Přednáška 13, 8. ledna 2014

Budeme dokazovat analytičnost holomorfních funkcí. Pro jednoduchost se omezíme na celistvé funkce, tj. funkce holomorfní na celém $\mathbb{C}$. Dokážeme následující.

Věta (celistvá funkce je globálně analytická). *Nechť $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je celistvá funkce. Pak pro každé $n=0,1,2,\ldots$ existuje $f^{(n)}(0)$ a pro každé $z\in\mathbb{C}$ platí, že*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

— f je součtem své Taylorovy řady se středem v počátku.

Pro důkaz budeme potřebovat komplexní integraci. Připomínáme ML odhady: když $\gamma:\ [a,b]\to D$ je křivka, $f:\ D\to\mathbb{C}$ je spojitá funkce (D je otevřená množina), pak

$$\left|\int_\gamma f\right|\le ML\ ,$$

kde M je maximum $|f(z)|$ pro z probíhající křivku (tj. její obraz $\{\gamma(t)\mid a\le t\le b\}$) a L je její délka. Dále, když f má na D primitivní funkci, čili existuje holomorfní funkce $F:\ D\to\mathbb{C}$, že $F'=f$ na D, pak (stejně jako pro reálný Riemannův integrál)

$$\int_\gamma f=\int_a^b F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\ dt=\int_a^b (F(\gamma(t)))'\ dt=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))$$

— integrál se rovná rozdílu hodnot primitivní funkce v koncovém a počátečním bodu křivky. Je-li navíc γ uzavřená, je v této situaci $\int_\gamma f=0$.

Obdélníkem R budeme rozumět množinu $R=\{a+bi\in\mathbb{C}\mid a_1\le a\le a_2, b_1\le b\le b_2\}$, kde $a_j,b_j\in\mathbb{R}$ (takže R má strany rovnoběžné s osami). Hranici obdélníku (což je uzavřená křivka, dokonce lomená čára) budeme vždy orientovat proti směru hodinových ručiček.

Věta (o obdélníku). *Nechť $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je celistvá funkce, $R\subset\mathbb{C}$ je libovolný obdélník a $\gamma=\partial R$ je jeho hranice. Pak*

$$\int_\gamma f=0\ .$$

Důkaz. (Na přednášce jsem ho podrobně nevykládal.) Máme rovnost

$$I := \int_\gamma f = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j} f \ ,$$

kde γ_j jsou (proti směru hodinových ručiček orientované) hranice čtyř polovičních obdélníků R_j, na něž je R rozdělen dvěma úsečkami spojujícími středy protilehlých stran. To plyne z toho, že integrály přes společné úsečky křivek γ_j se díky opačné orientaci ruší. Z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že pro nějaké $j_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$ je

$$\left| \int_{\gamma_{j_0}} f \right| \geq \frac{|I|}{4} \ .$$

Co se týče délek křivek, máme

$$|\gamma_j| = |\gamma|/2, \ j = 1, \dots, 4 \ .$$

Obdélník R_{j_0} stejným způsobem rozdělíme na čtyři poloviční obdélníky. Mezi nimi je opět (alespoň) jeden takový, že integrál f přes jeho hranici je v absolutní hodnotě alespoň $\frac{1}{4}|\int_{\gamma_{j_0}} f| \geq \frac{1}{16}|I|$. Toto opakujeme a dostaneme takovou nekonečnou posloupnost do sebe vnořených obdélníků $R = R_1 \supset R_2 \supset \dots$, že R_{n+1} má poloviční velikost oproti R_n a jejich hranice $\gamma_n = \partial R_n$ splňují

$$\left| \int_{\gamma_n} f \right| \geq \frac{|I|}{4^n} \ \text{ a } \ |\gamma_n| = \frac{|\gamma|}{2^n} \ .$$

Díky kompaktnosti existuje (jediný) bod $z_0 \in \mathbb{C}$, že

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n = \{z_0\}$$

(úloha 1). Protože $f'(z_0)$ existuje a $\gamma_n \to z_0$ pro $n \to \infty$, pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$, že pro každé z ležící na (obrazu) γ_n je

$$f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) = \delta(z) \cdot (z - z_0), \ |\delta(z)| < \varepsilon \ .$$

