Přehled probrané látky

1. přednáška 5.10.2004. Organizační pokyny. Motivace - řetězovka, brachystochrona, analýza v *The Art of Computer Programming* D. Knutha. Co probereme v ZS: $\mathbf{R}$, posloupnosti a řady, funkce (spojitost, derivace), integrál (v ZS pouze primitivní funkce). Opakování. Logika: výroky, logické spojky (&, nebo, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, negace) a kvantifikátory. Množiny a množinové značení: být prvkem, být podmnožinou, rovnost množin, sjednocení, průnik, rozdíl, doplněk, potenční množina, kartézský součin. Zobrazení a terminologie kolem nich: zobrazení z A do B jako podmnožina kartézského součinu $A \times B$, zobrazení na B (surjekce), prosté (injekce), vzájemně jednoznačné (bijekce). Príklad: $F(x) = x + 1$ je bijekce ze $\mathbf{Z}$ (celá čísla) do $\mathbf{Z}$.
2. přednáška 8.10.2004. Ještě o zobrazeních: posloupnosti (zobrazení z $\mathbf{N}$ do $\mathbf{R}$), skládání zobrazení. Číselné obory: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$. Princip indukce pro $\mathbf{N}$ (každá neprázdná podmnožina $\mathbf{N}$ má nejmenší prvek). Spočetné množiny: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{Q}$ jsou spočetné. $\mathbf{R}$: reálná čísla jsou nekonečné desetinné rozvoje. Vlastnosti sčítání a násobení na $\mathbf{R}$ (asociativita, komutativita, neutrální prvky 0 a 1, inverzní prvky, distributivní zákon). Vlastnosti relace $\leq$ na $\mathbf{R}$ (tranzitivita, slabá antisymetrie, linearita, přičítání stejného čísla k oběma stranám nerovnosti, jakož i jejich vynásobení stejným nezáporným číslem, nerovnost nemění). Definice suprema množiny reálných čísel. Existence suprema pro každou neprázdnou a shora omezenou množinu reálných čísel. Poznámky o supremu. Infimum. Příklad: v $(\mathbf{Q}, \leq)$ suprema obecně neexistují, např. množina zlomků v $[0, \sqrt{2}]$ nemá (v $(\mathbf{Q}, \leq)$) supremum.
3. přednáška 12.10.2004. Věta: Archimedova vlastnost $\mathbf{R}$. **Věta:** Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální (aritmetický a geometrický důkaz). Spočetnost kartézského součinu $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ pomocí spirálové procházky. **Věta:** Množina $\mathbf{R}$ je nespočetná (důkaz diagonální metodou). **Věta:** O n-té odmocnině reálného čísla (důkaz pomocí suprema, dokončení příště).
4. přednáška 15.10.2004. Dokončení důkazu věty o n-té odmocnině. Pozn.: důkaz nespočetnosti $\mathbf{R}$ v minulé přednášce ukazuje, že množina všech podmnožin množiny $\mathbf{N}$ je nespočetná. Definice (reálné) posloupnosti. Shora, zdola omezené posloupnosti, omezené posloupnosti, konstantní. Rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající posloupnosti. Definice (vlastní) limity posloupnosti. Konvergentní, divergentní posloupnosti. Nevlastní limity $+\infty$ a $-\infty$. Příklady konvergentních a divergentních posloupností, zejména důkaz toho, že $\lim n^{1/n} = 1$.
Věta 1: Posloupnost má nejvýše jednu vlastní limitu (dk příště).
5. přednáška 19.10.2004. Okolí bodu a definice limity pomocí okolí bodu. Důkaz věty 1. **Věta 2:** omezenost konvergentní posloupnosti. Definice vybrané posloupnosti, souvislost s negací definice limity. **Věta 3:** posloupnost vybraná z konvergentní posloupnosti má stejnou limitu. **Věta 4 (aritmetika limit):** Limita součtu (součinu, podílu) dvou posloupností je součet (součin, podíl) jejich limit (za obvyklého předpokladu nenulovosti dělitele). **Věta 5 (uspořádání a limita):** (i) $\lim a_n < \lim b_n$ implikuje $a_n < b_n$ pro velká n a (ii) $a_n \leq b_n$ pro velká n implikuje $\lim a_n \leq \lim b_n$ (existují-li obě limity). **Věta 6 (o dvou policajtech):** $L = \lim a_n = \lim c_n$ a $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro velká n implikují, že

