Přednáška 1, 2. října 2013

Kapitola 1. Metrické prostory.

Definice metrického prostoru, izometrie. *Metrický prostor* je struktura formalizující jev vzdálenosti. Je to dvojice (M, d) množiny M a zobrazení se dvěma proměnnými

$$d: M \times M \to \mathbb{R} ,$$

zvaného *metrika* (nebo *vzdálenost*), která splňuje tyto tři axiomy (pro každé tři prvky $x, y, z \in M$):

a) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
b) $d(x, y) = d(y, x)$ (symetrie) a
c) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$ (trojúhelníková nerovnost).

Z axiomů snadno plyne (úloha 3), že vždy $d(x, y) \ge 0$ — hodnoty vzdálenosti jsou nezáporná čísla.

Izometrie metrických prostorů (M, d) a (N, e) je bijekce $f: M \to N$ zachovávající vzdálenosti: $d(x, y) = e(f(x), f(y))$ pro každé $x, y \in M$. Existuje-li taková bijekce, jsou prostory (M, d) a (N, e) *izometrické*, což znamená prakticky nerozlišitelné.

Příklady metrických prostorů. V následujících příkladech se axiomy a) a b) ověří obvykle snadno (nicméně viz úlohu 9). Dokázat trojúhelníkovou nerovnost bývá často obtížnější, viz závěrečné úlohy.

Příklad 1. $M = \mathbb{R}^n$ a $p \ge 1$ je reálné číslo. Na M definujeme metriky $d_p(x, y)$ vztahem

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

($x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$). Pro $n = 1$ dostáváme klasickou metriku $|x - y|$ na $\mathbb{R}$ a pro $p = 2, n \ge 2$ *euklidovskou metriku*

$$d_2(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} .$$

Euklidovskými prostory rozumíme metrické prostory $(\mathbb{R}^n, d_2)$ s euklidovskou metrikou. Pro $p = 1, n \ge 2$ dostáváme *pošťáckou metriku*

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

a pro $p \to \infty$ *maximovou metriku*

$$d_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i| \ .$$

Příklad 2. Za M vezmeme množinu všech omezených funkcí $f:\ X \to \mathbb{R}$ definovaných na množině X. Na M pak máme *supremovou metriku*

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \ .$$

Pokud $M = \mathcal{C}[a,b]$ (množina reálných funkcí definovaných a spojitých na intervalu $[a,b]$), supremum se nabývá a máme *maximovou metriku*

$$d(f,g) = \max_{x\in [a,b]} |f(x) - g(x)| \ .$$

Příklad 3. Vezmeme $M = \mathcal{C}[a,b]$ a reálné číslo $p \ge 1$. Podobně jako v prvním příkladu máme na M metriky

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \ dx \right)^{1/p} \ .$$

Hodnota $p = 1$ dává *integrální metriku* a $p \to \infty$ dává maximovou metriku z druhého příkladu (úloha 8). Důležitý je opět případ $p = 2$. Co je na exponentu $p = 2$ zvláštního? Ukazuje se, že metrika $d_2(\cdot,\cdot)$, v prvním i ve třetím příkladu, je odvozena ze skalárního součinu na vektorovém prostoru, a proto má řadu pěkných a důležitých vlastností.

Vezmeme-li širší třídu funkcí $M = \mathcal{R}[a,b]$ (funce mající na $[a,b]$ Riemannův integrál), je $d_p(f,g)$ definovaná, ale nesplňuje axiom a) a nedostáváme metriku. Změníme-li totiž hodnotu funkce $f \in \mathcal{R}[a,b]$ v jediném bodě, dostaneme odlišnou funkci $f_0 \in \mathcal{R}[a,b]$, ale $d_p(f,f_0) = 0$. (Tato potíž se odstraní tak, že místo s $\mathcal{R}[a,b]$ se pracuje s $\mathcal{R}[a,b]/\sim$ pro vhodnou relaci ekvivalence $\sim$.)

Příklad 4. Na souvislém grafu $G = (M,E)$ s množinou vrcholů M máme metriku

$$d(u,v) = \text{počet hran na nejkratší cestě v } G \text{ spojující } u \text{ a } v \ .$$

Příklad 5. Je-li A množina (abeceda), máme na množině $M = A^m$ slov délky m nad abecedou A tak zvanou *Hammingovu metriku* ($u = a_1a_2\dots a_m, v = b_1b_2\dots b_m$)

$$d(u,v) = \text{počet souřadnic } i, \text{ pro něž } a_i \ne b_i \ .$$

Měří míru odlišnosti obou slov—nejmenší počet změn v písmenech postačující k přeměně u ve v.

