Přednáška 14, 11. ledna 2016

Pokračujeme v důkazu hlavní věty o holomorfních funkcích. Dokazujeme, že celistvá funkce (tj. funkce $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, která má pro každé $z\in\mathbb{C}$ derivaci $f'(z)$), má rozvoj do mocninné řady $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$.

Nechť $z,t\in\mathbb{C}$ a $|t|>|z|$. Pak geometrická řada dává

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1-z/t}=\frac{1}{t}+\frac{z}{t^2}+\frac{z^2}{t^3}+\dots\ .$$

Pro pevné z a $\delta>0$ je konvergence této řady stejnoměrná v parametru t, pokud $|t|>|z|+\delta$.

Připomeňme si, že kružnice C s poloměrem $R>0$ a středem 0 je dána jako $C:\ [0,2\pi]\to\mathbb{C}$, $C(t)=Re^{it}=R(\cos t+i\sin t)$ — je tedy orientována proti směru hodinových ručiček — a že jsme kdysi spočetli, že

$$\int_C\frac{dz}{z}=2\pi i\ .$$

Vzoreček teď zobecníme.

Lemma. *Nechť $z\in\mathbb{C}$ a C je kružnice se středem v 0 a poloměrem větším než $|z|$. Pak*

$$\int_C\frac{dt}{t-z}=2\pi i\ .$$

Důkaz. Zlomek $1/(t-z)$ v integrandu nahradíme předchozí řadou. Díky stejnoměrné konvergenci ji můžeme integrovat člen po členu (odpovídající větu jsme si dokázali jen pro reálné funkce, ale platí i pro komplexní) a dostaneme

$$\int_C\frac{dt}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\int_C\frac{dt}{t^{n+1}}=\int_C\frac{dt}{t}=2\pi i\ ,$$

protože integrály s $n\geq 1$ jsou všechny nulové (jejich integrand t^{-n-1} má na $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ primitivní funkci $-t^{-n}/n$). $\square$

Věta (Cauchyho $\int$-ní vzorec). *Nechť $z\in\mathbb{C}$, C je kružnice se středem v 0 a poloměrem větším než $|z|$ a $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je celistvá funkce. Pak*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)\,dt}{t-z}\ .$$

Důkaz. Podle věty o obdélníku II a lemmatu máme

$$\int_C \frac{f(t)-f(z)}{t-z}\,dt = 0, \quad \text{takže} \quad \int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt = f(z)\int_C \frac{dt}{t-z} = 2\pi i f(z)\ ,$$

což je Cauchyův vzorec □

S pomocí Cauchyho vzorce teď vše snadno dokážeme. Funkce $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ buď celistvá a $z\in\mathbb{C}$ buď libovolný bod. Vezmeme jakoukoli kružnici C se středem v 0 a poloměrem větším než $|z|$ a zlomek $1/(t-z)$ v Cauchyho vzorci nahradíme hořejší řadou. Díky stejnoměrné konvergenci ji můžeme integrovat člen po členu a dostaneme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_C \frac{f(t)\,dt}{t^{n+1}}\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\ ,\ a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t^{n+1}}\ .$$

Tato rovnost platí pro každé z ležící uvnitř C. Podle tvrzení o jednoznačnosti koeficientů mocninné řady jsou tyto koeficienty nezávislé na C a proto rovnost platí pro každé $z\in\mathbb{C}$. Dále, jak víme, funkce daná mocninnou řadou má (na disku konvergence) derivace všech řádů, jež jsou dány mocninnými řadami vzniklými derivací člen po členu. Tedy

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k\geq n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)a_k z^{k-n} \quad \text{a} \quad f^{(n)}(0) = n!a_n$$

— a_n je nevyhnutelně n-tý Taylorův koeficient $f^{(n)}(0)/n!$ funkce f. Tím je důkaz dokončen. □

Ještě tři poznámky, jak zazněly zhruba na přednášce. Zaprvé, stejnoměrnou konvergenci řady

$$\frac{f(t)}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(t)z^n}{t^{n+1}},\ t\in C$$

($z\in\mathbb{C}$ je pevné a C je kružnice se středem v 0 a poloměrem větším než $|z|$) máme nejen díky geometrické řadě, ale i díky tomu, že f je na C omezená.

