Přednáška 3, 19. října 2015

Důkaz Heineho–Borelovy věty. Bez újmy na obecnosti vezmeme celý prostor $A = M$ (proč? — úloha 1).

Implikace $\Rightarrow$. Nechť je (M, d) kompaktní a nechť

$$\bigcup_{i \in I} X_i = M$$

je jeho pokrytí otevřenými množinami. Nejprve ukážeme, že pro každé $\delta > 0$ existuje taková konečná množina $S \subset M$, že pro každý bod $a \in M$ existuje bod $b \in S$ s $d(a, b) < \delta$. Kdyby to nebyla pravda, snadno sestrojíme nekonečnou posloupnost $(a_n) \subset M$, že $d(a_m, a_n) \geq \delta$ pro každé dva indexy $m < n$ (jak? — úloha 2). Tato posloupnost však nemá, ve sporu s předpokladem o M, konvergentní podposloupnost. Pro každé $\delta > 0$ proto taková konečná množina $S \subset M$ existuje, nazveme ji *δ-sítí*. Vlastnost δ-sítě S tedy je, že

$$\bigcup_{b \in S} B(b, \delta) = M\ .$$

Předpokládejme nyní pro spor, že pokrytí M otevřenými množinami X_i nemá konečné podpokrytí. Z toho plyne, označíme-li si jako S_n, $n = 1, 2, \ldots$, $(1/n)$-síť, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje „zvláštní“ bod $b_n \in S_n$, že koule $B(b_n, 1/n)$ není obsažená v žádné z množin X_i. (Kdyby pro nějaké n zvláštní bod v S_n neexistoval, dokázali bychom z množin X_i vybrat konečné podpokrytí: pro každý bod $b \in S_n$ bychom vzali jednu množinu X_i splňující $X_i \supset B(b, 1/n)$, a tyto X_i by, díky vlastnosti $(1/n)$-sítě, pokrývaly M.) Uvažme posloupnost

$$(b_n) \subset M$$

zvláštních bodů. Podle předpokladu o M má konvergentní podposloupnost (b_{k_n}) s limitou $b \in M$. Protože X_i pokrývají M, existuje mezi nimi množina X_j, že $b \in X_j$. Vzhledem k otevřenosti X_j existuje poloměr $r > 0$, že $B(b, r) \subset X_j$. Vezmeme tak velké $N \in \mathbb{N}$, že $d(b_{k_N}, b) < r/2$ ($\lim b_{k_n} = b$) a současně $1/k_N < r/2$. Z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že pak

$$B(b_{k_N}, 1/k_N) \subset B(b, r) \subset X_j\ .$$

To je ale spor s tím, že b_{k_N} je zvláštní bod v S_{k_N}. Odvodili jsme spor, takže z množin X_i lze vybrat konečné podpokrytí a $\Rightarrow$ je dokázaná.

Implikace $\Leftarrow$. Předpokládáme, že M je topologicky kompaktní a v dané posloupnosti bodů (a_n) nalezneme konvergentní podposloupnost. Předpokládejme, že pro každý bod $b \in M$ existuje takový poloměr $r(b) > 0$, že množina indexů $S_b = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b, r(b))\}$ je konečná. To vede ke sporu: otevřené pokrytí $M = \bigcup_{b\in M} B(b, r(b))$ má konečné podpokrytí dané konečnou množinou $N \subset M$, $M = \bigcup_{b\in N} B(b, r(b))$, a protože množina indexů $S = \bigcup_{b\in N} S_b$ je konečná (je to konečné sjednocení konečných množin), existuje (dokonce nekonečně mnoho) $m \in \mathbb{N}$, že $m \notin S$ a tedy $a_m \notin B(b, r(b))$ pro každé $b \in N$ — spor, neboť tyto koule pokrývají M a v některé z nich a_m musí ležet. Tedy existuje bod $b \in M$, že množina indexů $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b, r)\}$ je nekonečná pro každý poloměr $r > 0$. Teď už lehce sestrojíme podposloupnost s limitou b: vezmeme libovolně $n_1 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_1} \in B(b, 1)$, pak vybereme $n_2 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_2} \in B(b, 1/2)$ a současně $n_2 > n_1$ (což díky vlastnosti bodu b lze), pak vybereme $n_3 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_3} \in B(b, 1/3)$ a současně $n_3 > n_2$ a tak dále. Podposloupnost (a_{n_k}) zřejmě splňuje $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = b$. $\square$

Vztah bodu ke množině. Nechť $a \in M$ je bod v metr. prostoru (M, d) a $X \subset M$ je podmnožina. *Okolím bodu a* rozumíme jakoukoli otevřenou množinu obsahující bod a. V následujících definicích U označuje okolí bodu a. Řekneme, že

- a je *vnitřním bodem* X, když existuje U tak, že $U \subset X$;
- a je *vnějším bodem* X, když existuje U tak, že $U \subset M \backslash X$;
- a je *hraničním bodem* X, když každé U protíná X i $M \backslash X$;
- a je *limitním bodem* X, když je pro každé U průnik $U \cap X$ nekonečný;
- a je *izolovaným bodem* X, když existuje U tak, že $U \cap X = \{a\}$.

