Přednáška 11, 11. prosince 2013

Dokážeme Dirichletovu větu z minulé přednášky. K tomu budeme potřebovat funkci

$$J_n(x) := \frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx),\ x \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, 2, \ldots\ ,$$

zvanou *Dirichletovo jádro*. Lehce se zintegruje přes $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned}\langle J_n, 1\rangle &= (1/2)\langle\cos(0x), \cos(0x)\rangle + \sum_{k=1}^{n}\langle\cos kx, \cos(0x)\rangle = \frac{2\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n} 0 \\ &= \pi\end{aligned}$$

— díky linearitě skalárního součinu a ortogonalitě sinů a cosinů. J_n je sudá funkce (jakožto součet sudých funkcí), a tak se integrály přes $[-\pi, 0]$ a $[0, \pi]$ rovnají:

$$\int_{-\pi}^{0} J_n = \int_{0}^{\pi} J_n = \frac{\pi}{2}\ .$$

Pro $q = e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}$, máme $q = \cos x + i \sin x$ a pro $y \in \mathbb{R}$ je $q^y + q^{-y} = 2\cos(xy)$ a $q^y - q^{-y} = 2i\sin(xy)$ (úloha 8). Tedy

$$\begin{aligned}J_n(x) &= 2^{-1}\sum_{k=-n}^{n} q^k = \frac{q^{-n}}{2}\sum_{k=0}^{2n} q^k = \frac{q^{n+1} - q^{-n}}{2(q-1)} = \frac{q^{n+1/2} - q^{-n-1/2}}{2(q^{1/2} - q^{-1/2})} \\ &= \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)},\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

(úloha 1). Dokázali jsme tak

Lemma (o Dirichletově jádře). *Funkce* $J_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$ *splňuje pro* $x \in \mathbb{R}$ *vztahy*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} J_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} J_n = \frac{1}{2} \quad a \quad J_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)},\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\ .$$

Poslední rovnost platí i pro $x = 2k\pi$*, vyložíme-li vzniklý neurčitý výraz* $\frac{0}{0}$ *jako hodnotu limity v* $x = 0$ *(na obou stranách rovnosti pak je* $n + 1/2$*).*

Pokračujme v důkazu Dirichletovy věty. Máme po částech hladkou funkci $f:\ [-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ a $x\in\mathbb{R}$ je pevné. Pak se n-tý částečný součet $s_n(x)$ F. řady funkce f v bodě x rovná

$$\frac{\langle f(t),\cos(0t)\rangle}{2\pi}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\langle f(t),\cos(kt)\rangle}{\pi}\cos(kx)+\frac{\langle f(t),\sin(kt)\rangle}{\pi}\sin(kx)\right)\,.$$

Díky linearitě skalárního součinu a součtovému vzorci pro cosinus ($\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$) je

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\left\langle f(t),\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\big(\cos(kt)\cos(kx)+\sin(kt)\sin(kx)\big)\right\rangle_t \\ &= \frac{1}{\pi}\left\langle f(t),\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x))\right\rangle_t=\frac{1}{\pi}\left\langle f(u+x),J_n(u)\right\rangle_u \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(u+x)J_n(u)\;du+\int_{0}^{\pi}f(u+x)J_n(u)\;du\right) \end{aligned}$$

(ve skalárních součinech se integruje podle proměnné v indexu a $t-x=u$). Označíme

$$f^-(u)=f(u+x)-f(x-0)\ \text{ a }\ f^+(u)=f(u+x)-f(x+0)\,.$$

První vlastnost J_n v lemmatu dává vyjádření

$$s_n(x)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f^-(u)J_n(u)\;du+\int_{0}^{\pi}f^+(u)J_n(u)\;du\right)\,.$$

S pomocí vzorce pro J_n v lemmatu oba integrandy přepíšeme ve tvaru $G(u)\sin((n+1/2)u)$, kde definujeme $G(0)=0$ (na této hodnotě nezáleží),

$$G(u)=\frac{f^-(u)}{2\sin(u/2)}\ \text{pro}\ u\in[-\pi,0)\ \text{a}\ G(u)=\frac{f^+(u)}{2\sin(u/2)}\ \text{pro}\ u\in(0,\pi]\,.$$

Sloučením obou integrálů a použitím součtového vzorce pro sinus ($\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$) pak dostaneme

$$\begin{aligned} s_n(x)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(u)\sin((n+1/2)u)\;du= \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\big\langle G(u)\cos(u/2),\sin(nu)\big\rangle+\big\langle G(u)\sin(u/2),\cos(nu)\big\rangle\Big)\,. \end{aligned}$$

Úprava v poslední rovnosti je korektní (úloha 2), když ukážeme, že $G(u)$ má na $[-\pi,\pi]$ Riemannův integrál. Pak ho mají i funkce $G(u)\cos(u/2)$ a $G(u)\sin(u/2)$ (proč? — úloha 3), oba poslední skalární součiny jsou definované a dokonce, podle Riemannova–Lebesgueova lemmatu, pro $n\to\infty$ jdou k 0. Tedy i

$$s_n(x)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\to 0, n\to\infty\ ,$$

což jsme právě chtěli dokázat.

