Přednáška 3, 16. října 2013

Implikace $\Leftarrow$. Předpokládáme, že M je topologicky kompaktní a v dané posloupnosti bodů $A = (a_n)$ nalezneme konvergentní podposloupnost. Předpokládejme, že pro každý bod $b \in M$ existuje takový poloměr $r(b) > 0$, že množina indexů $S_b = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b, r(b))\}$ je konečná. To vede ke sporu: otevřené pokrytí $M = \bigcup_{b \in M} B(b, r(b))$ má konečné podpokrytí dané konečnou množinou $N \subset M$, $M = \bigcup_{b \in N} B(b, r(b))$, a protože množina indexů $S = \bigcup_{b \in N} S_b$ je konečná (je to konečné sjednocení konečných množin), existuje (dokonce nekonečně mnoho) $m \in \mathbb{N}$, že $m \notin S$ a tedy $a_m \notin B(b, r(b))$ pro každé $b \in N$ — spor, neboť tyto koule pokrývají M a v některé z nich a_m musí ležet. Tedy existuje bod $b \in M$, že množina indexů $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b, r)\}$ je nekonečná pro každý poloměr $r > 0$. Teď už lehce sestrojíme podposloupnost s limitou b: vezmeme libovolně $n_1 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_1} \in B(b, 1)$, pak vybereme $n_2 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_2} \in B(b, 1/2)$ a současně $n_2 > n_1$ (což díky vlastnosti bodu b lze), pak vybereme $n_3 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_3} \in B(b, 1/3)$ a současně $n_3 > n_2$ a tak dále. Zřejmě (a_{n_k}) je podposloupnost A a $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = b$. $\square$

Vztah bodu ke množině. Nechť $a \in M$ je bod a $X \subset M$ je množina. *Okolím bodu a* rozumíme jakoukoli otevřenou množinu obsahující bod a. V následujících definicích U označuje okolí bodu a. Řekneme, že

- a je *vnitřním bodem* X, když existuje U tak, že $U \subset X$;
- a je *vnějším bodem* X, když existuje U tak, že $U \subset M \backslash X$;
- a je *hraničním bodem* X, když každé U protíná X i $M \backslash X$;
- a je *limitním bodem* X, když je pro každé U průnik $U \cap X$ nekonečný;
- a je *izolovaným bodem* X, když existuje U tak, že $U \cap X = \{a\}$.

Vnitřní a izolované body X nutně leží v X a vnější body leží mimo X. Hraniční a limitní body X mohou ležet v X i mimo X.

Jako příklad vezmeme v euklidovské rovině $\mathbb{R}^2$ množinu

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|x\| < 1\} \cup \{(0, 2)\},$$

jednotkový kruh se středem v počátku, z něhož jsme počátek odstranili a k němuž jsme přidali bod $(0, 2)$. Pak vnitřní body X tvoří množinu $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|x\| < 1\}$, vnější body množinu $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > 1, x \neq (0, 2)\}$, hraniční body množinu $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\} \cup \{(0,0),(0,2)\}$, limitní body množinu $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ a izolované body množinu $\{(0,2)\}$.

Homeomorfismus. Bijekce $f: M_1 \to M_2$ mezi dvěma metrickými prostory je *homeomorfismus*, když zobrazení f i inverzní zobrazení f^{-1} je spojité. Existuje-li taková bijekce mezi M_1 a M_2, jsou oba metrické prostory *homeomorfní*. Homeomorfismus je druh izomorfismu metrických prostorů, který je slabší než izometrie. Každá izometrie je homeomorfismem, ale obecně ne naopak. Homeomorfismus je izomorfismus struktur otevřených množin obou prostorů. Homeomorfní metrické prostory se nedají odlišit jen pomocí otevřených množin.

Jako příklad uvažme zobrazení $x \mapsto \tan x$ mezi euklidovskými prostory $(-\pi/2, \pi/2)$ a $\mathbb{R}$. Toto zobrazení je homeomorfismus (je bijektivní a $\tan x$ i inverz $\arctan x$ je spojité zobrazení). Tyto prostory zjevně nejsou izometrické, protože první je omezený, ale druhý ne.

