1

<u>Věta o supremu.</u> Každá neprázdná a shora omezená množina $X \subset \mathbb{R}$ má supremum.

Připomeňme si, než ji dokážeme, jak se reálná čísla porovnávají. $\alpha = za \in \mathbb{R}$, kde $z \in \{-,+\}$ je znaménko a posloupnost cifer $a: \mathbb{Z} \to \{1,2,\dots,9\}$ začíná ∞ mnoha nulami.

$a,b: \mathbb{Z} \to \{1,2,\dots,9\}$, $a <_\ell b \iff \exists k \in \mathbb{Z}$, že $a(n) = b(n)$ pro $n > k$, ale $a(k) < b(k)$ – lexikografické uspořádání [samozřejmě $1 < 2 < 3 < \dots < 9$].

Nechť $\alpha = za$, $\alpha' = z'a'$ jsou dvě různá reálná čísla. Pak

$$\alpha < \alpha' \iff \begin{cases} z = -,\ z' = + \\ z = z' = +,\ a <_\ell a' \\ z = z' = -,\ a' <_\ell a. \end{cases}$$

<u>Např.</u> $+3.1415926\ldots < +3.1420037\ldots$, $-0.932 < -0.91$

<u>Důkaz věty o supremu.</u> Nechť $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ a shora omezená. Búno X obsahuje jen kladná čísla, tj. $\alpha = za \in X \Rightarrow z = +$. Položme $r := \max k \in \mathbb{Z}$, že $a(k) \neq 0$ pro nějaké $+a \in X$ (r je největší řád nenulové cifry čísla v X) – r existuje, protože X je shora omezená. Číslo $\beta = +b \in \mathbb{R}$ definujeme „hladově" jako největší „prvek" X: $b(n) = 0$ pro $n > r$,

$b(r) = \max a(r)$, že $+a \in X$, (jistě $b(r) > 0$)

$b(r-1) = \max a(r-1)$, že $+a \in X$ a $a(r) = b(r)$,

$b(r-2) = \max a(r-2)$, že $+a \in X$, $a(r) = b(r)$, $a(r-1) = b(r-1)$ atd. Sestrojené číslo $\beta = +b$ má tyto vlastnosti:

a) $\forall z \in \mathbb{Z}\ \exists +a \in X$, že $a(n) = b(n)$ pro každé $n \geq z$ a

b) $\forall z \in \mathbb{Z}\ \forall +a \in X$: $a(n) = b(n)$ pro vš. $n > z \Rightarrow a(z) \leq b(z)$.

Odtud už plyne hned, že $\beta = +b$ je supremum X, $\beta = \sup(X)$. Když $\alpha = +a \in X$ a $\alpha \neq \beta$, pak $a(n) = b(n)$ pro $\forall$ ~~…~~ $n > z$ a $a(z) \neq b(z)$ pro nějaké $z \in \mathbb{Z}$. Podle b) je $a(z) < b(z)$, takže $\alpha < \beta$ – β je horní mez.

Když $\alpha = +a \in \mathbb{R}$ a $\alpha < \beta$, opět pro nějaké $z \in \mathbb{Z}$ máme, že $a(n) = b(n)$ pro $n > z$ a $a(z) < b(z)$. Podle a) ale existuje číslo $\gamma = +c \in X$, že $c(n) = b(n)$ pro $n \geq z$ – takže ~~…~~ $\alpha < \gamma$ – číslo β je nejmenší horní mez X.

[Když $\alpha = -a \in \mathbb{R}$, je každý prvek X větší než α.] $\boxtimes$