Pak

$$\begin{aligned}\frac{|I|}{4^n} &\le \left|\int_{\gamma_n} f\right| \le \left|\int_{\gamma_n} (f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0))\;dz\right| + \left|\int_{\gamma_n} \delta(z)\cdot(z-z_0)\;dz\right| \\ &\le 0+\varepsilon|\gamma_n|\cdot|\gamma_n| = \varepsilon(|\gamma|/2^n)^2\;,\end{aligned}$$

díky nulovosti předposledního integrálu ($f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ má na $\mathbb{C}$ primitivní funkci $f(z_0)z+f'(z_0)(z-z_0)^2/2$) a díky ML odhadu posledního integrálu (jistě $|z-z_0| \le |\gamma_n|$ pro každý bod z na γ_n a délka křivky γ_n je $\frac{1}{2^n}|\gamma|$). Takže

$$|I| \le \varepsilon|\gamma|^2$$

pro každé $\varepsilon > 0$, a proto $I = 0$. □

Důkaz funguje beze změny a věta platí i v obecnější situaci, kdy je f holomorfní jen na otevřené podmnožině $D \subset \mathbb{C}$ a $R \subset D$.

Tvrzení (o primitivní funkci). *Každá celistvá funkce $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má na $\mathbb{C}$ primitivní funkci F.*

Důkaz. Pro $u, v \in \mathbb{C}$ zavedeme značení

$$\int_u^v := \int_{\gamma(u,v)} f\;,$$

kde $\gamma(u,v)$ je (víceméně) jednoznačně určená křivka spojující (v tomto pořadí) body u a v, jež sestává z vodorovné (tj. rovnoběžné s reálnou osou) úsečky začínající v u a na ni navazující svislé (tj. rovnoběžné s imaginární osou) úsečky končící ve v. Pro libovolné tři body $u, v, w \in \mathbb{C}$ máme rovnost

$$\int_u^v + \int_v^w - \int_u^w = \int_\sigma f\;,$$

kde σ je křivka $\gamma(u,v)+\gamma(v,w)-\gamma(u,w)$ (tj. z u jdu po $\gamma(u,v)$ do v, pak z v po $\gamma(v,w)$ do w a pak z w v opačném směru po $\gamma(u,w)$ zpět do u). Křivka σ (přesněji, její obraz) je tedy *uzavřená pravoúhlá lomená čára.* Tím rozumíme uzavřenou lomenou čáru v $\mathbb{C}$, jejíž každá úsečka je vodorovná nebo svislá. Navíc naše σ má nejvýše šest bodů zlomu. Není těžké ukázat, že každá uzavřená pravoúhlá lomená čára (s jakýmkoli počtem zlomů) se dá napsat jako součet hranic obdélníků (úloha 2). Například, když $u = 0$, $v = 1+i$ a $w = -1-i$, pak má σ body zlomu -1, 1, v, $-1+i$ a w (u leží na úsečce

$(-1,1) \subset \gamma$ a není zlomem) a $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, kde σ_1 je hranice obdélníku s vrcholy $-1, 1, v$ a $-1+i$ a σ_2 je hranice degenerovaného obdélníku s vrcholy -1 a w (a nulovou šířkou). (Nakreslete si obrázek, já jsem na to líný.) Poslední integrál je tedy díky předchozí větě (a úloze 2) vždy nulový a máme rovnost

$$\int_u^v - \int_u^w = \int_w^v .$$

Po této úvaze definujeme funkci F. Pro $z \in \mathbb{C}$ položíme

$$F(z) := \int_0^z = \int_{\gamma(0,z)} f .$$

Pro každé $h \in \mathbb{C}$ podle předchozí úvahy (použité pro $u = 0, v = z + h$ a $w = z$) platí rovnost

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} = \int_{\gamma(z,z+h)} f .$$

Zřejmě $\int_z^{z+h} 1 = h$ (pomocí primitivní funkce). Tedy ($h \neq 0$)