$\lim b_n$ existuje a je taky L.
6. přednáška 22.10.2004. Příklad na větu 6: $a^{1/n} \to 1$. **Věta 7:** Pokud $a_n \to 0$ a b_n je omezená posloupnost, potom $a_n b_n \to 0$. Nevlastní limity. Rozšířená reálná osa $\mathbf{R}^*$, počítání s nekonečny. Rekapitulace platnosti vět 1-6 pro nevlastní limity. **Věta 8 (kdy je $A/0 = +\infty$):** Pokud $a_n \to A > 0$, $b_n \to 0$ a $b_n > 0$ pro všechna $n > n_0$, potom $a_n/b_n \to +\infty$. **Věta 9 (o monotonní posloupnosti):** Každá monotonní posloupnost má (vlastní nebo nevlastní) limitu. Tři příklady na větu 9. 1. posloupnost (x_n), kde $x_1 = 2$ a $x_{n+1} = x_n/2 + 1/x_n$, konverguje k odmocnině ze dvou. 2. Změníme-li rekurenci na $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$, dostaneme posloupnost s limitou $+\infty$. 3. Existenci limity je nutné dokazovat, viz třeba rekurenci $x_{n+1} = -x_n$. Začátek definice pojmů limes superior a limes inferior.
7. přednáška 25.10.2004. Definice $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$. Příklady na limsup a liminf. **Věta 10 (liminf, limsup a lim):** $\lim a_n = A$, právě když $\liminf a_n = \limsup a_n = A$. Připomenutí maxima a minima množiny. Definice hromadného bodu posloupnosti (= limita vybrané podposloupnosti). DOMCV: sestrojte posloupnost takovou, že každé A z $\mathbf{R}^*$ je jejím hromadným bodem. **Lemma:** A z $\mathbf{R}$ je hromadným bodem posloupnosti, právě když v libovolném epsilonovém okolí A leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a analogicky pro $A = \infty, -\infty$). **Věta 11 (liminf, limsup a hromadné body):** Liminf posloupnosti je její nejmenší a limsup její největší hromadný bod.
8. přednáška 29.10.2004. Důsledek věty 11 (Bolzano-Cauchyova věta): Každá omezená posloupnost má konvergentní podposloupnost; důkaz z V11 a druhý důkaz pomocí půlení intervalů. Definice cauchyovské posloupnosti. **Věta 12:** Posloupnost má vlastní limitu tehdy a jen tehdy, je-li cauchyovská.
ŘADY. Definice: nekonečná řada, částečný součet, součet řady, konvergentní a divergentní řady. Důležité příklady řad: 1. geometrická řada $q^0 + q^1 + q^2 + \cdots$ — konverguje, právě když $-1 < q < 1$ a má součet $1/(1-q)$ a 2. řada $1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \cdots$ — konverguje, právě když $s > 1$ (bez důkazu). **Věta 1 (nutná podmínka konvergence):** Když řada konverguje, mají její sčítance limitu 0. Příklad řady $1/1 + 1/2 + 1/3 + \cdots$ ukazuje, že to není postačující podmínka. **Věta 2:** (i) Konvergence se neporuší vynásobením sčítanců nenulovým číslem a (ii) součtová řada vzniklá ze dvou konvergentních řad konverguje. **Věta 3 (srovnávací kritérium):** Pokud $0 \le a_n \le b_n$ pro všechny $n \ge n_0$, potom konvergence řady $b_1 + b_2 + \cdots$ implikuje konvergenci řady $a_1 + a_2 + \cdots$.
9. přednáška 2.11.2004. Věta 4 (limitní srovnávací kritérium): Jsou-li $a_1 + a_2 + \cdots$ a $b_1 + b_2 + \cdots$ řady s nezápornými členy a $\lim a_n/b_n = K$, potom (i) pro $0 < K < \infty$ první řada konv. $\Leftrightarrow$ druhá řada konv., (ii) pro $K = 0$ platí implikace $\Leftarrow$ a (iii) pro $K = \infty$ platí implikace $\Rightarrow$. **Věta 5 (Cauchyho odmocninové kritérium):** Nechť $a_1 + a_2 + \cdots$ je řada s nezápornými členy a $b_n := (a_n)^{1/n}$, potom (i) existuje-li q , $0 < q < 1$, že $b_n < q$ pro všechna velká n, řada konverguje, (ii) je-li $\limsup b_n < 1$, řada konverguje, (iii) totéž pro limitu, (iv) je-li $\limsup b_n > 1$, řada diverguje, (v) totéž pro limitu. **Věta 6 (d'Alambertovo podílové kritérium):** Nechť $a_1 + a_2 + \cdots$ je řada s kladnými členy a $b_n := a_{n+1}/a_n$, potom (i) existuje-li q , $0 < q < 1$, že $b_n < q$ pro všechna velká n, řada konverguje, (ii) je-li $\limsup b_n < 1$, řada konverguje, (iii) totéž pro limitu, (iv) je-li $\lim b_n > 1$, řada diverguje. **Věta 7 (Raabeho kritérium):**

Nechť $a_1 + a_2 + \cdots$ je řada s kladnými členy a $b_n := n(a_n/a_{n+1} - 1)$, potom (i) když $\lim b_n > 1$, řada konverguje a (ii) když $\lim b_n < 1$, řada diverguje; bez důkazu. Příklad na Raabeho kritérium. **Věta 8:** Řada $1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \cdots$ konverguje, právě když $s > 1$; důkaz konvergence pomocí Raabeho kritéria a pomocí integrálního odhadu částečného součtu. Integrální odhad $1^{-1} + 2^{-1} + 3^{-1} + \cdots + N^{-1} > \log(N + 1)$.