Na druhou stranu zobrazení $f(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ mezi euklidovskými prostory

$$[0, 2\pi) \ \text{ a } \ K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\},$$

což je interval v $\mathbb{R}$ a jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$, homeomorfismem není. Je sice bijektivní a spojité, ale inverzní zobrazení spojité není (není spojité v bodu $(1,0)$). Jak teď dokážeme, metrické prostory $[0, 2\pi)$ a K ani homeomorfní nejsou.

Tvrzení (interval a kružnice nejsou homeomorfní). *Euklidovské prostory I a K, kde $I \subset \mathbb{R}$ je libovolný interval na reálné ose a $K \subset \mathbb{R}^2$ je libovolná kružnice v rovině (s kladným poloměrem), nejsou homeomorfní.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že I není prázdný a nesestává pouze z jednoho bodu (proč? — úloha 1). Zvolíme bod $c \in I$ libovolně, ale tak, aby se nerovnal krajnímu bodu I. Pak máme vyjádření $I \backslash \{c\} = I_1 \cup I_2$, kde I_1 jsou prvky z I menší než c a I_2 jsou ty větší. Patrně $I_1, I_2 \neq \emptyset$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ a obě množiny I_1 a I_2 jsou v prostoru I otevřené. I jsme tak vyjádřili jako disjunktní sjednocení bodu a dvou otevřených neprázdných množin. Kdyby I a K byly homeomorfní, kružnice K by musela jít rozložit stejným způsobem (vzali bychom prostě obrazy bodu c a množin I_1 a I_2 v homeomorfismu z I do K). Ukážeme ale, že pro žádný bod $b \in K$ není $K \backslash \{b\}$ sjednocením dvou neprázdných disjunktních otevřených množin. To je vidět díky tomu, že (pro každý bod $b \in K$) je $K \backslash \{b\}$ homeomorfní intervalu $(0,1)$ (jak? — úloha 2).

Kdyby $K\backslash\{b\}$ měla popsaný rozklad, měl by ho i interval $(0,1)$. Nechť, pro spor, $(0,1)=A\cup B$, kde A a B jsou neprázdné otevřené množiny a $A\cap B=\emptyset$. Vezmeme dva body $0<c<d<1$, že $c\in A$ a $d\in B$ (nebo naopak). Nechť e je supremum těch $x\in[c,d]$, že $x\in A$. Pak $e\in[c,d]$. Z aproximační vlastnosti suprema plyne, že pro každé $\varepsilon>0$ obsahuje interval $(e-\varepsilon,e]$ prvek množiny A. Na druhou stranu, protože $e\le d$, $d\in B$ a e je horní mezí prvků A ležících v $[c,d]$, obsahuje pro každé $\varepsilon>0$ interval $[e,e+\varepsilon)$ prvek množiny B. (Nebo je role obou množin prohozena.) Žádné okolí bodu e tedy neleží celé v A nebo celé v B. To je spor, protože obě množiny jsou otevřené a e leží v některé z nich. □

Souvislost prostorů. Řekneme, že metrický prostor (M,d) je *souvislý*, pokud jeho jediné podmnožiny, které jsou současně otevřené i uzavřené — takové množiny se nazývají *obojetné*, jsou $\emptyset$ a M. Krátce řečeno, prostor je souvislý, pokud neobsahuje netriviální obojetnou podmnožinu. Ekvivalentně, prostor je souvislý, pokud ho nelze napsat jako disjunktní sjednocení dvou neprázdných otevřených (či uzavřených) množin. V opačném případě je prostor *nesouvislý*. Podobně nazveme podmnožinu $X\subset M$ v metrickém prostoru souvislou resp. nesouvislou, je-li jako podprostor s indukovanou metrikou (X,d) souvislá resp. nesouvislá. Souvislost prostoru intuitivně znamená, že se nerozpadá na dva oddělené kusy. Důkaz předchozího tvrzení je založen na tom, že prostor $I\backslash\{c\}$ je nesouvislý, ale prostor $K\backslash\{b\}$ je vždy souvislý (a že se souvislost spojitým zobrazením zachovává).

Tvrzení (intervaly jsou souvislé). *Každý interval $I\subset\mathbb{R}$ (jako euklidovský prostor) je souvislý.*

Důkaz. Viz závěr předchozího důkazu. Uvedený argument se z $I=(0,1)$ beze změny přenese na obecný interval I. □

Tvrzení (souvislost se zachovává spojitým zobrazením). *Je-li*

$$f:\ M\to N$$

spojité zobrazení mezi metrickými prostory a M je souvislý, pak je obraz $f(M)$ souvislá podmnožina v N.