Vnitřní a izolované body X nutně leží v X a vnější body leží mimo X. Hraniční a limitní body X mohou ležet v X i mimo X. Podmínka limitního bodu říká, že libovolně blízko a se nachází bod z X různý od a.

Jako příklad vezmeme v euklidovské rovině $\mathbb{R}^2$ množinu

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|x\| < 1\} \cup \{(0, 2)\}$$

— jednotkový kruh se středem v počátku, z něhož jsme počátek odstranili a k němuž jsme přidali bod $(0, 2)$. Pak vnitřní body X tvoří množinu $\{x \in$

$\mathbb{R}^2 \mid 0 < \|x\| < 1\}$, vnější body množinu $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > 1, x \neq (0,2)\}$, hraniční body množinu $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\} \cup \{(0,0),(0,2)\}$, limitní body množinu $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ a izolované body množinu $\{(0,2)\}$.

Homeomorfismus. Bijekce $f: M_1 \to M_2$ mezi dvěma metrickými prostory je *homeomorfismus*, když f i f^{-1} je spojité zobrazení. Existuje-li taková bijekce mezi M_1 a M_2, jsou oba metrické prostory *homeomorfní.* Homeomorfismus je typ izomorfismu metrických prostorů, který je slabší než izometrie. Každá izometrie je homeomorfismem, ale obecně ne naopak. Homeomorfismus je izomorfismus struktur otevřených množin obou prostorů. Homeomorfní metrické prostory se nedají odlišit jen pomocí otevřených množin.

Jako příklad uvažme zobrazení $x \mapsto \tan x$ mezi euklidovskými prostory $(-\pi/2, \pi/2)$ a $\mathbb{R}$. Toto zobrazení je homeomorfismus (je bijektivní a $\tan x$ i inverz $\arctan x$ je spojité zobrazení). Tyto prostory zjevně nejsou izometrické, protože první je omezený, ale druhý ne.

Na druhou stranu zobrazení $f(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ mezi euklidovskými prostory

$$[0, 2\pi) \ \text{ a } \ S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\} ,$$

což je interval v $\mathbb{R}$ a jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$, homeomorfismem není. Je sice bijektivní a spojité, ale inverzní zobrazení spojité není (není spojité v bodu $(1,0)$). Jak později dokážeme, metrické prostory $[0, 2\pi)$ a S ani homeomorfní nejsou.

Tvrzení (kompakty a homeomorfismus). *Když je*

$$f: M \to N$$

prosté a spojité zobrazení mezi metrickými prostory a M je kompaktní, je i inverzní zobrazení $f^{-1}: f(M) \to M$ spojité a f je tedy homeomorfismus prostorů M a $f(M)$.

Důkaz. Stačí ukázat, že pro každou uzavřenou podmnožinu $A \subset M$ je podmnožina $f(A) \subset N$ uzavřená. Protože $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$, podle topologické definice spojitosti je f^{-1} spojité zobrazení. Ale uzavřená podmnožina kompaktního prostoru je kompaktní, spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina, a ta je uzavřená. Takže $f(A)$ je uzavřená. □

Souvislost prostorů. Řekneme, že metrický prostor (M, d) je *souvislý,* pokud jeho jediné podmnožiny, které jsou současně otevřené i uzavřené — takové množiny se nazývají *obojetné* — jsou $\emptyset$ a M. Krátce řečeno, prostor je souvislý, pokud neobsahuje netriviální obojetnou podmnožinu. Ekvivalentně, prostor je souvislý, pokud ho nelze napsat jako disjunktní sjednocení dvou neprázdných otevřených (či uzavřených) množin. V opačném případě je prostor *nesouvislý*. Podobně nazveme podmnožinu $X \subset M$ v metrickém prostoru souvislou resp. nesouvislou, je-li podprostor s indukovanou metrikou (X, d) souvislý resp. nesouvislý. Souvislost prostoru intuitivně znamená, že se nerozpadá na dva oddělené (neprázdné) kusy.

Tvrzení (intervaly a souvislost). *Podmnožina $I \subset \mathbb{R}$ (euklidovského prostoru $\mathbb{R}^1$) je souvislá, právě když je intervalem (má vlastnost $a, b \in I, c \in \mathbb{R}, a < c < b \Rightarrow c \in I$).*

Důkaz. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, který je vyjádřený jako $I = A \cup B$, kde A a B jsou neprázdné a uzavřené množiny, které jsou disjunktní. Vezmeme $a \in A$ a $b \in B$, například $a < b$, a definujeme $\alpha = \sup(\{x \in [a, b] \mid x \in A\})$. Protože I je interval, je $\alpha \in [a, b] \subset I$. Podle aproximační vlastnosti suprema je α limitou (zleva) prvků z A, takže podle uzavřenosti A je $\alpha \in A$. Patrně $\alpha < b$ a podle definice suprema je $(\alpha, b] \cap A = \emptyset$, takže $(\alpha, b] \subset B$ a α je limitou (zprava) prvků z B. Tedy i $\alpha \in B$ a A a B nejsou disjunktní, což je spor. Proto A a B neexistují a I je souvislý.