10. přednáška 5.11.2004. Absolutní konvergence řad, Cauchyova podmínka pro řady. **Věta 9:** Konverguje-li řada absolutně, konverguje. **Lemma (Abelova parciální sumace):** $S = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = A_1(b_2 - b_1) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_nb_n$, kde $A_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$; pokud $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$, pak $ab_1 \leq S \leq Ab_1$, kde a je nejmenší a A největší součet A_i . **Věta 10 (Abelovo a Dirichletovo kritérium neabsolutní konvergence):** Jsou-li (a_n) a (b_n) dvě reálné posloupnosti, přičemž (b_n) je neklesající a má nezáporné členy, potom (A) řada $a_1+a_2+\cdots$ konverguje $\Rightarrow$ řada $a_1b_1+a_2b_2+\cdots$ konverguje a (D) řada $a_1 + a_2 + \cdots$ má omezené částečné součty a $\lim b_n = 0 \Rightarrow$ řada $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots$ konverguje. **Věta 11 (Leibnizovo kritérium neabsolutní konvergence):** Pokud $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ a $\lim a_n = 0$, potom řada $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ konverguje. Příklady na neabsolutní konvergenci: $1/1 - 1/2 + 1/3 - \cdots$ a $\sin(1)/1 + \sin(2)/2 + \sin(3)/3 + \cdots$. Přerovnávání řad. **Věta 12:** Absolutně konvergentní řada po přerovnání zůstane absolutně konvergentní a její součet se nezmění; dokončení důkazu příště.

11. přednáška 9.11.2004. Pojem zbytku řady. **Lemma:** Řada konverguje, právě když její zbytky konvergují a jejich součty jdou k nule. Dokončení důkazu Věty 12. **Věta 13 (Riemann):** Součet neabsolutně konvergentní řady lze přerovnáním libovolně změnit (na libovolný konečný nebo i nekonečný součet). **REÁLNÉ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMENNÉ.** Základní definice: (ne)rostoucí, (ne)klesající funkce, (shora, zdola) omezená funkce, periodická funkce. Značení pro prstencové a obyčejné okolí bodu: $P(a, \delta), U(a, \delta)$; jednostranná okolí bodu. (Jednostranná) limita funkce v bodě; poznámky a příklady. (Jednostranná) spojitost funkce v bodě. **Věta 1 (Heine):** Funkce f má v bodě a limitu C, právě když pro každou posloupnost (x_n) (ležící v def. oboru funce f a neobsahující číslo a) jdoucí v limitě k a posloupnost funkčních hodnot $(f(x_n))$ jde v limitě k C ; důkaz příště.

12. přednáška 12.11.2004. Důkaz Heineho věty. **Věta 2:** Funkce má v bodě nejvýše jednu limitu. **Věta 3:** Má-li funkce v bodě vlastní limitu, je v jeho některém prstencovém okolí omezená. **Věta 4 (aritmetika limit):** Limita součtu (součinu, podílu) dvou funkcí v bodě c je součet (součin, podíl) jejich limit v bodě c, je-li definován. **Věta 5 (limita a uspořádání):** (i) Je-li limita f v bodě c větší než limita g v c, potom $f(x) > g(x)$ na nějakém prstencovém okolí c; (ii) pokud $f(x) \geq g(x)$ na nějakém prstencovém okolí c a obě funkce mají v c limitu, je limita $f \geq$ limitě g; (iii) pokud $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ na nějakém prstencovém okolí c a $\lim f(x) = \lim g(x) = A$ v bodě c, potom též $\lim h(x) = A$ v c. **Věta 6 (limita složené funkce):** Pokud $\lim g(x) = A$ v c, $\lim f(x) = B$ v A a platí jeden ze dvou předpokladů, že (P1) f je v A spojitá nebo (P2) g na nějakém prstencovém okolí bodu c nenabývá hodnotu A, potom $\lim f(g(x)) = B$ v c. **Věta 7 (limita monotonní funkce):** Je-li f monotonní na intervalu (a, b) (a