Příklad 6. Na dvourozměrné sféře

$$M = S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

máme metriku

$$d(x, y) = \text{délka nejkratší křivky ležící v } S_2 \text{ a spojující } x \text{ a } y\ .$$

Konkrétně je $d(x, y)$ rovna délce kratšího z obou oblouků, na něž body x a y dělí hlavní kružnici $K(x, y)$ jimi procházející. $K(x, y)$ je průnik S_2 s rovinou určenou počátkem souřadnic a body x a y. Leží-li tyto tři body na přímce (x a y jsou antipodální), není $K(x, y)$ určena jednoznačně, ale to nic nemění na tom, že pak $d(x, y) = \pi$. Tuto metriku nazveme *sférickou metrikou.* Můžeme ji uvažovat i na podmnožinách S_2, například na horní polosféře

$$S_2^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0\}\ .$$

Dokážeme, že S_2^+ se sférickou metrikou není izometrická žádné množině $X \subset \mathbb{R}^n$ s euklidovskou metrikou. Totéž tedy platí i pro celou sféru. Sféra ani polosféra se tedy nedají „splácnout“ do roviny ani žádného jiného euklidovského prostotu se zachováním vzdáleností.

Tvrzení (sféra není plochá). *Když (S_2^+, d) je sférická metrika na horní polosféře a (X, e), kde $X \subset \mathbb{R}^n$, je euklidovská metrika, potom neexistuje izometrie*

$$f:\ S_2^+ \to X\ .$$

Důkaz. Popíšeme vlastnost čtveřic bodů $t, u, v, w \in \mathbb{R}^n$ euklidovského prostoru, která není splněna ve sférické metrice. Je vyjádřena implikací:

$$e(t, u) = e(t, v) = e(u, v)\ \&\ e(t, w) = e(w, u) = \frac{e(t, u)}{2}$$

$$\Rightarrow e(w, v) = \frac{\sqrt{3} \cdot e(t, v)}{2}\ .$$

Předpoklad implikace říká, že body t, u, v tvoří rovnostranný trojúhelník se stranou délky x a že w má od t i u vzdálenost rovnou $x/2$. Pro body t, u, w

tak trojúhelníková nerovnost platí jako rovnost: $e(t,u) = e(t,w) + e(w,u)$. Podle geometrie euklidovského prostoru to znamená, že w leží na přímce procházející body t a u. Současně w leží v nadrovině těch bodů, které mají od t i u stejnou vzdálenost. Bod w je tedy středem úsečky tu. Celá konfigurace je rovinná (všechny čtyři body leží v jedné rovině) a úsečka vw je výška spuštěná z vrcholu v na stranu tu. Její délka, $e(v,w)$, je (podle Pythagorovy věty) $\sqrt{3}/2$ krát x, což přesně tvrdí závěr implikace.

Když na horní polosféře nalezneme čtyři body $t,u,v,w \in S_2^+$ splňující předpoklad předchozí implikace, ale ne už její závěr, budeme hotovi: izometrie mezi sférickou a euklidovskou metrikou neexistuje, neboť každá izometrie ze své definice implikaci zachovává. Pro to stačí vzít body

$$t = (1,0,0),\ u = (0,1,0),\ v = (0,0,1),\ w = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\ .$$

Lehce se vidí, že skutečně $d(t,u) = d(t,v) = d(u,v) = \pi/2$ a $d(t,w) = d(w,u) = \frac{d(t,u)}{2} = \frac{\pi}{4}$. Bod v je „severní pól“ a t,u,w leží na „rovníku“, w uprostřed mezi t a u. Ale všechny body na „rovníku“ (s $x_3 = 0$) mají od v tutéž vzdálenost $\pi/2$. Tedy $d(w,v) = d(t,v) = \pi/2 > (\sqrt{3}/2)d(t,v)$, a závěr implikace skutečně není splněn. □

V kostce řečeno, na horní polosféře jsme nalezli čtyři body, jejichž šest vzájemných sférických vzdáleností nelze realizovat jako euklidovské vzdálenosti. Nestačily by na to už tři body (úloha 12)? A co když místo polosféry vezmeme jen malou sférickou oblast, kam se naše konfigurace čtyř bodů nevejde (úloha 11)?

