MATEMATICKÁ ANALÝZA III

(Učební text — předběžná verze, 8. leden 2018)

MARTIN KLAZAR

Obsah

Předmluva

Tento text bohatě pokrývá a rozšiřuje zápisky z přednášek předmětu *Matematická analýza III (NMAI056)*, který na MFF UK vyučuji od školního roku 2005/06. Kapitola 1 se zabývá metrickými prostory. Kapitola 2 je věnována posloupnostem a řadám funkcí. Základy komplexní analýzy probírá kapitola 3 — hlavní výsledek je, že holomorfní funkce (má všude derivaci) je nutně analytická (je vyjádřená mocninnou řadou). Text je prokládán úlohami. Návody k řešení skoro všech z nich naleznete v závěru. Dobrý přehled o obsahu a stylu skript podává rejstřík.

leden 2018 Martin Klazar

Kapitola 1

Metrické prostory

Znovu — už jsme něco probrali v závěru Matematické analýzy II — zavedeme metrické prostory a související pojmy. V oddílu 1.1 uvedeme řadu příkladů včetně sférických a ultrametrických prostorů a zmíníme se o topologických prostorech. V souvislosti s ultrametrickými prostory dokážeme v odbočce v oddílu 1.2 mimo jiného to, že těleso zlomků $\mathbb{Q}$ se dá netriviálně normovat — každá norma dává též metriku — jen klasicky a p-adicky (a ekvivalentními normami). V oddílu 1.3 probereme vlastnosti kompaktních množin a předvedeme dvě aplikace: důkaz Základní věty algebry a jednu izoperimetrickou úlohu. Pak v oddílu 1.4 zavedeme homeomorfismy, což jsou izomorfismy metrických prostorů vzhledem ke struktuře otevřených množin, a souvislé množiny. Souvislostí dokážeme, že každé komplexní číslo má každou odmocninu a tím dokončíme důkaz Základní věty algebry. V oddílu 1.5 dokážeme lemma o křížení (dvě křivky ve čtverci propojující různé dvojice protilehlých stran se nutně protnou) a ekvivalenci křivkové a obloukové souvislosti v metrických prostorech. Závěrem v oddílu 1.6 probereme úplné metrické prostory a v oddílu 1.7 předvedeme použití úplnosti v důkazu Picardovy věty o diferenciálních rovnicích a v důkazu existence nediferencovatelných spojitých funkcí.

1.1 Příklady metrických prostorů

Metrický prostor, triviální, separabilní, podprostor. Absolutní a relativní vlastnost, vnitřní a vnější definice. Izometrie. Příklady metrických prostorů: L_p metriky, Hammingova metrika, sférická a další. Sféru, čočku ani oktant nelze splácnout. p-adické metriky jako příklady ultrametrik.

Metrický prostor formalizuje jev vzdálenosti pomocí vhodné reálné funkce s dvěma proměnnými.

Definice 1.1.1 (metrický prostor). *Metrický prostor je dvojice* (M, d) *mno-*

žiny M a reálné funkce d o dvou proměnných

$$d:\ M \times M \to \mathbb{R}\ ,$$

zvané metrika či vzdálenost a vyhovující následujícím třem axiomům. Pro každé tři prvky $x, y, z \in M$ platí, že

1. *(nezápornost) $d(x, y) \geq 0$ a $d(x, y) = 0 \iff x = y$,*
2. *(symetrie) $d(x, y) = d(y, x)$ a*
3. *(trojúhelníková nerovnost) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.*

Úloha 1.1.2. *Ukažte, že požadavek nezápornosti metriky v axiomu 1 je nadbytečný a lze ho odvodit z ostatních axiomů.*

Lze na každé množině M zřídit metrický prostor? Ano, například *triviální metrický prostor* (M, d_{tr}), kde $d_{\mathrm{tr}}(a, b) = 1$ pro $a \neq b$ a $d_{\mathrm{tr}}(a, a) = 0$ (hned se vidí, že to je metrika). Jako množina tedy metrický prostor může být jakkoli veliký. Velikost metrického prostoru omezuje tak zvaná separabilita.

Definice 1.1.3 (separabilita). *Nekonečný metrický prostor (M, d) je separabilní, pokud má takovou spočetnou podmnožinu $A \subset M$, že pro každé $b \in M$ a každé reálné $\varepsilon > 0$ existuje prvek $a \in A$, že $d(a, b) < \varepsilon$.*

Obecně, má-li podmnožina A metrického prostoru (M, d) vlastnost popsanou v definici, řekne se o ní, že je (v prostoru M) *hustá*. (Z teorie metrických prostorů toto slovo zjevně přešlo do hovorové češtiny jako expresivní adjektivum.) Separabilní prostory jsou tedy metrické prostory, které mají hustou spočetnou podmnožinu. Připomeňme si, že množina X má *mohutnost kontinua*, psáno $|X| = \mathfrak{c}$, je-li v bijekci s reálnými čísly $\mathbb{R}$ či, ekvivalentně, s potencí přirozených čísel $\exp(\mathbb{N})$. Značení $|X| \leq \mathfrak{c}$ pak znamená, že existuje injekce z X do uvedených množin.