Funkce $G(u)$ má jen konečně mnoho bodů nespojitosti, které jsou obsažené mezi body 0 a a_i-x (kde a_i jsou body dělení pro funkci f). Pro omezenost $G(u)$ je klíčové její chování poblíž $u=0$, protože tam se jmenovatel $2\sin(u/2)$ přibližuje libovolně k 0 (a jinde ne). l'Hospitalovo pravidlo (úloha 4) dává

$$\lim_{u\to 0^-}G(u)=\frac{\lim_{u\to 0^-}(df^-(u)/du)}{\lim_{u\to 0^-}\cos(u/2)}=f'(x-0)$$

a podobně $\lim_{u\to 0^+}G(u)=f'(x+0)$. To jsou podle předpokladu o f vždy vlastní hodnoty, takže $G(u)$ je omezená na okolí 0 a tedy i na celém intervalu $[-\pi,\pi]$. Podle Lebesgueovy věty má proto $G(u)$ na $[-\pi,\pi]$ Riemannův integrál (je omezená a množina bodů nespojitosti má míru nula), viz úlohu 5. Důkaz je dokončen.

Kapitola 3. Úvod do komplexní analýzy.

Komplexní čísla jsou dvojice

$$\mathbb{C}=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{R}\},\ i^2=-1\ .$$

Ve zbytku semestru (dvě přednášky a něco) si vyložíme některé základní výsledky analýzy v komplexním oboru, tj. výsledky o funkcích s komplexními hodnotami a, zejména, komplexní proměnnou. Předpokládáme, že posluchač(ka) ovládá základní aritmetiku komplexních čísel (viz úlohy 6, 7 a 8). Připomeneme jen, že $\mathbb{C}$ je vzhledem ke sčítání a násobení těleso. Dělí se v něm takto:

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\ .$$

Imaginární jednotka i byla přidána, aby se rovnice $x^2+1=0$ stala řešitelnou. Tím se ale dosáhlo daleko víc — řešitelná je rázem každá polynomiální rovnice $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$, $a_k \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ a $a_n \neq 0$, což jsme si i dokázali (Základní věta algebry).

$\mathbb{C}$ je dvourozměrný euklidovský prostor, s metrikou danou normou $\|a + bi\| = \sqrt{a^2+b^2}$, tj. ($z_k = a_k + b_k i$, $k = 1, 2$)

$$d(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\| = \sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2}\ .$$

Místo $\|z\|$ budeme psát jednodušeji pouze absolutní hodnotu $|z|$. Budeme pracovat s funkcemi typu

$$f:\ D \to \mathbb{C},\ D \subset \mathbb{C} \text{ je otevřená}\ .$$

Derivace takové funkce v bodu $z_0 \in D$ se definuje jako pro funkce reálné proměnné:

$$\mathbb{C} \ni f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\ .$$

Je to tedy (jednoznačně určené, existuje-li) komplexní číslo $f'(z_0)$, které v okolí z_0 dává dobré lineární přiblížení k hodnotám funkce $f(z)$:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0),\ z \to z_0\ ,$$

což znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \frac{|f(z) - (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))|}{|z - z_0|} < \varepsilon\ .$$

Pro komplexní funkce nepřipouštíme nevlastní hodnoty derivací. Má-li f derivaci na nějakém celém okolí bodu z_0, lze zřejmým způsobem zavést hodnotu druhé derivace $f''(z_0)$ a podobně definujeme hodnoty derivací vyšších řádů.

Definice (holomorfní funkce). *Řekneme, že funkce $f:\ D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, je* holomorfní *na D, když má v každém bodu $z_0 \in D$ derivaci.*

Základní výsledek analýzy v komplexním oboru je

Věta (základní věta o holomorfních funkcích). *Funkce $f:\ D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, buď holomorfní na D. Pak f má na D derivace* *všech řádů a je na D lokálně součtem své Taylorovy řady: pro každý bod $z_0 \in D$ existuje okolí $z_0 \in U \subset D$, že pro každé $z \in U$ platí rovnost*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0) \cdot \frac{(z - z_0)^n}{n!} \ .$$

Důkaz věty se budu snažit v následujících dvou přednáškách nastínit. Jak podrobněji prodiskutujeme v příští přednášce, pro reálné funkce zdaleka neplatí.

Úlohy

1. Vysvětlete podrobně odvození vzorce pro Dirichletovo jádro v lemmatu.
2. Proč by tato rovnost mohla být nekorektní, to jest jedna strana by nemusela být definovaná?
3. Proč platí, že když $f \in \mathcal{R}(a, b)$, tak i $f(x) \cos(x/2), f(x) \sin(x/2) \in \mathcal{R}(a, b)$?
4. Připomeňte si předpoklady užití l'Hospitalova pravidla pro výpočet limit a ověřte, že jsou při jeho užití v důkazu Dirichletovy věty splněny.
5. Rozmyslete si, proč je funkce $G(u)$ z důkazu Dirichletovy věty omezená a proč má jen konečně mnoho bodů nespojitosti. Jak to přesně plyne z předpokladů věty?
6. Odvoďte vzorec pro druhou odmocninu z čísla $z \in \mathbb{C}$.
7. Dokažte, že když $z \in \mathbb{C}$ a $|z| = 1$, pak $1/z = \overline{z}$ (kde $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$ je komplexní konjugace).
8. Když $\varphi \in \mathbb{R}$, tak, jak je dobře známo, $e^{\varphi i} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Co přesně znamená výraz na levé straně? Je tato rovnost tvrzení nebo spíš definice?