a b mohou být nekonečné), potom existují jednostranné limity $f(x)$ v a a v b; důkaz příště.
13. přednáška 16.11.2004. Důkaz věty 7. Funkce spojité na intervalu. **Věta 8 (Darboux; nabývání mezihodnot):** Je-li f spojitá na $[a, b]$ a $f(a) < y < f(b)$, potom $y = f(x)$ pro nějaké x z (a, b). **Věta 9 (zobrazení intervalu spoj. funkcí):** Spojitá funkce zobrazuje interval na interval. **Věta 10 (omezenost spojité funkce):** Funkce spojitá na kompaktním intervalu $[a, b]$ je na něm omezená; důkaz jako důsledek věty 11. Definice (lokálního, ostrého) maxima a minima funkce. **Věta 11 (extrémy spojité funkce):** Spojitá funkce na kompaktním intervalu $[a, b]$ na něm nabývá svého maxima i minima. **Věta 12 (spojitost inverzní funkce):** Je-li f spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu (a, b), je její inverzní funkce na intervalu $f((a, b))$ spojitá a rostoucí (klesající); důkaz příště.
14. přednáška 19.11.2004. Důkaz věty 12. **Věta 13 (existence logaritmu):** Existuje právě jedna reálná funkce $\log(x)$ definovaná na kladných reálných číslech, která (i) je rostoucí, (ii) splňuje funkcionální rovnici $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ a (iii) jejíž podíl s $x - 1$ má v 1 limitu 1; (zatím?) bez důkazu. Odvození základních vlastností logaritmu: $\log(1) = 0$, $\log(1/x) = -\log(x)$, $\log(xn) = n \cdot \log(x)$, limity v 0^+ a v ∞ jsou $-\infty$ a ∞, $\log(x)$ je spojitý na def. oboru a zobrazuje ho na $\mathbf{R}$. Exponenciála $\exp(x)$ jako inverz logaritmu a odvození základních vlastností: exp zobrazuje $\mathbf{R}$ na $(0, \infty)$, je rostoucí a spojitá na def. oboru, $\exp(0) = 1$, v $-\infty$ a ∞ má limity 0 a ∞, splňuje funkcionální rovnici $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$, $(\exp(x) - 1)/x$ má v 0 limitu 1. Obecná mocnina a^b se pro reálné a, b, $a > 0$ definuje jako $\exp(b \log(a))$. Dvě důležité vlastnosti exponenciály, zatím nedokazované: $\exp(x) = \lim(1 + x/n)^n$ a $\exp(x) = 1 + x/1! + x^2/2! + \cdots$. Číslo e jako $\exp(1)$. **Věta:** Číslo e je iracionální.
Věta 14 (existence sinu): Existuje právě jedno kladné reálné číslo π a právě jedna reálná funkce $\sin(x)$ definovaná na celém $\mathbf{R}$, že (i) $\sin(0) = 0$, (ii) platí funkcionální rovnice $\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \sin(\pi/2 - y)$, (iii) sin je rostoucí na $[0, \pi/2]$ a (iv) $\sin(x)/x \to 1$ pro $x \to 0$; bez důkazu.
15. přednáška 23.11.2004. Poznámka o důkazu věty 12 (spojitost inverzní funkce). Dokázali jsme vlastně triviální větu 9,5, že funkce rostoucí (klesající) na intervalu J a zobrazující J na interval je na J spojitá. Věta 12 pak plyne jako důsledek vět 9 a 9,5. Odvození vlastností funkce sinus z věty 14: $\sin(\pi/2) = 1$; $\sin(x)$ je lichá funkce; $\sin(\pi/2 + y) = \sin(\pi/2 - y)$; $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$; $\sin(x + 2 \cdot \pi) = \sin(x)$; $\sin(x)$ je spojitý na celém $\mathbf{R}$; obor hodnot je $[-1, 1]$ a nulové body jsou celočíselné násobky π. Definice funkcí $\cos(x)$, $\tan(x)$ a $\cot(x)$. **Věta 15:** Tyto funkce jsou spojité na svých definičních oborech. Definice cyklometrických funkcí $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$ a $\mathrm{arccot}(x)$. Identity $\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$ a $\arctan(x) + \mathrm{arccot}(x) = \pi/2$. Znovu k exponenciále, dokážeme následující větu. **Věta 13' (existence exponenciály):** Existuje právě jedna funkce $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ taková, že (i) pro všechna x a y máme $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ a (ii) pro všechna x máme $\exp(x) \geq 1+x$. Odvození základních vlastností exponenciály za předpokladu platnosti věty 13', zejména vlastnosti $\exp(x) = \lim(1 + x/n)^n$; odtud jednoznačnost exponenciály. Důkaz existence exponenciály (pomocí funkce $f(x) = \lim(1 + x/n)^n$) příště.