Tvrzení 1.1.4 (nejvýše kontinuum). *Separabilní metrický prostor (M, d) má mohutnost nanejvýš kontinuum, $|M| \leq \mathfrak{c}$.*

Důkaz. Každému bodu $b \in M$ daného separabilního metrického prostoru (M, d) přiřadíme takovou posloupnost $p_b = (a_n) \subset A$ bodů spočetné husté podmnožiny $A \subset M$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $d(b, a_n) < 1/n$. Pro dva body $b, c \in M$ z $p_b = p_c$ a trojúhelníkové nerovnosti plyne, že $d(b, c) < 2/n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tedy $d(b, c) = 0$ a $b = c$. Zobrazení

$$F:\ M \to A^{\mathbb{N}} := \{f:\ \mathbb{N} \to A\},\ F(b) = p_b\ ,$$

je tedy prosté. Snadno se ale vidí, že $A^{\mathbb{N}}$ je v bijekci s $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$ a ta s $\exp(\mathbb{N})$ (úloha 1.1.5). Tedy $|M| \leq \mathfrak{c}$. □

Úloha 1.1.5. *Ukažte, že množiny* $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$ *a* $\exp(\mathbb{N})$ *jsou v bijekci. Stačí patrně sestrojit injekci z první množiny do druhé — proč?*

Později se budeme zabývat třemi důležitými skupinami metrických prostorů, kompaktními, souvislými a úplnými. U každé z nich vždy probereme omezení na mohutnost.

Než se pustíme do příkladů metrických prostorů, zavedeme ještě několik dalších pojmů.

Definice 1.1.6 (podprostor). *Podprostor metrického prostoru* (M, d) *je dán podmnožinou* $A \subset M$ *a rozumíme jím metrický prostor* (A, e)*, kde pro každé* $x, y \in A$ *je* $e(x, y) := d(x, y)$*. Jednodušeji, i když trochu nepřesně, mluvíme o podprostoru* (A, d)*.*

Například každý metrický prostor (M, d) je svým podprostorem nebo i každý bod $a \in M$ tvoří jeho jednobodový podprostor $(\{a\}, d)$ (s jedinou vzdáleností $d(a, a) = 0$).

Máme-li metrický prostor (M, d) a jeho podprostor (A, d), kde $A \subset M$, pak různé metrické vlastnosti podmnožin $X \subset A$ můžeme nahlížet jak v prostoru (M, d) tak v prostoru (A, d). To se týká nejen podmnožin množiny A, ale i složitějších struktur vybudovaných na A (různých relací apod.), do hry také může vstoupit více metrických prostorů. Vlastnosti a pojmy nezávislé na tom, zda je chápeme v celém prostoru či jen v podprostoru, jsou *absolutní.* Ty ostatní jsou *relativní.* Jak vyplyne z definic níže, například omezenost množiny nebo její kompaktnost je absolutní. Na druhou stranu jsou například otevřenost či uzavřenost množiny nebo i konvergence posloupnosti bodů jen relativní. Tato záležitost je možná čtenáři jasná, z výuky ale vím, že v ní dochází k nedorozuměním, a proto ji zde probírám. Věc komplikují definice pojmů a vlastností. Pro ty absolutní bychom chtěli definice, z nichž by absolutnost byla úplně zřejmá (vezme-li se v úvahu definice 1.1.6). Někdy ale absolutní pojmy a vlastnosti zavádějí definice, z nichž se absolutnost musí netriviálně dokazovat či odvozovat. Oba druhy definic si pojmenujeme.

Definice 1.1.7 (metadefinice: vnitřní a vnější). *Vnitřní definice vlastnosti nebo pojmu pro podmnožinu* $X \subset M$ *či složitější strukturu v metrickém prostoru* (M, d) *(popř. i ve více prostorech) používá jen body v* X *či jen prvky dané struktury a metriku* d *(popř. metriky těchto prostorů). Když tomu tak není, v definici figurují i body z* $M \backslash X$ *či prvky mimo danou strukturu, nazveme tuto definici vnější.*