Zadruhé, řekněme si jednodušší důkaz tvrzení o jednoznačnosti koeficientů mocninné řady, než jak byl na 12. přednášce. $M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

$a_n \in \mathbb{C}$, je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Předpokládáme, že $M(z_n) = 0$ na nějaké posloupnosti $z_1, z_2, \ldots$ splňující $z_n \to 0$, $z_n \neq 0$ a samozřejmě $|z_n| < R$. Ukážeme, že pak $a_n = 0$ pro každé n. Kdyby ne, nechť r je nejmenší index, že $a_r \neq 0$. Pak (formálně)

$$M(z) = z^r(a_r + a_{r+1}z + \ldots) = z^r N(z)\ .$$

Protože $z^r \neq 0$ pro $z \neq 0$, $N(z)$ je mocninná řada s týmž poloměrem konvergence R a $N(0) = a_r \neq 0$, na nějakém okolí 0 je $|N(z)| > |a_r|/2$ ($N(z)$ je na $B(0, R)$ spojitá funkce), speciálně $N(z) \neq 0$ na tomto okolí, a tedy $M(z) \neq 0$ na stejném ale prstencovém okolí 0. Což je ale spor s předpokladem o bodech z_n.

Zatřetí ukážeme, že $\int_\gamma dz/z \neq 0$, kde γ je uzavřená křivka obtáčející počátek, rovná kladně orientované hranici čtverce S s vrcholy $\pm 1 \pm i$. To vlastně pro celý důkaz stačí, není nutné vědět, že to je přesně $2\pi i$. Vrcholy S jsou $a = -1 - i$, $b = 1 - i$, $c = 1 + i$ a $d = -1 + i$ (bereme je proti směru hodinových ručiček). Nechť $A = \overline{ab}$ je orientovaná dolní strana čtverce a $B = \overline{bc}$, $C = \overline{cd}$ a $D = \overline{da}$ je po řadě jeho pravá, horní a levá strana. Pak $\int_\gamma dz/z = \int_A dz/z + \int_B dz/z + \int_C dz/z + \int_D dz/z$. Integrál $\int_A dz/z$ je vlastně limita pro $k \to \infty$ z výrazu

$$V_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{(b-a)/k}{a + (j/k)(b-a)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{2/k}{a + 2j/k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(2/k)(2j/k - 1 + i)}{(2j/k - 1)^2 + 1}$$

(úsečku A jsme rozdělili body $a_j = a + (j/k)(b-a)$, $j = 0, 1, \ldots, k$, na k stejných dílů a pro funkci $f(z) = 1/z$ jsme vzali riemannovskou, historicky správně řečeno cauchyovskou, sumu $V_k = \sum_{j=1}^k f(a_j)(a_j - a_{j-1})$). V_k je nenulové číslo, odseknuté od 0 nezávisle na k, protože pro jeho imaginární část máme dolní odhad

$$\mathrm{Im}(V_k) = \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(2j/k - 1)^2 + 1} \geq \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2} \geq 1\ .$$

To platí pro každé k a v limitě se zachová, takže $\mathrm{Im}(\int_A dz/z) \geq 1$ a $\int_A dz/z$ určitě není 0. Ale co integrály $\int_B dz/z$, $\int_C dz/z$ a $\int_D dz/z$ přes zbylé strany S? *Pointa celého vtipu je v tom, že bez dalšího počítání vidíme, že tyto tři integrály se rovnají* $\int_A dz/z$! Zlomky v první sumě pro V_k rozšíříme číslem i a dostaneme

$$V_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{(bi - ai)/k}{ai + (j/k)(bi - ai)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(c-b)/k}{b + (j/k)(c-b)}$$

neboť $ai = b$ a $bi = c$ (ovšem též $ci = d$ a $di = a$). To je ale cauchyovská suma pro tutéž funkci $f(z) = 1/z$ a úsečku B, takže limita pro $k \to \infty$ dává $\int_A dz/z = \lim V_k = \int_B dz/z$. Totéž pro strany C a D. Tedy $\int_\gamma dz/z = 4 \int_A dz/z \neq 0$.

Úlohy

1. Spočítejte, že $\int_\gamma dz/z = 2\pi i$, kde γ je popsaná hranice čtverce. Když jsme integrovali přes *kulatou* kružnici, bylo jasné, odkud se π bere. Teď ale integrujeme racionální funkci $1/z$ přes *hranatou* hranici čtverce a přesto stále vychází π. Jak je to možné?

2. Proč argument ve třetí poznámce nedokazuje také, že třeba $\int_\gamma dz/z^2 \neq 0$? (Víme, že $\int_\gamma dz/z^2 = 0$, protože $1/z^2$ má na $z \neq 0$ primitivní funkci, totiž $-1/z$.)