Přednáška 5, 30. října 2013

(23. října přednáška odpadla kvůli děkanskému dni)

Úplné metrické prostory. Metrický prostor (M, d) je *úplný*, když každá cauchyovská posloupnost bodů v M konverguje. Explicitně, pro každou posloupnost bodů $(a_n) \subset M$ platí implikace: když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ m, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon\ ,$$

pak

$$\exists a \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon\ .$$

Podmnožina $X \subset M$ *je úplná*, když je podprostor (X, d) úplný.

Kompaktní metrický prostor už je automaticky úplný (úloha 1). Vztah mezi úplností množiny a její uzavřeností popisuje následující tvrzení.

Tvrzení (úplnost versus uzavřenost). *Nechť (M, d) je metrický prostor a $X \subset M$ je jeho podmnožina. Pak a) je-li X úplná, je X uzavřená a b) je-li celý prostor M úplný a X je uzavřená, je X úplná.*

Důkaz. a) Dokážeme kontrapozici implikace a proto předpokládáme, že X není uzavřená: existuje posloupnost $(a_n) \subset X$ s $\lim a_n = a \notin X$. Protože je (a_n) konvergentní (v celém prostoru M), je i cauchyovská. V podprostoru X však (a_n) konvergentní není (kdyby $\lim a_n = b \in X$, měla by (a_n) dvě různé limity, což nelze). Takže X není úplná podmnožina.

b) Předpokládáme, že (M, d) je úplný metrický prostor a $X \subset M$ je uzavřená. Nechť $(a_n) \subset X$ je cauchyovská posloupnost. Pak, díky úplnosti M, existuje $\lim a_n = a \in M$. Protože je X uzavřená, je $a \in X$. Tedy X je úplná podmnožina. $\square$

Stručně: podmnožina úplného metrického prostoru je úplná, právě když je uzavřená. Implikace $\Rightarrow$ platí v každém metrickém prostoru.

Příklady. 1. Euklidovský prostor $\mathbb{R}$ je úplný, každá cauchyovská posloupnost reálných čísel má limitu. Úplné jsou i podprostory $[2, 3]$ a $[-5, +\infty)$, protože jsou uzavřené. Naopak podprostory $\mathbb{Q}$ a $(0, 1]$ nejsou uzavřené a proto nejsou úplné. Obecněji i euklidovské prostory $\mathbb{R}^n$ jsou úplné. Podmnožina $X = (0, 1)$ v euklidovském prostoru $M = (0, 1) \cup (2, 3)$ není úplná (posloupnost $(1/n)$ je cauchyovská, ale nemá (v X) limitu), i když je X uzavřená podmnožina M.

2. Množina $\mathcal{C}[a,b]$ reálných funkcí spojitých na intervalu $[a,b]$ spolu s integrální metrikou tvoří metrický prostor, který není úplný. Sestrojíme cauchyovskou posloupnost bez limity. Položíme $a=-1, b=1$ a uvážíme funkce

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } -1 \le x \le -n^{-1} \\ nx & \text{pro } -n^{-1} \le x \le n^{-1} \\ 1 & \text{pro } n^{-1} \le x \le 1\ . \end{cases}$$

Pak $(f_n) \subset \mathcal{C}[-1,1]$ a (f_n) je cauchyovská, protože pro $m \le n$ máme

$$d(f_m, f_n) = \int_{-1}^{1} |f_m(x) - f_n(x)|\, dx \le \int_{-1/m}^{1/m} 1\, dx = 2/m\ .$$

Hledejme $f \in \mathcal{C}[-1,1]$, že $\lim f_n = f$. Pro každé $x \in [-1,0)$ je nutně $f(x) = \lim f_n(x) = -1$ (jinak bychom měli $d(f,f_n) > c > 0$ pro každé velké n) a podobně pro každé $x \in (0,1]$ je $f(x) = \lim f_n(x) = 1$. Ovšem taková funkce f není spojitá v 0, ať už je hodnota $f(0)$ jakákoli, a neleží tedy v $\mathcal{C}[-1,1]$. Posloupnost (f_n) tedy nemá (v množině funkcí $\mathcal{C}[-1,1]$) limitu.