16. přednáška 26.11.2004. Lemma: $\lim(1+x/n^2)^n = 1$ a $\lim(1+c_n/n^2)^n = 1$, kde (c_n) je omezená posloupnost. Ukážeme, že (i) pro každé reálné x existuje vlastní limita $f(x) := \lim(1+x/n)^n$, která splňuje (ii) funkcionální rovnici $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ a (iii) nerovnost $f(x) \geq 1 + x$. Nejprve Bernoulliova nerovnost: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ pro každé přirozené n a reálné $x \geq -1$; důkaz indukcí podle n. Důkaz (i): podíl sousedních členů ukazuje, že posloupnost $a_n = (1 + x/n)^n$ je od jistého n dále neklesající (a kladná); podobně $b_n = (1 + 1/(n - 1))^n$ je klesající; pro přirozené $k > |x|$ máme $|a_{kn}| < (b_n)^k \leq (b_2)^k = 4^k$; posloupnost (a_n) tedy má vlastní limitu. Vlastnosti (ii) a (iii) se dokazují snadno. Definice derivace funkce v bodě a jednostranných derivací v bodě.
17. přednáška 30.11.2004. Řešení příkladů z testu 19.11. Příklad výpočtu derivace z definice: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. **Věta 16 (derivace $\Rightarrow$ spojitost):** Má-li f v a vlastní derivaci, je v a spojitá. **Věta 17 (aritmetika derivací):** Nechť f a g mají v a derivace (i nevlastní), potom (i) $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$ (pokud je pravá strana definovaná); (ii) je-li navíc f nebo g spojitá v a, máme Leibnizovu formuli $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (PJPSD); (iii) je-li g spojitá v a a $g(a)$ není nula, potom $(f/g)'(a) = (f'(a)g(a) - f(a)g'(a))/g^2(a)$ (PJPSD). Příklad, že (ii) obecně neplatí, jsou-li f a g nespojité v a. **Věta 18 (derivace složené funkce):** $(f(g(x))'(a) = f'(b).g'(a) = f'(g(a)).g'(a)$ (PJPSD) za předpokladu, že $g(a) = b$, g má v a derivaci a je tam spojitá a f má v b derivaci. Příklad, že bez spojitosti g vzoreček neplatí. Derivace goniometrických funkcí.
18. přednáška 3.12.2004. Věta 19 (derivace inverzní funkce): Pokud $f : J \to \mathrm{R}$ je spojitá a ryze monotonní a $f(a) = b$ pro vnitřní bod a intervalu J, potom (i) když $f'(a)$ existuje a není nula, pak $(f^{-1})'(b) = 1/f'(a)$, a (ii) když $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (klesající), pak $(f^{-1})'(b) = +\infty$ $(= -\infty)$. Příklad: derivace cyklometrických funkcí arcsin, arccos, arctan a arccot. Derivace logaritmu a exponenciály. **Věta 20:** Má-li f v a lokální extrém, potom $f'(a)$ neexistuje nebo je nula. Kandidáti extrema pro spojitou funkci na kompaktním intervalu jsou tedy krajní body intervalu a body s nulovou nebo neexistující derivací. **Věta 21 (Rolleova):** Je-li f spojitá na $[a, b]$ a $f(a) = f(b)$, potom v nějakém vnitřním bodě c (intervalu $[a, b]$) derivace funkce f neexistuje nebo je nulová. **Věta 22 (Lagrangeova věta o střední hodnotě):** Je-li f spojitá na $[a, b]$, potom v nějakém vnitřním bodě c derivace funkce f neexistuje nebo se rovná $(f(b) - f(a))/(b - a)$. **Věta 23 (Cauchyova věta o střední hodnotě):** Jsou-li f, g spojité na $[a, b]$, potom v nějakém vnitřním bodě c neexistuje derivace jedné z funkcí nebo g má v c nevlastní či nulovou derivaci nebo konečně platí $f'(c)/g'(c) = (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a))$. Formulace l'Hospitalova pravidla, důkaz příště.
19. přednáška 7.12.2004. Věta 24 (l'Hospitalovo pravidlo): Funkce f, g mějte vlastní derivace v okolí bodu a a $g'(x)$ tam buď nenulová; (i) pokud f a g jdou v a k nule a $\lim f'(x)/g'(x) = A$, pak i $\lim f(x)/g(x) = A$; (ii) pokud $\lim |g(x)| = \infty$ a $\lim f'(x)/g'(x) = A$, pak i $\lim f(x)/g(x) = A$. Příklady na (ne)použití l'Hospitalova pravidla. **Věta 25:** Je-li f spojitá zprava v a a $\lim f'(x) = A$ zprava v a, potom pravostranná derivace f v a je A. **Věta 26:** f spojitá na intervalu J a $f' > 0$ na $J \Rightarrow f$ je rostoucí na J a podobně další tři možnosti ≥ 0, < 0 a ≤ 0. Definice derivací vyšších řádů. (Ryze) konvexní a (ryze)

konkávní funkce (graf leží pod sečnou, graf leží nad sečnou). **Věta 27:** Funkce konvexní na intervalu má v každém vnitřním bodě vlastní obě jednostranné derivace; důkaz příště.

20. přednáška 10.12.2004. Důkaz věty 27. **Věta 28:** Funkce konvexní na intervalu (a, b) je na něm spojitá. **Věta 29:** f' spojitá na intervalu J a $f'' > 0$ na $J \Rightarrow f$ je na J ryze konvexní a podobně další tři možnosti ≥ 0, < 0 a ≤ 0. Definice inflexního bodu. **Věta 30:** Pokud $f''(a)$ není nula, není a inflexním bodem funkce f. **Věta 31 (postačující podmínka inflexe):** Má-li f druhou derivaci v d-okolí bodu a a je-li $f'' < 0$ na $(a - d, a)$ a $f'' > 0$ na $(a, a + d)$, je a inflexním bodem funkce f. Asymptoty funkce v $+\infty$ a $-\infty$. **Věta 32:** $y = ax+b$ je asymptotou f v $+\infty$, právě když $f(x)/x \to a$ a $f(x)-ax \to b$. Průběh funkce (co na funkci vyšetřovat): definiční obor a obor spojitosti; průsečíky s osami souřadnic; sudost, lichost, periodičnost; limity v krajních bodech def. oboru; intervaly monotonie, lokální a globální extrémy (pomocí 1. derivace); intervaly konvexity a konkavity, inflexní body (pomocí 2. derivace); asymptoty; náčrtek grafu funkce.

