Přednáška 10, 4. prosince 2013

Dokážeme dva výsledky z minulé přednášky, ortogonalitu funkcí $\sin(nx)$ a $\cos(nx)$ a Besselovu nerovnost. Pak uvedeme postačující podmínky pro konvergenci Fourierovy řady funkce a spočítáme rozvoje dvou funkcí do F. řad.

Důkaz. (Ortogonalita $\sin(nx)$ a $\cos(nx)$.) Nechť $m, n \in \mathbb{N}_0$. Spočítáme hodnoty

$$S_{m,n} := \langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle,\ T_{m,n} := \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle$$

a

$$U_{m,n} := \langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle \ ,$$

kde $\langle f, g \rangle$ označuje $\int_{-\pi}^{\pi} fg$. Zřejmě $S_{0,0} = 0$, $T_{0,0} = 2\pi$ a $U_{0,0} = 0$. Nechť m nebo n není 0, třeba $m \neq 0$ (pro $n \neq 0$ je výpočet podobný). Integrace per partes pomocí $\sin(mx) = (-\cos(mx)/m)'$ a $\cos(mx) = (\sin(mx)/m)'$ dává

$$S_{m,n} = (n/m)T_{m,n},\ T_{m,n} = (n/m)S_{m,n} \ \text{ a } \ U_{m,n} = -(n/m)U_{n,m}$$

(první člen $[\ldots]_{-\pi}^{\pi}$ ve vzorci pro integraci per partes je vždy 0, neboť $\ldots$ je 2π-periodická funkce). První dvě rovnice dohromady dávají

$$(1 - (n/m)^2)S_{m,n} = 0 = (1 - (n/m)^2)T_{m,n} \ .$$

Když $n \neq m$, pak odtud máme $S_{m,n} = T_{m,n} = 0$. Když $n = m$, pak víme, že $S_{m,m} = T_{m,m}$. Ale z identity $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ plyne, že též $S_{m,m} + T_{m,m} = \int_{-\pi}^{\pi} 1 = 2\pi$. Tedy $S_{m,m} = T_{m,m} = \pi$. Třetí hořejší rovnice pro $m = n$ dává $U_{m,m} = -U_{m,m}$ a tedy $U_{m,m} = 0$. Abychom vypočetli $U_{m,n}$ při $m \neq n$, vyjádříme $U_{n,m}$ integrací per partes opět pomocí $\cos(mx) = (\sin(mx)/m)'$:

$$U_{n,m} = -(n/m)U_{m,n} \ .$$

Dohromady $U_{m,n} = (n/m)^2 U_{m,n}$ a zas $U_{m,n} = 0$. Shrnuto: $S_{m,m} = T_{m,m} = \pi$ pro $m \in \mathbb{N}$, $S_{0,0} = 0$ a $T_{0,0} = 2\pi$, a všechny ostatní hodnoty $S_{m,n}$, $T_{m,n}$ a $U_{m,n}$ pro $m, n \in \mathbb{N}_0$ jsou rovny nule. □

Důkaz. (Besselova nerovnost.) Jako $s_n = s_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, označíme n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f:

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n} (a'_k \cos(kx) + b'_k \sin(kx)) \ ,$$

kde
$$a_k = \pi^{-1}\langle f, \cos(kx)\rangle,\ b_k = \pi^{-1}\langle f, \sin(kx)\rangle,\ k = 0, 1, 2, \dots\ ,$$
$a'_0 = a_0/2$, $a'_k = a_k$ pro $k > 0$, $b'_0 = 0$ a $b'_k = b_k$ pro $k > 0$. Díky linearitě (skoro)skalárního součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle$, definici čísel a'_k, b'_k, a_k, b_k a ortogonalitě funkcí $\sin(kx)$ a $\cos(kx)$ se $\langle s_n, s_n\rangle$ rovná

$$\sum_{k=0}^{n}((a'_k)^2\langle\cos(kx),\cos(kx)\rangle+(b'_k)^2\langle\sin(kx),\sin(kx)\rangle) = \pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)$$

a také

$$\langle s_n, f\rangle = \sum_{k=0}^{n}(a'_k\langle\cos(kx), f\rangle + b'_k\langle\sin(kx), f\rangle) = \pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)\ .$$

