Přednáška 12, 21. prosince 2015

Výsledky o mocninných řadách s reálnými koeficienty rozšíříme na mocninné řady s koeficienty komplexními. Důkazy jsou přímočará zobecnění reálného případu a nebudeme je uvádět. *Poloměr konvergence* $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ mocninné řady

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

se středem $z_0 \in \mathbb{C}$, proměnnou z a koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$ je dán Hadamardovým vzorcem

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \ .$$

Pro každé $z \in B(z_0, R)$, kde $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ je *disk konvergence (mocninné řady M)*, řada M absolutně konverguje a pro každé $z \in \mathbb{C}$ s $|z - z_0| > R$ řada M diverguje. Pro z z hraniční kružnice může M konvergovat či divergovat. Je tak definována funkce $M : B(z_0, R) \to \mathbb{C}$, $M(z) \in \mathbb{C}$ je součet moc. řady M v bodě z. Konvergence mocninné řady M na disku konvergence je lokálně stejnoměrná, jinými slovy: pro každý poloměr S s $0 < S < R$,

$$M \rightrightarrows \quad \text{na } B(z_0, S) \ .$$

Díky tomu lze zaměnit sumu a derivaci a derivovat M člen po členu; totéž pro integraci. Vzniklá mocninná řada

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

má týž poloměr konvergence jako M a jí odpovídající funkce $N(z)$ je na disku konvergence derivací funkce $M(z)$: na $B(z_0, R)$ je $M'(z) = N(z)$. To lze opakovat a dostáváme, že funkce $M(z)$ má na disku konvergence derivace všech řádů a tyto funkce jsou dané mocninnými řadami vzniklými z řady M opakovaným derivováním člen po členu.

Důležité je, že funkce daná mocninnou řadou ji jednoznačně určuje. Stačí k tomu znát hodnoty funkce na jakékoli množině argumentů, jež obsahuje limitní bod z_0. Pro jednoduchost se omezíme na případ $z_0 = 0$ a obecné $z_0 \in \mathbb{C}$ ponecháme jako úlohu 1.

Tvrzení (jednoznačnost koeficientů mocninné řady). *Nechť*

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

má poloměr konvergence $R > 0$*,* $(z_k) \subset B(0, R)$ *je posloupnost nenulových bodů konvergující k* 0 *a* $M(z_k) = 0$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$*. Pak* $a_n = 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}_0$ *—* M *má všechny koeficienty nulové.*

Důkaz. Protože funkce $M(z)$ je spojitá na $B(0, R)$, je $a_0 = M(0) = \lim_{k\to\infty} M(z_k) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$. Nechť už jsme dokázali, že $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$, $n \geq 1$. Pak pro $z \in B(0, R)$ máme rovnost funkcí

$$\begin{aligned} M(z) &= z^n(a_n + a_{n+1}z + a_{n+2}z^2 + \ldots) \\ &= z^n N(z),\ N = a_n + a_{n+1}z + a_{n+2}z^2 + \ldots \end{aligned}$$

(N má týž poloměr konvergence jako M). Protože $M(z_k) = 0$ a $z_k^n \neq 0$ pro každé k, je $N(z_k) = 0$ pro každé k. Ale N má jako konstantní člen a_n, a tak podle argumentu na začátku důkazu je i $a_n = 0$. □

Důsledek. *Nechť* $f, g : U \to \mathbb{C}$*, kde* $U \subset \mathbb{C}$ *je okolí* 0*, jsou dvě funkce dané na* U *součty dvou mocninných řad se středem v* 0*. Pokud*

$$f(z_k) = g(z_k),\ k = 1, 2, \ldots\ ,$$

na nějaké posloupnosti $(z_k) \subset U$ *nenulových bodů jdoucí k* 0*, potom se koeficienty těchto mocninných řad rovnají a* $f(z) = g(z)$ *pro každé* $z \in U$*.*

Důkaz. Nechť f je daná moc. řadou $M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a g moc. řadou $N = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Mocninná řada

$$P = M - N = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) z^n$$

konverguje na U a $P(z_k) = 0$ pro každé k. Tedy $a_n - b_n = 0$ pro každé n a $f = g$ na U. □

Totéž se dá dokázat, pokud $z_k \to z_0$, $z_k \neq z_0$, pro libovolný jiný bod $z_0 \in U$.

Řekneme, že funkce $f : D \to \mathbb{C}$ je *(lokálně) analytická* na otevřené množině $D \subset \mathbb{C}$, pokud pro každé $z_0 \in D$ existuje $r > 0$, že $B(z_0, r) \subset D$

a f je na $B(z_0, r)$ dána součtem mocninné řady se středem v z_0. Funkci $f:\ D \to \mathbb{C}$ nazveme *globálně analytickou* na D, když pro každé $z_0 \in D$ a každé $r > 0$, že $B(z_0, r) \subset D$, je f na $B(z_0, r)$ dána součtem mocninné řady se středem v z_0. Základní věta o holomorfních funkcích, již jsme vyslovili na minulé přednášce, má následující ekvivalentní formulaci.