3. Uvažme euklidovské metrické prostory $\mathbb{R}$ a $(-\pi/2, \pi/2)$. Bijekce

$$f(x) = \arctan(x) :\ \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

je homeomorfismus, f i $f^{-1}(x) = \tan(x) :\ (-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R}$ jsou spojitá zobrazení. Ovšem $\mathbb{R}$ je úplný metrický prostor, ale $(-\pi/2,\pi/2)$ nikoli. Úplnost metrického prostoru není, na rozdíl od kompaktnosti, topologická vlastnost, není určena pouze otevřenými množinami, závisí i na metrice. Nicméně se úplnost zachovává homeomorfismem, který je v obou směrech stejnoměrně spojitý (funkce $\tan x$ není na $(-\pi/2,\pi/2)$ stejnoměrně spojitá).

V kontrastu s příkladem 2 nyní dokážeme, že množina $\mathcal{C}[a,b]$ se supremovou metrikou úplný metrický prostor tvoří.

Tvrzení (úplný prostor omezených funkcí). *Je-li M libovolná množina, pak metrický prostor omezených funkcí $f :\ M \to \mathbb{R}$ se supremovou metrikou je úplný.*

Důkaz. Nechť (f_n), $f_n :\ M \to \mathbb{R}$, je posloupnost funkcí, která je cauchyovská (vzhledem k supremové metrice): pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že pro každé $m,n \ge n_0$ a každé $a \in M$ máme nerovnost $|f_m(a) - f_n(a)| < \varepsilon$. Speciálně je pro každý pevný bod $a \in M$ posloupnost reálných čísel $(f_n(a))$ cauchyovská.

Má tedy limitu (euklidovský prostor $\mathbb{R}$ je, jak již z MAI víme, úplný), již označíme $f(a)$. Tak dostáváme funkci $f: M \to \mathbb{R}$, která je v popsaném smyslu bodovou limitou posloupnosti funkcí (f_n). Ukážeme, že $f = \lim f_n$ v supremové metrice (z toho už snadno plyne, že f je omezená funkce). Pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme index n_0, pro který nerovnost z cauchyovskosti (f_n) platí s $\varepsilon/2$. Nepřítel nám nyní ještě dal prvek $a \in M$. My vezmeme tak velký index m, že $m \geq n_0$ a navíc $|f(a) - f_m(a)| < \varepsilon/2$ (což lze, protože $(f_n(a))$ konverguje k $f(a)$). Pro každé $n \geq n_0$ pak je

$$|f(a) - f_n(a)| \leq |f(a) - f_m(a)| + |f_m(a) - f_n(a)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(první $|\ldots| < \varepsilon/2$ díky volbě m a druhá $|\ldots| < \varepsilon/2$ díky cauchyovskosti (f_n)). Zdůrazněme, že index n_0 závisí jen na ε a ne na prvku a, takže pro každé $n \geq n_0$ a každý prvek $a \in M$ máme $|f(a) - f_n(a)| < \varepsilon$. Tedy pro každé $n \geq n_0$ máme $d(f, f_n) \leq \varepsilon$ v supremové metrice a f je v ní limitou posloupnosti (f_n). □

Věta (úplný prostor omezených spojitých funkcí). *Je-li (M, d) libovolný metrický prostor, pak metrický prostor omezených a spojitých funkcí $f: M \to \mathbb{R}$ se supremovou metrikou je úplný.*

Důkaz. Nechť (f_n) je posloupnost spojitých a omezených reálných funkcí definovaných na M, která je cauchyovská v supremové metrice. Podle předešlého tvrzení existuje omezená funkce $f: M \to \mathbb{R}$, že $\lim f_n = f$. Zbývá jen dokázat, že f je spojitá. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a bod $a \in M$. Vezmeme tak velký index m, že pro každé $x \in M$ je $|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$ (což lze, protože f_n v supremové metrice limití k f). Protože je f_m spojitá, existuje $\delta > 0$ tak, že $x \in B(a, \delta) \Rightarrow |f_m(x) - f_m(a)| < \varepsilon/2$. Pro každý bod $x \in B(a, \delta)$ pak máme

