnosti (f_n) bez přítomnosti (a znalosti) limitní funkce f. Když je splněna, můžeme a budeme psát $f_n \rightrightarrows$ na M, resp. $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na M. Poznamenejme ještě, že limitní funkce je samozřejmě určena jednoznačně. Když tedy odněkud víme, že $f_n \to f$ na M a současně podle Bolzanovy–Cauchyovy podmínky víme, že $f_n \rightrightarrows$ na M, automaticky dostáváme $f_n \rightrightarrows f$ na M, a podobně pro lokálně stejnoměrnou konvergenci.

Řekneme, že bodová konvergence $f_n \to f$ na M je *monotónní*, když pro každý bod $a \in M$ je posloupnost čísel $(f_n(a))$ neklesající nebo když pro každý bod $a \in M$ je tato posloupnost nerostoucí.

Tvrzení (situace, kdy $\overset{loc}{\rightrightarrows} \Rightarrow \rightrightarrows$ a $\to \Rightarrow \rightrightarrows$). *Platí následující.*

1. *Když $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na M, potom $f_n \rightrightarrows f$ na každé kompaktní podmnožině $N \subset M$.*

2. *(Diniho věta) Nechť $f_n \to f$ na kompaktní množině M, funkce f_n i f jsou spojité a konvergence je monotónní. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na M.*

Důkaz. 1. Pro $x \in M$ označíme jako $U_x \subset M$ okolí bodu x, na němž $f_n \rightrightarrows f$. Protože N je kompaktní, je pokrytá konečně mnoha okolími U_x: $N \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_k}$. Pro dané ε pak pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ máme index n_i, že pro každé $n \geq n_i$ a $x \in U_{x_i}$ je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Je jasné, že pro $n_0 = \max(n_1, \dots, n_k)$ máme $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$ a $x \in U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_k} \supset N$. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na N.

2. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Množina

$$I_n = \{x \in M \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$$

je otevřená (v M) díky spojitosti fukcí f_n i f. Dále $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$ díky monotonii konvergence $f_n \to f$ na M. A také pro každý bod $a \in M$ existuje index n, že $a \in I_n$, vzhledem k $f_n \to f$ na M. Množiny $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tedy tvoří otevřené pokrytí M. To má díky kompaktnosti M konečné podpokrytí: $M \subset I_{n_1} \cup I_{n_2} \cup \dots \cup I_{n_k}$. Ale $I_n \subset M$ a I_n tvoří monotónní systém, takže $M = I_{n_0}$ pro $n_0 = \max(n_1, \dots, n_k)$, a vlastně $M = I_n$ pro každé $n \geq n_0$. To jest $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro každý index $n \geq n_0$ a každý bod $x \in M$. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na M. $\square$

V následujících třech větách zjistíme, v jakých situacích můžeme zaměňovat pořadí operace limity posloupnosti funkcí s operací limity funkce v bodě, respektive integrování, respektive derivování, to jest, kdy platí rovnosti

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) &= \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\ \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n &= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \\ \lim_{n\to\infty} f_n'(x) &= \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'. \end{aligned}$$

Úlohy

1. Dokažte, že když $f_n \to f$ na konečné množině M, pak $f_n \rightrightarrows f$ na M.
2. Uveďte příklad takové posloupnosti funkcí $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ spojitých na $[0,1]$, že $f_n \to f$ na $[0,1]$, $f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0,1]$ a f je na $[0,1]$ spojitá.
3. Nechť $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$ na M. Rozhodněte, zda $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ na M.
4. Nechť $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$ na M. Rozhodněte, zda $f_n g_n \rightrightarrows fg$ na M.

5. Určete, na jakých intervalech (či podmnožinách) definičních oborů konvergují bodově, stejnoměrně, lokálně stejnoměrně následující posloupnosti funkcí. Jaké jsou limitní funkce?

   (a) $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$, definiční obor je $\mathbb{R}$.
   (b) $f_n(x) = x^n - x^{3n}$, definiční obor je $[0, 1]$.
   (c) $f_n(x) = x^{n+1} - x^{n-1}$, definiční obor je $[0, 1]$.
   (d) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, definiční obor je $\mathbb{R}$.
   (e) $f_n(x) = nx(1 - x)^n$, definiční obor je $[0, 1]$.
   (f) $f_n(x) = \exp(-n^2x^2)$, definiční obor je $\mathbb{R}$.
   (g) $f_n(x) = \exp(-x^2/n)$, definiční obor je $\mathbb{R}$.