Příklad 7. Položme $M = \mathbb{Z}$ (množina celých čísel) a vezměme nějaké prvočíslo p, například $p = 3$. Pro $z \in \mathbb{Z}$ jako $\mathrm{ord}_p(z)$ označíme největší celé číslo $e \geq 0$ takové, že p^e dělí z; $\mathrm{ord}_p(0) := +\infty$. Na M definujeme tzv. *p-adickou metriku* ($(1/2)^{+\infty} = 0$)

$$d_p(x,y) = (1/2)^{\mathrm{ord}_p(x-y)}\ .$$

Například, když $p = 3$, tak $d_p(1,-161) = (1/2)^4 = 1/16$, protože $162 = 2 \cdot 3^4$.

Dá se ukázat, že p-adická metrika je nejen metrika, ale splňuje dokonce toto zesílení trojúhelníkové nerovnosti:

$$d_p(x,y) \leq \max(d_p(x,z), d_p(z,y))\ .$$

Metrikám splňujícím tuto silnější verzi trojúhelníkové nerovnosti se říká *ultrametriky* (nebo též *nearchimedovské metriky*). Pro jednu vlastnost ultrametrik viz úlohu 14.

Když položíme $\|z\|_p = d_p(z, 0)$, dostaneme tzv. *p-adickou normu*. Protože $\mathrm{ord}_p(z_1 z_2) = \mathrm{ord}_p(z_1) + \mathrm{ord}_p(z_2)$ pro každá dvě celá čísla z_1 a z_2, je p-adická norma multiplikativní: $\|z_1 z_2\|_p = \|z_1\|_p \cdot \|z_2\|_p$. Trojúhelníková nerovnost přechází na nerovnost $\|z_1 + z_2\|_p \leq \|z_1\|_p + \|z_2\|_p$.

Obecně nazveme zobrazení

$$\| \cdot \| : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

normou na okruhu celých čísel, když (i) vždy $\|z\| \geq 0$, $\|z\| = 0 \iff z = 0$ a $\|z\| \neq 0$ pro nějaké z, (ii) $\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$ (multiplikativita) a (iii) $\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$ (trojúhelníková nerovnost). Kromě p-adické normy je příkladem normy na celých číslech obyčejná absolutní hodnota $\| \cdot \| = | \cdot |$. A. Ostrowski (1893–1986) dokázal, že jiné (netriviální) normy na $\mathbb{Z}$ nejsou. Přesně jeho věta říká následující.

Věta (Ostrowski, 1916). *Normy na celých číslech $\mathbb{Z}$ jsou právě a jen jednoho z následujících tří druhů.*

1. *Triviální norma: $\|0\| = 0$ a $\|z\| = 1$ pro $z \neq 0$.*
2. *Absolutní hodnota: $\|z\| = |z|^c$, kde $c \in (0, 1]$ je konstanta.*
3. *p-adická norma: $\|z\| = c^{\mathrm{ord}_p(z)}$, kde p je prvočíslo a $c \in (0, 1)$ je konstanta.*

Tuto větu dokazovat nebudeme.

Úlohy

1. Dokažte trojúhelníkovou nerovnost pro Hammingovu metriku.
2. Dokažte trojúhelníkovou nerovnost pro grafovou metriku.
3. Ukažte, že z axiomů metrického prostoru plyne nezápornost metriky.
4. Plyne symetrie z ostatních axiomů metriky?

5. Dokažte vzorec pro maximovou metriku: $\lim_{p\to+\infty} d_p(x,y) = d_\infty(x,y)$.
6. Odvoďte z Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti ($a_i, b_i \in \mathbb{R}$)

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

trojúhelníkovou nerovnost pro euklidovskou metriku. Cauchyovu–Schwarzovu nerovnost dokažte též.

7. Ověřte trojúhelníkovou nerovnost pro supremovou metriku.
8. Dokažte vzorec pro maximovou metriku pro funkce: je-li f spojitá na $[a,b]$, pak

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

9. Ověřte v příkladu 3 pro $M = \mathcal{C}[a,b]$ axiom a) metrického prostoru.
10. Dokažte pro sférickou metriku trojúhelníkovou nerovnost.
11. Dokažte, že žádný sférický vrchlík (část sféry odseknutá rovinou) se sférickou metrikou není izometrický množině v $\mathbb{R}^n$ s euklidovskou metrikou.
12. Dá se libovolný sférický trojúhelník izometricky realizovat v rovině (s euklidovskou metrikou)?
13. Ověřte, že p-adická metrika je opravdu ultrametrika.
14. Dokažte tuto neintuitivní vlastnost ultrametrického prostoru: každý trojúhelník je rovnoramenný.