Důkaz. úloha 3. □

Jiné intuitivní uchopení pojmu souvislosti je, že souvislost množiny M znamená, že z každého jejího bodu lze do každého jiného přejít po nepřerušované cestě ležící v M. Řekneme, že metrický prostor (M,d) je *obloukově* *souvislý*, když pro každé dva jeho body $a, b \in M$ existuje spojité zobrazení

$$f:\ [0,1] \to M,\ f(0) = a,\ f(1) = b\ ;$$

interval $[0,1] \subset \mathbb{R}$ je zde euklidovský prostor. Podobně se definuje, že podmnožina $X \subset M$ je obloukově souvislá, když je podprostor (X, d) obloukově souvislý.

Tvrzení (vztah souvislosti a obloukové souvislosti). *Nechť (M, d) je metrický prostor.*

1. *Je-li podmnožina $X \subset M$ obloukově souvislá, je i souvislá.*
2. *Existuje příklad metrického prostoru a jeho souvislé podmnožiny X, jež není obloukově souvislá.*
3. *Je-li každá koule $B(a, r)$ v M obloukově souvislá, potom je každá otevřená souvislá podmnožina $X \subset M$ i obloukově souvislá.*

Důkaz. 1. Předpokládejme pro spor nesouvislost X: existují množiny A, B otevřené v X, že $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ a $A \cup B = X$. Zvolíme dva body $a \in A$ a $b \in B$. Protože X je obloukově souvislá, máme spojité zobrazení $f:\ [0,1] \to X$, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$. Vzory $f^{-1}(A)$ a $f^{-1}(B)$ jsou dvě disjunktní otevřené množiny v $[0,1]$, jejichž sjednocením je $[0,1]$ a které jsou neprázdné ($0 \in f^{-1}(A)$ a $1 \in f^{-1}(B)$). Takže interval $[0,1]$ je nesouvislý, ve sporu s hořejším tvrzením.

2. Klasický příklad je euklidovský podprostor $X \subset \mathbb{R}^2$, jenž se skládá z grafu funkce $\sin(1/x)$ na intervalu $(0,1) \subset \mathbb{R}$ a z bodu $(0,1) \in \mathbb{R}^2$. Detaily doplňte v úloze 4.

3. Úloha 5. $\square$

Část 3 posledního tvrzení platí pro euklidovské prostory $\mathbb{R}^n$, v nichž jsou koule jistě obloukově souvislé (úloha 6). Setkali jsme se s tím v 8. přednášce MAII v minulém semestru. V $\mathbb{R}^n$ tedy souvislost a oblouková souvislost pro otevřené množiny splývají (pro obecné množiny ne, podle části 2).

Přednášku zakončíme protiintuitivním příkladem, jenž ukazuje, že dvě souvislé množiny v euklidovském prostoru se mohou prostupovat, aniž by se protly. To pro obloukově souvislé množiny možné není.

Příklad (dvě prostupující se souvislé množiny). *Nechť* $M = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ *je jednotkový čtverec v rovině, s euklidovskou metrikou. Uvažme jeho rozklad na dvě množiny*

$$A = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times \{0\} \cup ([0,1]\backslash\mathbb{Q}) \times (0,1] \quad a \quad B = M\backslash A \ .$$

A se skládá z bodů na dolní straně čtverce s racionální x-ovou souřadnicí a ze svislých úseček U_a délky 1 s iracionálními x-ovými souřadnicemi a a vyjmutými dolními konci. B je doplněk A do čtverce. Obě množiny A a B protínají každou ze čtyř stran čtverce, jsou disjunktní a obě jsou souvislé.