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(první $|\ldots| < \varepsilon/2$ díky blízkosti f_m a f v supremové metrice a druhá $|\ldots| < \varepsilon/2$ díky spojitosti f_m v bodě a). Ukázali jsme, že f je v bodě a spojitá, což platí pro každý bod prostoru M. □

Důsledek ($(\mathcal{C}[a, b], \sup)$ je úplný). *Metrický prostor $\mathcal{C}[a, b]$ funkcí spojitých na $[a, b]$ se supremovou metrikou je úplný.*

Důkaz. Je to speciální případ předešlé věty, když si uvědomíme, že funkce spojitá na intervalu $[a, b]$ už je na něm automaticky omezená. □

Banachova věta o pevném bodu. Pomocí úplnosti lze pro mnoho typů rovnic dokázat existenci řešení. Uvedeme si větu, která takovou metodu důkazu popisuje. Nejprve ale pár definic.

Zobrazení $f: M \to M$ metrického prostoru (M, d) do sebe je *kontrahující*, když existuje takové reálné číslo q s $0 < q < 1$, že pro každé dva body $x, y \in M$ platí nerovnost

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y) .$$

Kontrahující zobrazení tedy zkracuje vzdálenost každých dvou bodů alespoň o pevný faktor q menší než 1. Je jasné, že kontrahující zobrazení je stejnoměrně spojité. *Pevným bodem* zobrazení f množiny X do sebe rozumíme bod a z X splňující $f(a) = a$. Posloupnost $(x_n) \subset X$ je *posloupností iterací* zobrazení $f: X \to X$, když pro $n = 1, 2, \ldots$ platí $x_{n+1} = f(x_n)$ ($x_1 \in X$ je libovolný startovací bod této posloupnosti). Následující větu vymyslel polský matematik Stefan Banach (1892–1945).

Věta (Banachova věta o pevném bodu). *Kontrahující zobrazení f úplného metrického prostoru (M, d) do sebe má právě jeden pevný bod a každá posloupnost iterací $(x_n) \subset M$ zobrazení f k němu konverguje.*

Důkaz. Nechť a a b jsou dva pevné body f. Pak

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq q d(a, b) ,$$

a to je, vzhledem ke $q < 1$, možné pouze pro hodnotu $d(a, b) = 0$. Tedy $a = b$ a vidíme, že f má buď jediný pevný bod nebo žádný. Z cauchyovskosti posloupnosti iterací (x_n) zobrazení f existence pevného bodu hned plyne, je to totiž limita $a = \lim x_n$ (jež existuje, neboť jsme v úplném prostoru):

$$a = \lim x_n = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)$$

(viz úlohu 6). Dokážeme cauchyovskost posloupnosti iterací (x_n). Protože $x_n = f(x_{n-1})$ a f je kontrahující s konstantou q, pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q d(x_n, x_{n-1}) \leq q^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq q^{n-1} d(x_2, x_1) .$$

Nechť $m > n$ jsou dva indexy. Podle trojúhelníkové nerovnosti a vzorce pro součet geometrické řady je

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq d(x_2, x_1)(q^{m-2} + q^{m-3} + \cdots + q^{n-1}) \\
&< d(x_2, x_1)(q^{n-1} + q^n + q^{n+1} + \ldots) = d(x_2, x_1)q^{n-1}/(1-q) \\
&\to 0 \text{ pro } n \to \infty \text{ (neboť } 0 < q < 1) .
\end{aligned}$$

Takže (x_n) je cauchyovská. □

Dá se ukázat (úloha 7), že věta platí i za zdánlivě slabšího předpokladu, že kontrahující je jen nějaká iterace $f^{(n)}(x) = f(f(\ldots(f(x))))$ (n aplikací) zobrazení f.

