Přednáška 2, 9. října 2013

Připomeňme si látku o metrických prostorech vyloženou v posledních dvou přednáškách LS MAII (viz zápisy z těchto přednášek). Nechť (M, d) je MP. Koule se středem v bodě $a \in M$ a poloměrem $\mathbb{R} \ni r > 0$ je množina

$$B(a, r) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\} \ .$$

Množina $X \subset M$ je otevřená, když pro každý bod $a \in X$ existuje poloměr $r > 0$, že $B(a, r) \subset X$. Doplňky otevřených množin do M jsou takzvané uzavřené množiny. Definice konvergence a limity v obecném MP-u je zřejmá: pro posloupnost $(a_n) \subset M$ a bod $a \in M$

$$\lim a_n = a \ \text{ znamená, že } \ \lim d(a_n, a) = 0 \ ,$$

čímž jsme vše převedli na konvergenci na reálné ose. Definici lze vyslovit i v ε-δ formě. To učiníme pro definici spojitého zobrazení mezi dvěma MP-y: je-li (N, e) další MP, zobrazení $f : M \to N$ je spojité, pokud

$$\forall \varepsilon > 0, a \in M \ \exists \delta > 0 : \ f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon) \ .$$

Vlastnosti otevřených a uzavřených množin a spojitých zobrazení:

- Množiny $\emptyset$ a M jsou vždy otevřené i uzavřené. Sjednocení (resp. průnik) libovolně mnoha otevřených (resp. uzavřených) množin je otevřená (resp. uzavřená) množina. Průnik (resp. sjednocení) konečně mnoha otevřených (resp. uzavřených) množin je otevřená (resp. uzavřená) množina.

- Množina $A \subset M$ je uzavřená, právě když pro každou konvergentní posloupnost $(a_n) \subset A$ je i $\lim a_n \in A$.

- Zobrazení $f : M \to N$ mezi MP-y je spojité, právě když každá otevřená množina $Y \subset N$ má v f otevřený vzor:

  $$f^{-1}(Y) = \{x \in M \mid f(x) \in Y\}$$

  je otevřená podmnožina M (tzv. topologická definice spojitosti).

Dokažme si poslední vlastnost (tento důkaz v LS nebyl). Nechť je zobrazení f spojité podle definice, $Y \subset N$ je otevřená množina a $a \in f^{-1}(Y)$. Tedy $f(a) \in Y$, díky otevřenosti Y je $B(f(a), r) \subset Y$ pro nějaké $r > 0$ a díky spojitosti f pak existuje $s > 0$, že $f(B(a, s)) \subset B(f(a), r) \subset Y$. Tedy $B(a, s) \subset f^{-1}(Y)$. Ukázali, jsme, že $f^{-1}(Y)$ je otevřená množina v M. Naopak, nechť je f topologicky spojité zobrazení a jsou dány $a \in M$ a $\varepsilon > 0$. Koule $B(f(a), \varepsilon) \subset N$ je otevřená množina (úloha 1) a díky topologické spojitosti f je $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ otevřená množina v M, která obsahuje bod a. Tedy existuje poloměr $\delta > 0$, že $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Což znamená, že $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$ — f je spojité zobrazení podle definice.

Kompaktní množiny. Podmnožina $A \subset M$ MP-u (M, d) je kompaktní, má-li každá posloupnost $(a_n) \subset A$ konvergentní podposloupnost s limitou v A. Podmnožina $A \subset M$ je omezená, když $A \subset B(a, r)$ pro nějakou kouli v M.

Vlastnosti kompaktních množin:

- Je-li (M, d) kompaktní MP a $A \subset M$ je uzavřená, pak je A kompaktní.
- Je-li A kompaktní, potom je A uzavřená a omezená. Opačná implikace obecně neplatí.
- Opačná implikace platí v euklidovských prostorech: $A \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní $\iff$ A je uzavřená a omezená.
- Je-li $f : M \to N$ spojité zobrazení mezi MP-y a $A \subset M$ je kompaktní podmnožina, potom je $f(A)$ kompaktní podmnožina N.
- Je-li $f : M \to \mathbb{R}$ spojitá reálná funkce a $A \subset M$ je kompaktní podmnožina, pak množina $f(A) \subset \mathbb{R}$ má minimum i maximum, tj. f na A nabývá nejmenší i největší hodnotu.

Jako použití poslední vlastnosti jsme si v LS uvedli (ale nedokázali) *Základní větu algebry*: každé nekonstantní polynomiální zobrazení f z komplexní roviny $\mathbb{C}$ do sebe ($\mathbb{C}$ se bere jako euklidovský prostor $\mathbb{R}^2$),

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 : \ \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ (a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n \geq 1) \ ,$$

má nulový bod, to jest, $f(z_0) = 0$ pro nějaké $z_0 \in \mathbb{C}$. Důkaz je uveden v zápisu z poslední přednášky v LS a bude se zkoušet.