Důkaz. Kromě souvislosti jsou vlastnosti množin A a B jasné. Pro spor buď $A = C \cup D$ rozklad na disjunktní, neprázdné množiny, jež jsou (v A) uzavřené. Každá úsečka U_a je souvislá (dokonce obloukově), musí tedy celá ležet v C nebo v D. Předpokládejme nejprve, že nějaká U_a leží v C a jiná U_b, řekněme s $a < b$, zase v D. Nechť $\alpha \in [0,1]$ je supremum těch $x \in [a,b]$, že $U_x \subset C$. Když je α iracionální, leží U_α (podle uzavřenosti C i D a vlastnosti suprema) současně v C i D, což nelze. Když je α racionální, leží ze stejného důvodu současně v C i D bod $(\alpha,0)$, což též nelze. Tedy všechny úsečky U_a leží v C nebo v D. Řekněme, že C obsahuje všechny úsečky U_a. Pak C nemůže obsahovat všechny body $(b,0)$, $b \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Vezměme proto takový bod $(b,0) \in D$. Je jasné, že je limitou posloupnosti bodů z C (totiž bodů $(a_n, 1/n)$, $n = 1,2,\ldots$, kde (a_n) jsou iracionální čísla z $[0,1]$ limitící k b). Opět máme bod, jenž by měl ležet současně v C i D, což nelze. Z předpokladu nesouvislosti A jsme odvodili spor, pročež je A souvislá.

Množina B se skládá z bodů na dolní straně čtverce s iracionální x-ovou souřadnicí a ze svislých úseček V_a délky 1 s racionálními x-ovými souřadnicemi a a vyjmutými dolními konci. Vznikne z A záměnou množin $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ a $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$ v x-ových souřadnicích. Týž argument jako pro A ukazuje, že B je souvislá. □

Takzvaná *Jordanova věta o kružnici* — dobře známá z kreslení rovinných grafů v diskrétní matematice — říká, že když $f: \ [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je spojité zobrazení, které je navíc až na rovnost $f(0) = f(1)$ prosté — obraz $C = f([0,1])$ je tak tzv. topologická kružnice v rovině — potom pro doplněk C platí, že

$$\mathbb{R}^2\backslash C = \mathbb{R}^2\backslash f([0,1]) = A \cup B \ , \ A \cap B = \emptyset \ ,$$

kde A a B jsou dvě neprázdné otevřené souvislé množiny, jedna omezená (*vnitřek* C) a druhá neomezená (*vnějšek* C). Dokázat tuto větu je dosti těžké, nicméně její důkaz již byl formálně verifikován na počítači — zajímavý článek o tom je T. C. Hales, The Jordan curve theorem, formally and informally, *Amer. Math. Monthly* **114** (2007), 882–894. Plyne z ní, že když A a B jsou obloukově souvislé podmnožiny čtverce v rovině, přičemž A protíná jeho levou i pravou stranu a B dolní i horní, potom nutně $A \cap B \neq \emptyset$. Takže předchozí příklad nelze vyrobit s obloukově souvislými množinami.

Úlohy

1. Proč můžeme v důkazu nehomeomorfnosti I a K předpokládat, že interval I není ani prázdný ani jednobodový?
2. Popište homeomorfismus mezi kružnicí s jedním vyhozeným bodem a intervalem $(0, 1)$.
3. Dokažte, že obraz souvislé množiny spojitým zobrazením je souvislá množina. Návod: použijte topologickou definici spojitosti.
4. Dokažte souvislost množiny X popsané v důkazu části 2 posledního tvrzení. Dokažte, že není obloukově souvislá.
5. Dokažte část 3 tohoto tvrzení. Návod: Relace $\sim$ na X, kde $a \sim b$ znamená, že body a a b lze v X spojit cestou z definice obloukové souvislosti, je relace ekvivalence a každá její třída ekvivalence je otevřená množina.
6. Dokažte, že koule v $\mathbb{R}^n$ je obloukově souvislá.
7. Dokažte, že euklidovské prostory $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ nejsou homeomorfní.
8. Je interval $(0, 1)$ disjunktní sjednocení dvou neprázdných souvislých množin?
9. Nechť každý bod prostoru M je (vzhledem ke svému doplňku) izolovaný. Jaké jsou otevřené množiny v M?
10. Nalezněte vnitřní, vnější, hraniční, limitní a izolované body množiny $X \subset \mathbb{R}^2$ popsané v důkazu části 2 posledního tvrzení (graf $\sin \frac{1}{x}$ plus bod).

11. Je sjednocení dvou souvislých množin souvislá množina? A co průnik?
12. A co sjednocení dvou souvislých protínajících se množin?