Na druhou stranu máme $0 \le \langle f - s_n, f - s_n\rangle = \langle f, f\rangle - 2\langle s_n, f\rangle + \langle s_n, s_n\rangle$, tudíž $2\langle s_n, f\rangle - \langle s_n, s_n\rangle \le \langle f, f\rangle$. Takže

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) = \frac{2\langle s_n, f\rangle - \langle s_n, s_n\rangle}{\pi} \le \frac{\langle f, f\rangle}{\pi}$$

pro každé n. Řada čtverců F.-ových koeficientů funkce f tedy konverguje a její součet je shora omezen uvedenou hodnotou. $\square$

Řekneme, že funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[a, b]$ *po částech hladká*, když existuje takové dělení

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b$$

tohoto intervalu, že f má na každém intervalu (a_i, a_{i+1}) spojitou první derivaci (sama f je tedy na tomto intervalu také spojitá) a v dělících bodech má f vlastní jednostranné limity $f(a_i + 0), f(a_i - 0), f'(a_i + 0), f'(a_i - 0)$. Zde zavádíme označení
$$f(a_i - 0) := \lim_{x\to a^-} f(x)$$
a podobně pro ostatní jednostranné limity. (Stačí předpokládat existenci vlastních limit $f'(a_i+0), f'(a_i-0)$, existence vlastních limit $f(a_i+0), f(a_i-0)$ už plyne Lagrangeovou větou o střední hodnotě.) Snadno se vidí pomocí Lebesgueovy věty, že po částech hladká funkce je riemannnovsky integrovatelná (úloha 1). Pro po částech hladké funkce Fourierova řada bodově konverguje:

v bodech spojitosti k funkční hodnotě a v dělících bodech k aritmetickému průměru jednostranných limit.

Věta (Dirichletova, o bodové konvergenci F. řady). *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická funkce, jejíž zúžení na interval $[-\pi, \pi]$ je po částech hladké. Pak Fourierova řada funkce $f(x)$ na $\mathbb{R}$ bodově konverguje k funkci*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\ .$$

V každém bodu spojitosti x funkce f tedy její Fourierova řada konverguje k hodnotě $f(x)$.

Důkaz. Příště. □

Jen bodová konvergence Fourierovy řady je slabá vlastnost, protože, jak víme, obecně neumožňuje limitění, derivování a integrování řady člen po členu. Je-li f na $[-\pi, \pi]$ po částech hladká avšak nespojitá v alespoň jednom bodě, její Fourierova řada nekonverguje k $(f(x+0)+f(x-0))/2$ na $[-\pi, \pi]$ stejnoměrně — jinak by funkce $(f(x+0)+f(x-0))/2$ jako stejnoměrný součet spojitých funkcí musela být spojitá, ale to není (úloha 2). Pro po částech hladkou a spojitou funkci její Fourierova řada konverguje stejnoměrně.

Věta (o stejnoměrné konvergenci F. řady). *Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická a spojitá a její zúžení na $[-\pi, \pi]$ je po částech hladké. Pak je f na $\mathbb{R}$ stejnoměrným součtem své Fourierovy řady.*

Důkaz. Nebudeme dělat. □

Příklad 1. Rozvineme funkci $f(x)$, definovanou na intervalu $[-\pi, \pi)$ jako $f(x) = x^2$ a 2π-periodicky rozšířenou na $\mathbb{R}$, do Fourierovy řady. Je to sudá funkce, sinové Fourierovy koeficienty b_n jsou proto nulové (integrál liché funkce přes $[-\pi, \pi]$ je nula). Cosinové Fourierovy koeficienty jsou (integrál sudé funkce přes $[-\pi, \pi]$ je dvojnásobek integrálu přes $[0, \pi]$)