Ukážeme použití Banachovy věty při řešení diferenciálních rovnic, což jsou rovnice svazující původní funkci s jejími derivacemi. Začneme jednoduchou rovnicí $y'(x) = y(x)$, kdy chceme najít funkci rovnou své derivaci. Řešením je exponenciála $y(x) = \exp(x)$ a různé odvozeniny, jako třeba $-3\exp(x + 10)$. Pro každou dvojici reálných čísel a, b dokonce existuje takové řešení, že $y(a) = b$, totiž $y(x) = b\exp(x - a)$. Jak uvidíme, s tímto požadavkem je řešení (lokálně) jednoznačné. Pomocí Banachovy věty se dá lokální existence a jednoznačnost řešení dokázat pro širokou třídu diferenciálních rovnic

$$(*) \begin{cases} y(a) &= b \\ y'(x) &= f(x, y(x)) . \end{cases}$$

Zde $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je zadaná funkce (pravá strana rovnice) a $a, b \in \mathbb{R}$ jsou zadaná čísla. Hledáme reálnou funkci $y(x)$ a otevřený interval I obsahující a, že $y(x)$ je na I definovaná, $y(a) = b$ (říkáme, že $y(x)$ splňuje *počáteční podmínku* $y(a) = b$) a $y(x)$ má na I derivaci, jež na I splňuje druhý vztah v úloze (*), tj. vlastní diferenciální rovnici. Důkaz následující věty, jež je připsána francouzskému matematikovi Émilu Picardovi (1865–1941), jsem na přednášce nestihl uvést, a je zde.

Věta (Picardova o řešení dif. rovnic). *Pokud je $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá a existuje konstanta $M > 0$, že pro každá tři čísla $u, v, w \in \mathbb{R}$ platí*

$$|f(u, v) - f(u, w)| \leq M|v - w| ,$$

pak pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ má a okolí $I = (a - \delta, a + \delta)$, na němž má úloha (*) jednoznačné řešení $y(x)$.

Důkaz. Budeme pracovat na intervalech $I = (a-\delta, a+\delta)$ a $J = [a-\delta, a+\delta]$ pro nějaké $\delta > 0$. Z vlastností Riemannova integrálu (výpočet Riemannova integrálu Newtonovým integrálem, Riemannův integrál jako funkce horní integrační meze) plyne, že pro spojitou funkci f je úloha (*) ekvivalentní rovnici

$$(**) \qquad y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))\, dt,\ \ x \in I$$

— je-li $y(x)$ na I řešením úlohy (*), je řešením i rovnice (**) a naopak (úloha 8). Ukážeme, že pro dostatečně malé δ má na intervalu I rovnice (**) — a tedy i úloha (*) — jednoznačné řešení $y(x)$. Pravá strana (**) definuje zobrazení A, které funkci $y(x)$ spojité na J přiřadí funkci $z(x)$,

$$z(x) = A(y(x)) = b + \int_a^x f(t, y(t))\, dt\ .$$

Integrál je spojitou funkcí své horní integrační meze, takže $z(x)$ je na J rovněž spojitá (dokonce má na J spojitou první derivaci: $z'(x) = f(x, y(x))$). Máme zobrazení (či spíše funkcionál, protože jeho argumenty i hodnoty jsou funkce)

$$A:\ \mathcal{C}[a-\delta, a+\delta] \to \mathcal{C}[a-\delta, a+\delta]\ .$$

Ukážeme, že pro dostatečně malé δ má A jednoznačný pevný bod $y(x)$. Ovšem pevný bod A je přesně řešení rovnice (**), takže budeme hotovi

