

Přednáška 13, 4. ledna 2016

Budeme dokazovat analytičnost holomorfních funkcí. Pro jednoduchost se omezíme na celistvé funkce, tj. funkce holomorfní na celém \mathbb{C} . Dokážeme následující.

Věta (celistvá funkce je globálně analytická). *Nechť $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je celistvá funkce. Pak pro každé $n = 0, 1, 2, \dots$ existuje $f^{(n)}(0)$ a pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí, že*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

— f je součtem své Taylorovy řady se středem v počátku.

Pro důkaz budeme potřebovat komplexní integraci. Připomínáme ML odhady: když $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ je křivka, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce (D je otevřená množina), pak

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq ML,$$

kde M je maximum $|f(z)|$ pro z probíhající křivku (tj. její obraz $\{\gamma(t) \mid a \leq t \leq b\}$) a L je její délka. Dále, když f má na D primitivní funkci, čili existuje holomorfní funkce $F : D \rightarrow \mathbb{C}$, že $F' = f$ na D , pak (stejně jako pro reálný Riemannův integrál)

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (F(\gamma(t)))' dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

— integrál se rovná rozdílu hodnot primitivní funkce v koncovém a počátečním bodu křivky. Je-li navíc γ uzavřená, je v této situaci $\int_{\gamma} f = 0$.

Obdélníkem R budeme rozumět množinu $R = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a_1 \leq a \leq a_2, b_1 \leq b \leq b_2\}$, kde $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ (takže R má strany rovnoběžné s osami). Hranici obdélníku (což je uzavřená křivka, dokonce lomená čára) budeme vždy orientovat proti směru hodinových ručiček.

Věta (o obdélníku). *Nechť $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je celistvá funkce, $R \subset \mathbb{C}$ je libovolný obdélník a $\gamma = \partial R$ je jeho hranice. Pak*

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Důkaz. Máme rovnost

$$I := \int_{\gamma} f = \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} f ,$$

kde γ_j jsou (proti směru hodinových ručiček orientované) hranice čtyř polovičních obdélníků R_j , na něž je R rozdělen dvěma úsečkami spojujícími středy protilehlých stran. To plyne z toho, že integrály přes společné úsečky křivek γ_j se díky opačné orientaci ruší. Z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že pro nějaké $j_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$ je

$$\left| \int_{\gamma_{j_0}} f \right| \geq \frac{|I|}{4} .$$

Co se týče délek křivek, máme

$$|\gamma_j| = |\gamma|/2, \quad j = 1, \dots, 4 .$$

Obdélník R_{j_0} stejným způsobem rozdělíme na čtyři poloviční obdélníky. Mezi nimi je opět (alespoň) jeden takový, že integrál f přes jeho hranici je v absolutní hodnotě alespoň $\frac{1}{4} \left| \int_{\gamma_{j_0}} f \right| \geq \frac{1}{16} |I|$. Toto opakujeme a dostaneme takovou nekonečnou posloupnost do sebe vnořených obdélníků $R = R_1 \supset R_2 \supset \dots$, že R_{n+1} má poloviční velikost oproti R_n a jejich hranice $\gamma_n = \partial R_n$ splňují

$$\left| \int_{\gamma_n} f \right| \geq \frac{|I|}{4^n} \quad \text{a} \quad |\gamma_n| = \frac{|\gamma|}{2^n} .$$

Díky kompaktnosti existuje (jediný) bod $z_0 \in \mathbb{C}$, že

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n = \{z_0\}$$

(úloha 1). Protože $f'(z_0)$ existuje a $\gamma_n \rightarrow z_0$ pro $n \rightarrow \infty$, pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$, že pro každé z ležící na (obrazu) γ_n je

$$f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) = \delta(z) \cdot (z - z_0), \quad |\delta(z)| < \varepsilon .$$