Věta (základní věta o holomorfních funkcích). *Následující vlastnosti funkce $f:\ D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, jsou ekvivalentní.*

1. *f je na D holomorfní.*
2. *f je na D analytická.*
3. *f je na D globálně analytická.*

Implikace $3 \Rightarrow 2$ je triviální a implikace $2 \Rightarrow 1$ plyne jednoduše z vlastností funkcí daných mocninnou řadou. Obtížná a hluboká je implikace $1 \Rightarrow 3$ a její speciální případ dokážeme v příští (poslední) přednášce, pro tzv. *celistvé funkce*: celistvá funkce je funkce $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorfní na celém $\mathbb{C}$. Teď si ve dvou příkladech ukážeme, že reálné funkce takové vlastnosti nemají.

Příklad 1. Funkce $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako $f(x) = 0$ pro $x \le 0$ a $f(x) = x^2$ pro $x \ge 0$ má na celém $\mathbb{R}$ derivaci $f'(x) = 0$ pro $x \le 0$ a $f'(x) = 2x$ pro $x \ge 0$. Ale $f''_-(0) = 0$ a $f''_+(0) = 2$, takže už $f''(0)$ neexistuje. (Pro komplexní funkce existence první derivace implikuje existenci derivací všech řádů.) Tedy, podle základní věty, neexistuje holomorfní funkce $g:\ U \to \mathbb{C}$ definovaná na okolí 0, jejíž zúžení na reálnou osu by se rovnalo funkci f (pak by f musela mít derivace všech řádů). Dalo by se to dokázat nějak jednoduše přímo, bez použití základní věty (úloha 2)?

Příklad 2. O funkci $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované jako $f(0) = 0$ a $f(x) = \exp(-1/x^2)$ pro $x \ne 0$ se dá dokázat (úloha 3), že má na celém $\mathbb{R}$ derivace všech řádů a $f^{(n)}(0) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. V okolí 0 tedy f nemůže být součtem své Taylorovy řady, protože ta má všechny koeficienty nulové, ale f zdaleka není identicky nulová funkce.

Integrály v komplexním oboru. Pro důkaz základní věty je klíčová komplexní integrace. Roli intervalů u reálných integrálů přebírají v komplexním oboru křivky, a proto začneme s nimi. *Křivkou* budeme rozumět zobrazení $\gamma:\ [a, b] \to \mathbb{C}$ definované na reálném intervalu, které je spojité, po částech hladké (to znamená, že existuje dělení $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$, že γ má na každém intevalu (a_i, a_{i+1}) spojitou první derivaci a ta má v každém bodě dělení a_i jednostrannou limitu) a pro které $\gamma'(t) = 0$ jen pro konečně mnoho $t \in [a, b]$. Křivka je *uzavřená*, pokud

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

— počáteční a koncový bod splývají.

Definice (křivkový integrál). *Nechť $D \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $\gamma : [a, b] \to D$ je křivka a $f : D \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Definujeme*

$$\begin{aligned}\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\, dz \quad &:= \quad \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ &= \quad \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\big)\, dt + i \int_a^b \mathrm{Im}\big(f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\big)\, dt\end{aligned}$$

— oba poslední integrály jsou obvyklé Riemannovy integrály reálných funkcí reálné proměnné.

Uvedeme bez důkazů několik vlastností křivkových integrálů a několik příkladů.

Typický příklad křivky je jednotková kružnice C (se středem v počátku), $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $C(t) = \exp(it) = e^{it} = \cos t + i \sin t$. Spočítejme $\int_C f$ pro dvě funkce $f(z) = z^2$ a $f(z) = 1/z$:

$$\int_C z^2\, dz = \int_0^{2\pi} e^{2it} i e^{it}\, dt = i\big[e^{3it}/3i\big]_0^{2\pi} = i(1/3i - 1/3i) = 0$$

a

$$\int_C z^{-1}\, dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi i\ .$$

První rovnost je zvláštní případ obecného důležitého faktu, který dokážeme v příští přednášce: $\int_\gamma f = 0$ pro každou celistvou funkci f a každou uzavřenou křivku γ (úloha 4). Druhá rovnost ukazuje, že nestačí, aby f byla holomorfní jen na nějaké otevřené nadmnožině D (obrazu) křivky γ: $1/z$ je holomorfní na $D = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, jež obsahuje jednotkovou kružnici C, ale integrál není 0.

Proběhneme-li křivku γ opačným směrem — γ nahradíme křivkou $\lambda : [a, b] \to D$, $\lambda(t) := \gamma(a + b - t)$ — integrál změní znaménko (úloha 5):

$$\int_\lambda f = -\int_\gamma f$$

(to známe i pro Riemannův integrál). Jinak je však hodnota integrálu jednoznačně dána již pouze obrazem křivky, tj. množinou $\{\gamma(t) \mid a \leq t \leq b\} \subset \mathbb{C}$ (je-li γ prostá), a *orientací*, tj. směrem probíhání (který krajní bod γ je počáteční a který je koncový), a nezávisí na vlastní parametrizaci křivky. Zformulujeme tuto nezávislost přesně v následujícím tvrzení bez důkazu.