Uvážíme $\mathcal{C}[a-\delta, a+\delta]$ se supremovou metrikou $d(\cdot,\cdot)$, což je úplný metrický prostor (podle hořejšího důsledku), a použijeme Banachovu větu o pevném bodu. Uvidíme, že pro dostatečně malé δ je A kontrahující. Nechť $y(x)$ a $z(x)$ jsou dvě funkce z $\mathcal{C}[a-\delta, a+\delta]$. Pak (viz úlohu 9)

$$d(A(y), A(z)) = \sup_{x\in J} \left| \int_a^x f(t, y(t))\, dt - \int_a^x f(t, z(t))\, dt \right|\ ,$$

což se rovná

$$\sup_{x\in J} \left| \int_a^x (f(t, y(t)) - f(t, z(t)))\, dt \right|\ .$$

A to je nejvýše

$$\sup_{x\in J} \left| \int_a^x |f(t, y(t)) - f(t, z(t))|\, dt \right| \le \sup_{x\in J} \left| \int_a^x M|y(t) - z(t)|\, dt \right|\ ,$$

tedy nejvýše

$$\sup_{x\in J}\left|\int_a^x M\sup_{t\in J}|y(t)-z(t)|\,dt\right| .$$

Což se rovná

$$\sup_{x\in J}\left|\int_a^x M\cdot d(y,z)\,dt\right| = \sup_{x\in J}|(x-a)M\cdot d(y,z)| = M\delta\cdot d(y,z) .$$

Zvolíme-li $\delta \le \frac{1}{2M}$, máme $d(A(y),A(z)) \le \frac{1}{2}d(y,z)$ pro libovolné dvě funkce $y,z\in\mathcal{C}[a-\delta,a+\delta]$ — zobrazení A je kontrahující. Podle Banachovy věty o pevném bodu má A jednoznačný pevný bod a věta je dokázána. □

Když reálná funkce dvou proměnných $f(u,v)$ splňuje pro nějakou konstantu $M>0$ na množině $D\subset\mathbb{R}^2$ podmínku věty, to jest

$$\forall\ (u,v),(u,w)\in D:\ |f(u,v)-f(u,w)|\le M|v-w| ,$$

řekneme, že f je na D *lipschitzovská* (v druhé proměnné). Funkce $f(u,v)=v$ z úvodního příkladu (rovnice $y'=y$) je lipschitzovská na celém $\mathbb{R}^2$, třeba s konstantou $M=1$. Funkce $b\exp(x-a)$ je proto pro každé dvě čísla $a,b\in\mathbb{R}$ jednoznačným lokálním řešením úlohy $y(a)=b$, $y'(x)=y(x)$. Podmínka lipschitzovskosti na celém $\mathbb{R}^2$ je zbytečně silná a Picardova věta platí i za slabšího předpokladu lokální lipschitzovskosti (úloha 10).

Úlohy

1. Dokažte, že kompaktní metrický prostor je úplný.
2. Rozhodněte, zda je průnik a rozdíl dvou úplných podmnožin v metrickém prostoru opět úplná množina.
3. Totéž pro sjednocení.
4. Jaké jsou úplné a otevřené podmnožiny euklidovského prostoru $\mathbb{R}$?
5. Lze v definici kontrahujícího zobrazení nahradit neostrou nerovnost ostrou, tj. psát $d(f(x),f(y)) < qd(x,y)$?
6. Zdůvodněte podrobně platnost každé z pěti rovností ve výpočtu $a = \cdots = f(a)$ v důkazu Banachovy věty o pevném bodu.

7. Ukažte, že zobrazení úplného metrického prostoru do sebe, jehož nějaká iterace je kontrahující, má jediný pevný bod.

8. Dokažte podrobně ekvivalenci úlohy (*) s rovnicí (**).

9. Rozmyslete si, proč přesně platí každá rovnost či nerovnost ve výpočtu odhadu $d(A(y), A(z)) \leq M\delta \cdot d(y, z)$ v důkazu Picardovy věty.

10. Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $(a, b) \in D$ a $f : D \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která je na D lipschitzovská ve druhé proměnné. Pak má úloha (*) lokálně jednoznačné řešení. Jak se to dokáže?