21. přednáška 14.12.2004. Příklad na zjišťování průběhu funkce: $f(x) = \exp(-1/\sin 2(x))$ pro x různé od celočíselných násobků π a $f(k \cdot \pi) = 0$. Definice Taylorova polynomu $T(x; f, n, a)$. **Věta 33 (jednoznačnost Taylorova polynomu):** Existuje-li vlastní n-tá derivace $f^{(n)}(a)$ a $P(x)$ je polynom stupně nejvýše n, pak, pro $x \to a$, $\lim(f(x) - P(x))/(x - a)^n = 0$ pouze pro $P(x) = T(x; f, n, a)$.

22. přednáška 17.12.2004. Věta 34 (zbytek Taylorova polynomu): Má-li f vlastní $n + 1$-tou derivaci na $(a - \varepsilon, x + \varepsilon)$ a g je spojitá na $[a, x]$ a na (a, x) má vlastní a nenulovou derivaci, pak existuje c v (a, x), že zbytek $R(x; f, n, a) = f(x)-T(x; f, n, a)$ je roven $(1/n!)\cdot((g(x)-g(a))/g'(c))\cdot f^{(n+1)}(c)\cdot(x-c)^{n+1}$. **Důsledek (Lagrangeův a Cauchyův tvar zbytku):** Za předpokladů předchozí věty platí: (i) existuje c v (a, x), že $R(x; f, n, a) = (1/(n+1)!)\cdot f^{(n+1)}(c)\cdot(x-a)^n$ a (ii) existuje c v (a, x), že $R(x; f, n, a) = (1/n!)\cdot f^{(n+1)}(c)\cdot(x-c)^n\cdot(x-a)$. Rozvoje funkcí do Taylorových řad: (i) $\exp(x) = 1+x/1!+x^2/2!+\cdots$ pro všechna reálná x; (ii) $\sin x = x-x^3/3!+x^5/5!-\cdots$ pro vš. x; (iii) $\cos x = 1-x^2/2!+x^4/4!-\cdots$ pro vš. x; (iv) $\log(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \cdots$ pro x v intervalu $(-1, 1]$; (v) $(1+x)^a = 1+(a/1!)x+(a(a-1)/2!)x^2+(a(a-1)(a-2)/3!)x^3+\cdots$ pro každé reálné a a $|x| < 1$; (vi) $\arctan x = x-x^3/3+x^5/5-\cdots$ pro $|x| \leq 1$. (Důkazy jen pro (i), (ii) a (iv).) Důsledky: $2+1/2!+1/3!+\cdots = \mathrm{e}$, $1-1/2+1/3-\cdots = \log 2$ a $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots = \pi/4$.

23. přednáška 21.12.2004.

PRIMITIVNÍ FUNKCE. Definice funkce primitivní k dané funkci na otevřeném intervalu I. **Věta 1:** Dvě funkce primitivní k téže fukci (na stejném intervalu) se liší o konstantu. Příklady: $\mathrm{sgn}(x)$ nemá (na intervalu $(-1, 1)$) primitivní fukci, nespojitá funkce mající primitivní funkci. **Věta 2:** Každá funkce spojitá na otevřeném intervalu na něm má prim. funkci; (zatím) bez důkazu. **Věta 3:** Prim. funkce k lineární kombinaci funkcí je lin. kombinace prim. funkcí. Tabulka prim. funkcí. **Věta 4 (Darbouxova vlastnost pro funkce s prim. funkcí):** Má-li f na otevřeném intervalu I prim. funkci, je $f(I)$ zase interval. **Věta 5 (o substituci):** (i) Je-li F primitivní k f na J, potom $F(g)$ je primi-

tivní k $f(g).g'$ na I, kde $g : J \to I$ a $f : I \to \mathbf{R}$; (ii) Je-li G primitivní k $f(g).g'$ na J, je $G(g^{-1})$ primitivní k f na I, kde fukce f, g běhají jako předtím a g' je na J nenulová. Příklady na větu o substituci.
24. přednáška 4.1.2005. Věta 6 (integrace per partes): Jsou-li F, G primitivní funkce k funkcím f, g na otevřeném intervalu I, pak $FG-$ prim. funkce k fG je prim. funkce k Fg na I. Dva příklady na integraci per partes. Definice racionální funkce. Opakování vlastností komplexních a reálných polynomů. **Věta 7 (základní věta algebry):** Komplexní polynom stupně n má jednoznačný (až na pořadí faktorů) rozklad na n komplexních lineárních kořenových činitelů; bez důkazu. Násobnost kořene. Kořeny a nulové body polynomu je jedno a totéž. Důsledky: (i) Polynom stupně n má nejvýše n různých nulových bodů a (ii) dva polynomy, které mají stejné hodnoty na nekonečné množině (komplexních čísel), mají stejné koeficienty. Tvrzení: Derivováním se násobnost kořene snižuje o 1, což dává jinou definici násobnosti kořene a polynomu P (je to nejmenší k, že $P^{(k)}(a)$ není 0). Komplexně sdružená čísla a vlastnosti komplexního sdružování. **Věta 8 (o kořenech reálného polynomu):** Je-li komplexní číslo a k-násobným kořenem reálného polynomu P, je i číslo komplexně sdružené k a k-násobným kořenem P.
25. přednáška 7.1.2005. Důsledek: Reálný polynom $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ má jednoznačný (až na pořadí faktorů) rozklad na reálné lineární a kvadratické faktory (které nemají společné kořeny a kvadratické faktory nemají reálné kořeny):