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ není interval: máme $a, b \in I, c \in \mathbb{R}, a < c < b$, že $c \notin I$. Potom je $I = (I \cap (-\infty, c) \cup (I \cap (c, +\infty))$ rozklad na dvě neprázdné a otevřené množiny, které jsou disjunktní. Tedy I není souvislá. □

Tvrzení (spojitost zachovává souvislost). *Je-li*

$$f : M \to N$$

spojité zobrazení mezi metrickými prostory a M je souvislý, pak je obraz $f(M)$ souvislá podmnožina v N.

Důkaz. Úloha 4. □

Zobrazení $f : M \to N$ mezi metrickými prostory je *lokálně prosté*, když má každý bod $a \in M$ okolí, na němž je f prosté, to jest pro každé $a \in M$ existuje $r > 0$, že platí implikace $b, c \in B(a, r), b \neq c \Rightarrow f(b) \neq f(c)$.

Tvrzení (jedna vlastnost S). *Nechť $S \subset \mathbb{R}^2$ označuje jednotkovou kružnici v rovině s euklidovskou metrikou. Když je zobrazení*

$$f : S \to S$$

spojité a lokálně prosté, pak $f(S) = S$ — každá rovnice $f(x) = a$, $a \in S$, má řešení $x \in S$.

Důkaz uděláme příště. Viz též úlohu 9. Teď si dokážeme důsledek, který celé tvrzení motivuje:

Důsledek (odmocniny v $\mathbb{C}$). *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a každé $a \in \mathbb{C}$ existuje $b \in \mathbb{C}$, že $b^k = a$. Každé komplexní číslo má tedy k-tou odmocninu pro každé $k = 1, 2, 3, \ldots$.*

Důkaz. Necht $k \in \mathbb{N}$. Pro $a = 0$ nebo reálné $a > 0$ vždy k-tá odmocnina existuje (podle věty o supremu). Pro nenulové $a \in \mathbb{C}$ je $(|a|^{1/k})^k a/|a| = a$, takže stačí nalézt k-tou odmocninu z $a/|a|$, což je číslo ležící na jednotkové kružnici $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Vezmeme zobrazení $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^k$. Je to i zobrazení z S do S, protože $|z^k| = |z|^k$. Podle tvrzení stačí ukázat, že f je na S spojité a lokálně prosté. Snadno se dokáže více: f je spojité na $\mathbb{C}$ a lokálné prosté na $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Plyne to z rozkladu

$$u^k - v^k = (u - v)(u^{k-1} + u^{k-2}v + \cdots + v^{k-1}) =: (u - v)g(u, v)\ .$$

Pro $u, v \in \mathbb{C}$ s $|u|, |v| \le R$ je $|g(u, v)| \le kR^{k-1}$, což dává spojitost f na $\mathbb{C}$. Pro dané nenulové $z \in \mathbb{C}$ je $\lim_{u,v\to z} g(u, v) = kz^{k-1} \neq 0$, takže pro $u \neq v$ a dostatečně blízko k $z \neq 0$ je $g(u, v) \neq 0$ a tedy $u^k \neq v^k$, což dává lokální prostotu všude kromě nuly (viz úlohy 10 a 11). $\square$

Důsledek dokončuje důkaz Základní věty algebry z předchozí přednášky.

Úlohy

1. Proč se v důkazu Heineho–Borelovy věty můžeme omezit na případ celého prostoru?

2. Jak z neexistence δ-sítě sestrojíme popsanou posloupnost?

3. Nechť každý bod prostoru M je (vzhledem ke svému doplňku) izolovaný. Jaké jsou otevřené množiny v M?

4. Dokažte, že obraz souvislé množiny spojitým zobrazením je souvislá množina. Návod: použijte topologickou definici spojitosti.

5. Dokažte, že euklidovské prostory $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ nejsou homeomorfní.
6. Je interval $(0, 1)$ disjunktní sjednocení dvou neprázdných souvislých množin?
7. Je sjednocení dvou souvislých množin souvislá množina? A co průnik?
8. A co sjednocení dvou souvislých protínajících se množin?
9. Platí poslední tvrzení, když v něm S nahradíme úsečkou v rovině?
10. Jak blízko musíme vzít různá čísla $u, v \in \mathbb{C}$ k $z \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$, aby platilo $u^k \neq v^k$?
11. Ukažte, že pro $k \geq 2$ zobrazení $z \mapsto z^k$ není lokálně prosté v (žádném) okolí nuly.