Konečně, v LS jsme si uvedli i topologickou definici kompaktnosti, jejíž ekvivalenci s původní definicí si nyní dokážeme. Řekneme, že $A \subset M$ je *topologicky kompaktní*, když každý systém otevřených množin $\{X_i \mid i \in I\}$ v M pokrývající A — $\bigcup_{i \in I} X_i \supset A$ — má konečný podsystém $\{X_i \mid i \in J\}$, $J \subset I$ je konečná, který stále pokrývá A.

Věta (obě definice kompaktnosti jsou ekvivalentní). *Množina A v metrickém prostoru (M, d) je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti $A = M$ (proč? — úloha 11).

Implikace $\Rightarrow$. Nechť je (M, d) kompaktní a nechť

$$\bigcup_{i \in I} X_i = M$$

je jeho pokrytí otevřenými množinami. Nejprve ukážeme, že pro každé $\delta > 0$ existuje taková konečná množina $S \subset M$, že pro každý bod $a \in M$ existuje bod $b \in S$ s $d(a, b) < \delta$. Kdyby to nebyla pravda, snadno sestrojíme nekonečnou posloupnost $(a_n) \subset M$, že $d(a_m, a_n) \geq \delta$ pro každé dva indexy $m < n$ (jak? — úloha 11). Tato posloupnost však nemá, ve sporu s předpokladem o M, konvergentní podposloupnost. Pro každé $\delta > 0$ proto taková konečná množina $S \subset M$ existuje, nazveme ji *δ-sítí*. Vlastnost δ-sítě S tedy je, že

$$\bigcup_{b \in S} B(b, \delta) = M \ .$$

Předpokládejme nyní pro spor, že hořejší pokrytí M otevřenými množinami X_i nemá konečné podpokrytí. Z toho plyne, označíme-li si jako S_n, $n = 1, 2, \ldots$, $(1/n)$-síť, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje „zvláštní“ bod $b_n \in S_n$, že koule $B(b_n, 1/n)$ není obsažená v žádné z množin X_i. (Kdyby pro nějaké n zvláštní bod v S_n neexistoval, dokázali bychom z množin X_i vybrat konečné podpokrytí: pro každý bod $b \in S_n$ bychom vzali jednu množinu X_i splňující $X_i \supset B(b, 1/n)$, a tyto X_i by, díky vlastnosti $(1/n)$-sítě, pokrývaly M.) Uvažme posloupnost

$$(b_n) \subset M$$

zvláštních bodů. Podle předpokladu o M má konvergentní podposloupnost (b_{k_n}) s limitou $b \in M$. Protože X_i pokrývají M, existuje mezi nimi množina X_j, že $b \in X_j$. Vzhledem k otevřenosti X_j existuje poloměr $r > 0$, že $B(b, r) \subset X_j$. Vezmeme tak velké $N \in \mathbb{N}$, že $d(b_{k_N}, b) < r/2$ ($\lim b_{k_n} = b$) a současně $1/k_N < r/2$. Z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že pak

$$B(b_{k_N}, 1/k_N) \subset B(b, r) \subset X_j \ .$$

To je ale spor s tím, že b_{k_N} je zvláštní bod v S_{k_N}. Odvodili jsme spor, takže z množin X_i lze vybrat konečné podpokrytí a $\Rightarrow$ je dokázaná. Opačná implikace příště.

Úlohy

1. Dokažte, že v metrickém prostoru (M, d) je každá koule $B(a, r)$ otevřená množina a každá *uzavřená koule* $\overline{B}(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}$ uzavřená množina.
2. Je konečná množina v MP-u vždy uzavřená?
3. Množina v MP-u je *obojetná*, je-li současně otevřená i uzavřená. Nalezněte všechny obojetné množiny euklidovské roviny $\mathbb{R}^2$.
4. Nalezněte všechny obojetné množiny *diskrétního* MP-u; v něm mají každé dva různé body vzdálenost 1.
5. Kdy je diskrétní MP kompaktní?
6. Ukažte na příkladu, že nekonečné sjednocení uzavřených množin nemusí být uzavřená množina. Podobně pro sjednocení a otevřené množiny.
7. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Je uzavřená koule $\overline{B}(f, 1)$ v MP-u $(\mathcal{C}[a, b], d_{\max})$ funkcí spojitých na $[a, b]$, s maximovou metrikou, kompaktní?
8. Rozhodněte, zda průnik dvou kompaktních množin je kompaktní množina, a totéž pro sjednocení.
9. Tatáž otázka pro nekonečná sjednocení a nekonečné průniky.
10. Nechť $K \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřená koule (kruh) v euklidovské rovině se středem v počátku a poloměrem 1, která je pokrytá otevřenou množinou $A \supset K$. Dokažte, že
$$\inf_{x \in K, y \in \mathbb{R}^2 \setminus A} \|x - y\| > 0 \, .$$
11. Doplňte dva detaily předchozího důkazu: proč můžeme předpokládat, že $A = M$, a jak pomocí neexistence δ-sítě sestrojíme popsanou posloupnost.