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{\gamma(z,z+h)} (f(t) - f(z))\, dt .$$

Protože $|\gamma(z, z+h)| \leq 2|h|$ a f je v bodě z spojitá (má tam dokonce derivaci), ML odhad dává, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro $0 < |h| < \delta$ je poslední integrál v absolutní hodnotě nejvýše $2|h|\varepsilon$. Pro $h \to 0$ tedy jde výraz na pravé straně k 0, tedy i ten na levé a $F'(z) = f(z)$, což jsme potřebovali dokázat. □

Konstrukci primitivní funkce pomocí integrálu jsme viděli již v MAII v kapitole o Riemannově integrálu.

Tvrzení (integrál přes uzavřenou křivku je 0). *Pro každou celistvou funkci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a každou uzavřenou křivku γ je*

$$\int_\gamma f = 0 .$$

Důkaz. Podle předchozího tvrzení má f na $\mathbb{C}$ primitivní funkci. Podle poznámky výše tedy $\int_\gamma f = 0$. $\square$

Obě předchozí tvrzení a větu nyní rozšíříme na třídu funkcí mírně zobecňující celistvé funkce. Pro celistvou funkci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a bod $a \in \mathbb{C}$ definujeme novou funkci $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jako

$$g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \;\text{ pro } z \neq a \;\text{ a }\; g(a) = f'(a)\ .$$

Funkce g je zjevně spojitá na $\mathbb{C}$ a holomorfní na $\mathbb{C}\backslash\{a\}$, ale zda existuje $g'(a)$ není jasné. (Pomocí vlastností holomorfních funkcí lze dokázat, že existuje — úloha 3.)

Věta (o obdélníku II). *Je-li $R \subset \mathbb{C}$ libovolný obdélník a γ je jeho hranice, pak předchozí funkce g také splňuje, že*

$$\int_\gamma g = 0\ .$$

V důsledku má g na $\mathbb{C}$ primitivní funkci a $\int_\gamma g = 0$ i pro každou uzavřenou křivku γ.

Důkaz. Leží-li a mimo R, je $\int_\gamma g = 0$ podle věty o obdélníku a poznámky za ní. Uvažme případ, že bod $a = a_1 + a_2 i$ leží uvnitř R. Nechť $\delta > 0$ je malé číslo. Dvěma svislými a dvěma vodorovnými přímkami danými rovnicemi $\mathrm{Re}(z) = a_1 - \delta$, $\mathrm{Re}(z) = a_1 + \delta$, $\mathrm{Im}(z) = a_2 - \delta$ a $\mathrm{Im}(z) = a_2 + \delta$ rozdělíme R na devět menších obdélníků, které očíslujeme jako $R_1, R_2, \ldots, R_9$ zleva doprava a shora dolů. Tedy a leží uvnitř R_5 a vně ostatních. Jejich hranice označíme jako $\gamma_j = \partial R_j$, $j = 1, 2, \ldots, 9$. Máme $|\gamma_5| = 8\delta$. Nechť $M = \max_{z \in R} |g(z)|$ (g je na R spojitá). Jako v důkazu věty o obdélníku vyjádříme $\int_\gamma g$ součtem integrálů přes hranice devíti menších obdélníků:

$$\left| \int_\gamma g \right| = \left| \sum_{j=1}^{9} \int_{\gamma_j} g \right| \leq 8 \cdot 0 + M \cdot 8\delta = 8M\delta\ ,$$

díky ML odhadu $\int_{\gamma_5} g$ a nulovosti ostatních osmi integrálů. To platí pro každé $\delta > 0$, takže $\int_\gamma g = 0$.

Pokud a leží na γ, postupujeme podobně pomocí rozdělení R na šest menších obdélníků nebo na čtyři, podle toho zda a leží uvnitř strany obdélníku R nebo se rovná jeho rohu.

Důkazy toho, že g má na $\mathbb{C}$ primitivní funkci a že $\int_\gamma g = 0$ pro každou uzavřenou křivku γ už probíhají beze změny. $\square$

Nechť $z, t \in \mathbb{C}$ a $|t| > |z|$. Pak geometrická řada dává

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1 - z/t} = \frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \frac{z^2}{t^3} + \dots \ .$$

Pro pevné z a $\delta > 0$ je konvergence této řady stejnoměrná v parametru t, pokud $|t| > |z| + \delta$.