Pak

$$\begin{aligned} \frac{|I|}{4^n} &\leq \left| \int_{\gamma_n} f \right| \leq \left| \int_{\gamma_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| + \left| \int_{\gamma_n} \delta(z) \cdot (z - z_0) dz \right| \\ &\leq 0 + \varepsilon |\gamma_n| \cdot |\gamma_n| = \varepsilon (|\gamma|/2^n)^2 , \end{aligned}$$

díky nulovosti předposledního integrálu $(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))$ má na \mathbb{C} primitivní funkci $f(z_0)z + f'(z_0)(z - z_0)^2/2$ a díky ML odhadu posledního integrálu (jistě $|z - z_0| \leq |\gamma_n|$ pro každý bod z na γ_n a délka křivky γ_n je $\frac{1}{2^n}|\gamma|$). Takže

$$|I| \leq \varepsilon |\gamma|^2$$

pro každé $\varepsilon > 0$, a proto $I = 0$. □

Důkaz funguje beze změny a věta platí i v obecnější situaci, kdy je f holomorfní jen na otevřené podmnožině $D \subset \mathbb{C}$ a $R \subset D$.

Tvrzení (o primitivní funkci). *Každá celistvá funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ má na \mathbb{C} primitivní funkci F .*

Důkaz. Pro $u, v \in \mathbb{C}$ zavedeme značení

$$\int_u^v := \int_{\gamma(u,v)} f,$$

kde $\gamma(u, v)$ je (víceméně) jednoznačně určená křivka spojující (v tomto pořadí) body u a v , jež sestává z vodorovné (tj. rovnoběžné s reálnou osou) úsečky začínající v u a na ni navazující svislé (tj. rovnoběžné s imaginární osou) úsečky končící ve v . Pro libovolné tři body $u, v, w \in \mathbb{C}$ máme rovnost

$$\int_u^v + \int_v^w - \int_u^w = \int_{\sigma} f,$$

kde σ je křivka $\gamma(u, v) + \gamma(v, w) - \gamma(u, w)$ (tj. z u jdu po $\gamma(u, v)$ do v , pak z v po $\gamma(v, w)$ do w a pak z w v opačném směru po $\gamma(u, w)$ zpět do u). Křivka σ (přesněji, její obraz) je tedy *uzavřená pravoúhlá lomená čára*. Tím rozumíme uzavřenou lomenou čáru v \mathbb{C} , jejíž každá úsečka je vodorovná nebo svislá. Navíc naše σ má nejvýše šest bodů zlomu. Není těžké ukázat, že každá uzavřená pravoúhlá lomená čára (s jakýmkoli počtem zlomů) se dá napsat jako součet hranic obdélníků (úloha 2). Například, když $u = 0$, $v = 1 + i$ a $w = -1 - i$, pak má σ body zlomu -1 , 1 , v , $-1 + i$ a w (u leží na úsečce $(-1, 1) \subset \gamma$ a není zlomem) a $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, kde σ_1 je hranice obdélníku s vrcholy -1 , 1 , v a $-1 + i$ a σ_2 je hranice degenerovaného obdélníku s vrcholy -1 a w (a nulovou šířkou). (Nakreslete si obrázek, já jsem na to líný.) Poslední integrál je tedy díky předchozí větě (a úloze 2) vždy nulový a máme rovnost

$$\int_u^v - \int_u^w = \int_w^v.$$

Po této úvaze definujeme funkci F . Pro $z \in \mathbb{C}$ položíme

$$F(z) := \int_0^z = \int_{\gamma(0,z)} f .$$

Pro každé $h \in \mathbb{C}$ podle předchozí úvahy (použité pro $u = 0, v = z + h$ a $w = z$) platí rovnost

$$F(z + h) - F(z) = \int_z^{z+h} = \int_{\gamma(z,z+h)} f .$$

Zřejmě $\int_z^{z+h} 1 = h$ (pomocí primitivní funkce). Tedy ($h \neq 0$)

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{\gamma(z,z+h)} (f(t) - f(z)) dt .$$

Protože $|\gamma(z, z+h)| \leq 2|h|$ a f je v bodě z spojitá (má tam dokonce derivaci), ML odhad dává, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro $0 < |h| < \delta$ je poslední integrál v absolutní hodnotě nejvýše $2|h|\varepsilon$. Pro $h \rightarrow 0$ tedy jde výraz na pravé straně k 0, tedy i ten na levé a $F'(z) = f(z)$, což jsme potřebovali dokázat. \square

Konstrukci primitivní funkce pomocí integrálu jsme viděli již v MAII v kapitole o Riemannově integrálu.