$$P(x) = a_n (x - u_1)^{k_1} \ldots (x - u_r)^{k_r} (x^2 + v_1 x + w_1)^{l_1} \ldots (x^2 + v_s x + w_s)^{l_s}.$$

Věta 9 (rozklad na parciální zlomky): Jsou-li $Q(x)$ a $P(x)$ reálné polynomy, kde $P(x)$ je rozložený jako výše a $\deg(Q) < \deg(P)$, pak $Q(x)/P(x)$ je součet zlomků typu $c/(x - u_i)^{e_i}$ (c je reálná konstanta) a $p(x)/(x^2 + v_i x + w_i)^{f_i}$ ($p(x)$ je reálný lineární polynom), kde e_i nepřesahuje k_i a f_i nepřesahuje l_i. Aplikace rozkladu na parciální zlomky uvidíme v letním semestru.
26. a 27. přednáška 11.1. a 14.1. byly věnovány konzultacím.

Termíny zkoušek: 19.1.2005, 26.1.2005, 2.2.2005, 10.2.2005 a 17.2.2005. Písemka je v K1 (a dalších karlínských posluchárnách) od 9:00 a je společná pro všechny 3 paralelky. Ústní část se bude konat odpoledne (i následující den, bude-li třeba) v Karlíně nebo na Malé Straně, to bude operativně upřesňováno. Zapisujte se prosím na zkoušku ke mně, termíny jsou již v SIS vypsány. Ti, kdo se zapsali k doc. Staré, se musejí škrtnout a zapsat ke mně, omlouvám se za malý zmatek.

Písemná část zkoušky (prověření početní dovednosti) trvá 2 hodiny a sestává ze 4 příkladů: limita posloupnosti (10 bodů), limita funkce (10 bodů), konvergence řady (10 bodů) a zjištění průběhu funkce (20 bodů); celkem maximálně 50 bodů. Pro složení písemné části zkoušky a pro postup k ústní části zkoušky je třeba získat alespoň 25 bodů. Započítávají se vám bodové zisky z testu 19.11.2004 a bodové zisky z testu 7.1.2005. Jsou povoleny běžné psací potřeby a písemné materiály. Technické pomůcky (mobilní telefony, kalkulačky, notebooky, atd.) nejsou povoleny. Příklad zkouškové písemky je na www straně doc. L. Picka .

Ústní část zkoušky (prověření teoretických znalostí) obsahuje 3 otázky: (1) základní pojmy a definice; (2) tematický okruh (několik k sobě tematicky patřících výsledků a vět, popř. příkladů, vyžadovaných bez důkazu) a (3) věta (věty) s důkazem (důkazy). Otázky si budete losovat z níže uvedených seznamů. Rozumí se, že v ústní části nejsou povoleny ani technické pomůcky ani písemné materiály (poznámky z přednášek, učebnice atd.).

V celkovém hodnocení zkoušky mají písemná i ústní část stejnou váhu, např. 3 z písemky + 1 z ústní části = celková 2. Orientační bodové hodnocení písemné části: 25 - 33 bodů je za 3, 33 - 41 bodů je za 2 a 41 - 50 bodů je za 1. Pro hodnocení ústní části nestanovuju žádné přesné bodové schéma.

Otázky pro ústní část

1. Základní pojmy a definice. 1. (shora, zdola) omezená množina (posloupnost, funkce), supremum a infimum množiny reálných čísel; **2.** vybraná (pod)posloupnost, (ne)rostoucí, (ne)klesající, monotonní, konstantní posloupnost (funkce); **3.** (vlastní a nevlastní) limita posloupnosti, (prstencové, jednostranné) okolí bodu, cauchyovská posloupnost; **4.** limes superior a limes inferior posloupnosti, hromadný bod posloupnosti; **5.** nekonečná řada, (částečný) součet řady, konvergentní a divergentní řady, absolutní konvergence řad, Cauchyova podmínka pro řady; **6.** sudá, lichá, periodická funkce, (lokální, globální, ostré) maximum a minimum funkce na množině; **7.** (jednostranná, nevlastní) limita funkce v bodě a (jednostranná) spojitost funkce v bodě, spojitost na intervalu; **8.** (jednostranná) derivace funkce v bodě, derivace vyšších řádů, Taylorův polynom funkce; **9.** (ryze) konvexní a (ryze) konkávní funkce, inflexní bod, asymptoty funkce; **10.** primitivní funkce k dané funkci, pár pojmů o polynomech: kořen a jeho násobnost, racionální funkce.