Připomeňme si, že kružnice C s poloměrem $R > 0$ a středem 0 je dána jako $C:\ [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $C(t) = Re^{it} = R(\cos t + i \sin t)$ — je tedy orientována proti směru hodinových ručiček — a že jsme v minulé přednášce (skoro) spočetli, že

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \ .$$

Vzoreček teď zobecníme.

Lemma. *Nechť $z \in \mathbb{C}$ a C je kružnice se středem v 0 a poloměrem větším než $|z|$. Pak*

$$\int_C \frac{dt}{t-z} = 2\pi i \ .$$

Důkaz. (Neuveden na přednášce.) Zlomek $1/(t-z)$ v integrandu nahradíme předchozí řadou. Díky stejnoměrné konvergenci ji můžeme integrovat člen po členu (odpovídající větu jsme si dokázali jen pro reálné funkce, ale platí i pro komplexní) a dostaneme

$$\int_C \frac{dt}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_C \frac{dt}{t^{n+1}} = \int_C \frac{dt}{t} = 2\pi i \ ,$$

protože integrály s $n \geq 1$ jsou všechny nulové (jejich integrand t^{-n-1} má na $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ primitivní funkci $-t^{-n}/n$). $\square$

Věta (Cauchyho $\int$-ní vzorec). *Nechť $z \in \mathbb{C}$, C je kružnice se středem v 0 a poloměrem větším než $|z|$ a $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celistvá funkce. Pak*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)\, dt}{t-z} \ .$$

Důkaz. Podle věty o obdélníku II a lemmatu máme

$$\int_C \frac{f(t)-f(z)}{t-z}\,dt = 0, \quad \text{takže} \quad \int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt = f(z)\int_C \frac{dt}{t-z} = 2\pi i f(z)\ ,$$

což je Cauchyův vzorec □

S pomocí Cauchyho vzorce teď snadno dokážeme úvodní větu přednášky. Funkce $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ buď celistvá a $z\in\mathbb{C}$ buď libovolný bod. Vezmeme jakoukoli kružnici C se středem v 0 a poloměrem větším než $|z|$ a zlomek $1/(t-z)$ v Cauchyho vzorci nahradíme hořejší řadou. Díky stejnoměrné konvergenci ji můžeme integrovat člen po členu a dostaneme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\left(\int_C \frac{f(t)\,dt}{t^{n+1}}\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\ ,\ a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t^{n+1}}\ .$$

Tato rovnost platí pro každé z ležící uvnitř C. Podle tvrzení o jednoznačnosti koeficientů mocninné řady z minulé přednášky jsou tyto koeficienty nezávislé na C a proto rovnost platí pro každé $z\in\mathbb{C}$. Dále, jak víme, funkce daná mocninnou řadou má (na disku konvergence) derivace všech řádů, jež jsou dány mocninnými řadami vzniklými derivací člen po členu. Tedy

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k\geq n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)a_k z^{k-n} \quad \text{a} \quad f^{(n)}(0) = n!a_n$$

— a_n je nevyhnutelně n-tý Taylorův koeficient $f^{(n)}(0)/n!$ funkce f. Tím je důkaz dokončen.

Úlohy

1. Dokažte pomocí věty o vnořených intervalech, že průnik všech obdélníků R_n je jediný bod.

2. Dokažte, že každá uzavřená pravoúhlá lomená čára v $\mathbb{C}$ je součet hranic obdélníků.

3. Nechť $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je spojitá na $\mathbb{C}$ a holomorfní na $\mathbb{C}\backslash\{a\}$. Dokažte, že i $f'(a)$ existuje. (Návod: pomocí následující úlohy.)

4. Dokažte, že když je $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ spojitá a $\int_\gamma f = 0$ pro hranici γ každého obdélníka, potom je f na $\mathbb{C}$ holomorfní. (tzv. Morerova věta.)