Tvrzení (integrál přes uzavřenou křivku je 0). Pro každou celistvou funkci $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a každou uzavřenou křivku γ je

$$\int_{\gamma} f = 0 .$$

Důkaz. Podle předchozího tvrzení má f na \mathbb{C} primitivní funkci. Podle poznámky výše tedy $\int_{\gamma} f = 0$. \square

Obě předchozí tvrzení a větu nyní rozšíříme na třídu funkcí mírně zobecnující celistvé funkce. Pro celistvou funkci $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a bod $a \in \mathbb{C}$ definujeme novou funkci $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jako

$$g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \text{ pro } z \neq a \text{ a } g(a) = f'(a) .$$

Funkce g je zjevně spojitá na \mathbb{C} a holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, ale zda existuje $g'(a)$ není jasné. (Pomocí vlastností holomorfních funkcí lze dokázat, že existuje — úloha 3.)

Věta (o obdélníku II). *Je-li $R \subset \mathbb{C}$ libovolný obdélník a γ je jeho hranice, pak předchozí funkce g také splňuje, že*

$$\int_{\gamma} g = 0 .$$

V důsledku má g na \mathbb{C} primitivní funkci a $\int_{\gamma} g = 0$ i pro každou uzavřenou křivku γ .

Důkaz. Leží-li a mimo R , je $\int_{\gamma} g = 0$ podle věty o obdélníku a poznámky za ní. Uvažme případ, že bod $a = a_1 + a_2 i$ leží uvnitř R . Nechť $\delta > 0$ je malé číslo. Dvěma svislými a dvěma vodorovnými přímkami danými rovnicemi $\operatorname{Re}(z) = a_1 - \delta$, $\operatorname{Re}(z) = a_1 + \delta$, $\operatorname{Im}(z) = a_2 - \delta$ a $\operatorname{Im}(z) = a_2 + \delta$ rozdělíme R na devět menších obdélníků, které očísloujeme jako R_1, R_2, \dots, R_9 zleva doprava a shora dolů. Tedy a leží uvnitř R_5 a vně ostatních. Jejich hranice označíme jako $\gamma_j = \partial R_j$, $j = 1, 2, \dots, 9$. Máme $|\gamma_5| = 8\delta$. Nechť $M = \max_{z \in R} |g(z)|$ (g je na R spojitá). Jako v důkazu věty o obdélníku vyjádříme $\int_{\gamma} g$ součtem integrálů přes hranice devíti menších obdélníků:

$$\left| \int_{\gamma} g \right| = \left| \sum_{j=1}^9 \int_{\gamma_j} g \right| \leq 8 \cdot 0 + M \cdot 8\delta = 8M\delta ,$$

díky ML odhadu $\int_{\gamma_5} g$ a nulovosti ostatních osmi integrálů. To platí pro každé $\delta > 0$, takže $\int_{\gamma} g = 0$.

Pokud a leží na γ , postupujeme podobně pomocí rozdělení R na šest menších obdélníků nebo na čtyři, podle toho zda a leží uvnitř strany obdélníku R nebo se rovná jeho rohu.

Důkazy toho, že g má na \mathbb{C} primitivní funkci a že $\int_{\gamma} g = 0$ pro každou uzavřenou křivku γ už probíhají beze změny. \square

Úlohy

1. Dokažte pomocí věty o vnořených intervalech, že průnik všech obdélníků R_n je jediný bod.

2. Dokažte, že každá uzavřená pravoúhlá lomená čára v \mathbb{C} je součet hranic obdélníků.
3. Nechť $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá na \mathbb{C} a holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Dokažte, že i $f'(a)$ existuje. (Návod: pomocí následující úlohy.)
4. Dokažte, že když je $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá a $\int_{\gamma} f = 0$ pro hranici γ každého obdélníka, potom je f na \mathbb{C} holomorfní. (tzv. Morerova věta.)