2. Tematické okruhy (věty a výsledky bez důkazů). 1. Základní vlastnosti limit posloupností (věty 1 až 4); **2.** Vztahy mezi uspořádáním a limitou posloupnosti (věty 5 až 9); **3.** Vlastnosti limsup a liminf posloupnosti, Bolzano-Cauchy (věty 10-12); **4.** Kritéria konvergence řad (věty 1-6); **5.** Dvě nejdůležitější řady: geometrická a $1^s + 2^s + 3^s + \dots$ (jejich konvergence a součet); **6.** Kritéria neabsolutní konvergence řad (věty 9-11); **7.** Přerovnávání řad (věty 12 a 13); **8.** Vztah limity posloupnosti a limity funkce, základní vlastnosti limit funkcí (věty 1-4); **9.** Limita funkce a uspořádání, limita funkce a skládání funkcí (věty 5-7); **10.** Vlastnosti funkcí spojitých na intervalu (věty 8-12); **11.** Zavedení exponenciály a sinu (věty 13' a 14); **12.** Derivace versus spojitost a počítání derivací (věty 16-19); **13.** Souvislost monotonie funkce a jejích extrémů s derivací (věty 20 a 26); **14.** Věty o střední hodnotě a jejich aplikace (věty 21-25); **15.** Použití druhé derivace: konvexní (konkávní) funkce a inflexní body (věty 27-31); **16.** Taylorův polynom a jeho aplikace (věty 33 a 34, rozvoje funkcí $\exp(x), \sin(x), \cos(x), \log(1+x)$ a $\arctan(x)$ do Taylorovy řady); **17.** Primitivní funkce a jejich základní vlastnosti (věty 1-4); **18.** Počítání primitivních funkcí substitucemi a per partes (věty 5 a 6); **19.** Rozklad racionální funkce na parciální zlomky (věty 7, 8 a 9).

3. Věta(y) s důkazem(y). 1. Dokažte nespočetnost množiny $\mathbf{R}$; **2.** Dokažte, že čísla $\sqrt{2}$ a $e = 2.71828\dots$ jsou iracionální; **3.** Dokažte větu o limitě vybrané posloupnosti a větu o limitě a uspořádání (v. 3 a v. 5); **4.** Dokažte větu o aritmetice limit (v. 4); **5.** Dokažte větu o 2 policajtech a větu o limitě monotonní posloupnosti (v. 6 a 9); **6.** Dokažte vztah mezi liminf, limsup a lim (v. 10); **7.** Dokažte vztah mezi liminf, limsup a hromadnými body (v. 11); **8.** Dokažte Bolzano-Cauchyovu větu a větu o cauchyovské posloupnosti (důsledek v. 11 a v. 12); **9.** Dokažte srovnávací a limitní srovnávací kritérium konvergence řad (v. 2 a 4); **10.** Pojednejte o konvergenci a součtu geometrické řady a dokažte odmocninové (v. 5) nebo podílové kritérium (v. 6); **11.** Dokažte Abelovo a Dirichletovo kritérium (neabsolutní konvergence řad) (v. 10); **12.** Dokažte Leibnizovo kritérium (v. 11) a větu o přerovnání abs. konvergentní řady (v. 12); **13.** Uveďte a dokažte Heineho větu (v. 1) a větu o aritmetice limit (v. 4); **14.** Dokažte větu o limitě složené funkce (v. 6) a větu o limitě monotonní funkce (v. 7); **15.** Dokažte Darbouxovu větu (v. 8) a větu o extrémech spojité funkce (v. 11); **16.** Dokažte větu o omezenosti spojité funkce (v. 10) a větu o spojitosti inverzní funkce (v. 12); **17.** Dokažte větu 13' o existenci exponenciály; **18.** Dokažte základní vlastnosti derivací (v. 16, 17 a 20); **19.** Dokažte větu o derivaci složené funkce (v. 18); **20.** Dokažte větu o derivaci inverzní funkce (v. 19); **21.** Dokažte Cauchyho větu o střední hodnotě (v. 23); **22.** Dokažte jeden ze dvou případů l'Hospitalova pravidla ((i) nebo (ii) věty 24); **23.** Dokažte vlastnosti konvexních (konkávních) funkcí (v. 27, v. 28 a v. 29); **24.** Charakterizujte inflexní body (v. 30 a 31); **25.** Dokažte větu o jednoznačnosti Taylorova polynomu (v. 33); **26.** Dokažte větu o tvaru zbytku Taylorova polynomu (v. 34) a odvoďte Cauchův a Lagrangeův tvar zbytku; **27.** Dokažte základní vlastnosti primitivních funkcí (v. 1 a v. 3); **28.** Dokažte Darbouxovu vlastnost funkcí majících primitivní funkci (v. 4); **29.** Dokažte substituční formuli a formuli pro integraci per partes (v. 5 a v. 6).