Tvrzení ($\int$ nezávisí na parametrizaci křivky). *Nechť*

$$\gamma:\ [a,b] \to D,\ \lambda:\ [c,d] \to D \quad a \quad f:\ D \to \mathbb{C},\ D \subset \mathbb{C} \textit{ je otevřená}\,,$$

jsou dvě křivky a spojitá funkce. Předpokládejme, že existuje (reálná) funkce

$$\mu:\ [c,d] \to [a,b]\ ,$$

která je bijekce, má na $[c,d]$ spojitou a nezápornou první derivaci (tedy $\mu(c) = a$ a $\mu(d) = b$) a pro každé $t \in [c,d]$ splňuje $\lambda(t) = \gamma(\mu(t))$ (v tomto smyslu mají křivky γ a λ stejné obrazy). Pak

$$\int_\gamma f = \int_\lambda f\ .$$

Například, pokud si někdo vyvzpomene, že jednotkovou kružnici C parametrizuje jiným způsobem jako $\lambda_1:\ [0,100\pi] \to \mathbb{C}$, $\lambda_1(t) = e^{it/50}$, nebo jako $\lambda_2:\ [0,1] \to \mathbb{C}$, $\lambda_2(t) = e^{2\pi i t^2}$, ukazuje tvrzení díky funkcím $\mu_1:\ [0,100\pi] \to [0,2\pi]$, $\mu_1(t) = t/50$, a $\mu_2:\ [0,1] \to [0,2\pi]$, $\mu_2(t) = 2\pi t^2$, že integrál vyjde stejně jako s původní parametrizací: $\int_C f = \int_{\lambda_1} f = \int_{\lambda_2} f$.

Ještě poznámka o orientaci uzavřených křivek γ, které krajní body nemají, resp. mají pouze jeden. Uvažme jen případ, že obraz γ je kružnice nebo hranice obdélníka, kdy je definice „vnitřku“ γ jasná. *Orientace proti směru hodinových ručiček* je parametrizace, kdy vnitřek γ leží vždy po levé straně tečného vektoru $\gamma'(t)$.

Jiná důležitá nezávislost integrálu na křivce je uvedena v následujícím tvrzení, jež je ovšem snadným důsledkem nulovosti integrálu přes uzavřenou křivku (úloha 6).

Tvrzení ($\int$ skoro nezávisí na křivce). *Nechť* $\gamma:\ [a,b] \to \mathbb{C}$ *a* $\lambda:\ [c,d] \to \mathbb{C}$ *jsou dvě křivky spojující tytéž body, to jest* $\gamma(a) = \lambda(c)$ *a* $\gamma(b) = \lambda(d)$*, a* $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je celistvá funkce. Pak*

$$\int_\gamma f = \int_\lambda f\ .$$

O f nestačí předpokládat pouze, že je holomorfní na nějaké otevřené množině obsahující obrazy obou křivek (úloha 7).

Podobně jako každý Riemannův integrál $\int_a^b f$ máme v absolutní hodnotě shora odhadnut veličinou $\sup_{a\le x\le b}|f(x)|$ krát $b-a$ (délka intervalu), máme pro každý křivkový integrál tzv. *ML odhad*

$$\left|\int_\gamma f\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\;dt\right| \le \underbrace{\max_{a\le t\le b}|f(\gamma(t))|}_{M}\cdot\underbrace{\int_a^b|\gamma'(t)|\;dt}_{L}$$

(úloha 8). Zde L je délka křivky γ (úlohy 9 a 10).

Úlohy

1. Jak se tvrzení o jednoznačnosti koeficientů mocninné řady dokáže, když se limitní bod 0 nahradí nenulovým komplexním číslem?
2. Dokažte přímo, bez použití základní věty, že funkce f z příkladu 1 nemá holomorfní rozšíření na okolí 0.
3. Dokažte uvedené tvrzení o derivacích funkce f.
4. Nechť křivka σ je hranice čtverce s vrcholy $\pm1\pm i$. Napište parametrizaci σ a přímo z definice komplexního integrálu dokažte, že pro $f(z)=z^2$ je $\int_\sigma f = 0$.
5. Ukažte, že změnou orientace křivky se změní znaménko křivkového integrálu.
6. Odvoďte poslední tvrzení přednášky z nulovosti integrálu celistvé funkce přes uzavřenou křivku.
7. Uveďte příklad dvou křivek γ a λ spojujících tytéž body a ležících v otevřené množině $D\subset\mathbb{C}$ a funkce f holomorfní na D, že $\int_\gamma f \ne \int_\lambda f$.
8. Proč je veličina M definovaná a konečná?
9. Proč je L délka křivky a proč $L<+\infty$?
10. Je možno říci, že L je délka obrazu křivky γ?