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

a, pro $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \overbrace{\cos(nx)}^{(\sin(nx)/n)'} \, dx = \frac{2}{\pi n}\underbrace{\left[x^2\sin(nx)\right]_0^\pi}_{0} - \frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x \; \overbrace{\sin(nx)}^{(-\cos(nx)/n)'} \; dx \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\underbrace{\left[x\cos(nx)\right]_0^\pi}_{\pi(-1)^n} - \frac{4}{\pi n^2}\underbrace{\int_0^\pi \cos(nx)\, dx}_{0} = (-1)^n\frac{4}{n^2}\ . \end{aligned}$$

Protože $f(x)$ ($= x^2$ na $[-\pi,\pi]$) je spojitá a po částech hladká funkce, podle předešlé věty

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2} \rightrightarrows f(x) \ \text{ na } \mathbb{R}\ .$$

Dosazením $x = \pi$ dostáváme

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \text{tedy} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

Podobně pro $x = 0$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

(viz úlohu 9).

Příklad 2. Rozvineme funkci $f(x)$, definovanou na intervalu $[-\pi,\pi)$ jako $f(x) = \pi - x$ a 2π-periodicky rozšířenou na $\mathbb{R}$, do Fourierovy řady. Nultý cosinový F. koeficient je

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\, dx = \frac{1}{\pi}\left(2\pi^2 - [x^2/2]_{-\pi}^{\pi}\right) = 2\pi\ .$$

Další cosinové koeficinty už jsou nulové, protože pro $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\langle f(x), \cos(nx)\rangle = \pi\langle 1, \cos(nx)\rangle - \langle x, \cos(nx)\rangle = 0 - 0 = 0$$

(první nulu máme podle tvrzení o ortogonalitě sinů a cosinů a druhou protože integrujeme lichou funkci přes $[-\pi, \pi]$). Sinové F. koeficienty pro $n \in \mathbb{N}$ jsou

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - x)\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Bigg(\underbrace{[(\pi - x)(-1/n)\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi}}_{2\pi(-1)^n/n} - \underbrace{\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx}_{0} \Bigg) \\ &= (-1)^n \frac{2}{n} \,. \end{aligned}$$

Daná funkce je po částech hladká, ale v bodech $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je nespojitá. Podle Dirichletovy věty

$$\pi + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx) \to f(x) \quad \text{na } \mathbb{R}\backslash\{\dots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \dots\} \,.$$

V bodech $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tato Fourierova řada konverguje k hodnotě $(0 + 2\pi)/2 = \pi$, zatímco $f((2k+1)\pi) = 2\pi$. Dosazením $x = \pi/2$ po jednoduchých úpravách dostaneme rovnost

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} \,.$$

Úlohy

1. Dokažte, že po částech hladká funkce je omezená a její body nespojitosti tvoří množinu míry 0 — podle Lebesgueovy věty má Riemannův integrál.

2. Dokažte, že když je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ po částech hladká a nespojitá, je i $(f(x-0) + f(x+0))/$ nespojitá.

3. Rozviňte funkci $\sin(2x)$ do Fourierovy řady.

4. Vypočtěte
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)^2 \, dx \,.$$

5. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má Riemannův integrál na každém intervalu $[a, b]$ a je p-periodická ($p > 0$), tj. pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí, že $f(x) = f(x + p)$. Dokažte, že integrál $\int_a^{a+p} f$ má jedinou hodnotu, nezávislou na a.

6. Nechť $f(x) = |x|$ pro $-\pi \leq x \leq \pi$ a na zbytek $\mathbb{R}$ je funkce f rozšířena, aby byla 2π-periodická. Nalezněte její Fourierovu řadu a zjistěte, k jakým hodnotám konverguje.

7. $f(x) = 0$ pro $-\pi \leq x < 0$, $f(x) = 1$ pro $0 \leq x < \pi$ a na zbytek $\mathbb{R}$ je funkce f rozšířena, aby byla 2π-periodická. Nalezněte její Fourierovu řadu a zjistěte, k jakým hodnotám konverguje. Konverguje stejnoměrně?

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} = ? \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n} = ?$$

9. Odvoďte $\sum(-1)^{n+1}n^{-2} = \pi^2/12$ z $\sum n^{-2} = \pi^2/6$ jednoduchou manipulací s nekonečnými řadami.