Známý případ je kompaktnost množiny $X \subset M$, která má dvě definice: *sekvenciální* (každá posloupnost bodů z X má podposloupnost konvergující k nějakému bodu v X) a *topologickou* (každé pokrytí X otevřenými *podmnožinami množiny* M má konečné podpokrytí). První definice je vnitřní a absolutnost kompaktnosti je z ní zřejmá. Druhá je vnější a absolutnost z ní není zřejmá a je třeba ji odvodit (což není těžké, viz třeba [27, tvrzení 4.2.1]). Ekvivalence obou definic představuje jeden ze základních a netriviálních výsledků teorie metrických prostorů (zde věta 1.3.35). Vnější definice absolutní vlastnosti nebo absolutního pojmu může mít a obvykle má své výhody — je jednodušší než vnitřní, různé výsledky se s ní snáze dokazují, lze ji lépe zobecnit a podobně. A nakonec, jak jsme právě uvedli, existence dvou ekvivalentních různých definic pro týž pojem nebo vlastnost je sama o sobě zajímavá a osvětluje danou vlastnost či pojem. V dalším se tak při zavádění vlastností a pojmů budeme snažit více či méně podrobně zmínit (ne)absolutnost a relevantní vnitřní a vnější definice. Možná v tomto úsilí někdy ochabneme, doporučujeme ale čtenářce se vždy v každém daném případě nad touto záležitostí zamyslet. Například hustota podmnožiny je relativní pojem, separabilita prostoru je pojem absolutní.

Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je *omezená*, pokud $A \subset B$ pro nějakou kouli $B = B(a, r) \subset M$ s $a \in M$ a $r > 0$; například prázdná či obecněji konečná množina je vždy omezená. To je ovšem vnější definice omezenosti, ale vnitřní se lehce vymyslí:

Tvrzení 1.1.8 (vnitřní definice omezenosti). *Neprázdná množina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je omezená, právě když*

$$\mathrm{diam}(X) := \sup(\{d(x, y) \mid x, y \in X\}) < +\infty$$

(hodnota $\mathrm{diam}(\emptyset)$ *není definovaná, protože prázdná množina nemá supremum).*

Důkaz. Když je X omezená, tak $X \subset B(a, r)$ pro nějaké $a \in M$ a reálné $r > 0$. Pro každé dva body $x, y \in X$ podle trojúhelníkové nerovnosti pak je $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < 2r$. Takže supremum $\mathrm{diam}(X) \leq 2r$ je konečné číslo. Naopak nechť $X \neq \emptyset$ a $\mathrm{diam}(X) = c \in [0, +\infty)$. Pak zřejmě $X \subset B(a, c + 1)$ pro jakékoli $a \in X$ a X je omezená. □

Odsud hned plyne, že omezenost množiny je absolutní pojem. Veličině $\mathrm{diam}(X) \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, definované pro každou neprázdnou podmnožinu X metrického prostoru, se říká *průměr (či diametr)* množiny X (a je též absolutní).

Úloha 1.1.9. *Navrhněte vnitřní definici omezenosti, která by stále pracovala s pojmem koule.*

Izomorfismu — shodě dvou struktur lišících se jen „pojmenováním“ prvků — se pro metrické prostory říká *izometrie.*

Definice 1.1.10 (izometrie). *Bijekce $f: M \to N$ mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e) je izometrie, pokud*

$$\forall\, x, y \in M : \ d(x, y) = e(f(x), f(y)) \, .$$

Existuje-li mezi M a N izometrie, jsou prostory (M, d) a (N, e) izometrické, z praktického hlediska nerozlišitelné. Obecněji jsou podmnožiny $X \subset M$ a $Y \subset N$ izometrické, jsou-li podprostory (X, d) a (Y, e) izometrické.

Například reálná osa $\mathbb{R}$ s euklidovskou metrikou $d(x, y) = |x - y|$ a libovolná přímka $\ell \subset \mathbb{R}^3$, na níž měříme vzdálenosti pomocí euklidovské vzdálenosti v $\mathbb{R}^3$, jsou izometrické metrické prostory. Izometrie je absolutní pojem.

Příklady metrických prostorů. Výše jsme již zmínili triviální prostory. Axiomy 1 a 2 se v příkladech níže skoro vždy lehce ověří (nicméně viz úloha 1.1.19), ale dokázat trojúhelníkovou nerovnost bývá většinou těžší.

Příklad 1 — L_p metriky na n-ticích. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $M = \mathbb{R}^n$ a $p \geq 1$ je reálné číslo. Na M definujeme vzdálenost mezi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jako

$$d_p(x, y) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} .$$

Pro $p = \infty$ definujeme *maximovou metriku*

$$d_\infty(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| .$$

Splnění axiomů 1 a 2 je zřejmé. Trojúhelníková nerovnost se lehce ověří pro $p = 1$ a ∞:

Úloha 1.1.11. *Dokažte, že $d_1(x, y)$ a $d_\infty(x, y)$ splňují trojúhelníkovou nerovnost.*

Těžší důkaz pro $1 < p < \infty$ odsouváme do věty 1.2.1 v následujícím oddílu.

Když $n = 1$ a p je libovolné, máme klasickou metriku $d_p(x, y) = |x - y|$ na reálné ose $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Pro $n \geq 2$ a $p = 1$ máme *pošťáckou metriku*

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| .$$

Pro $n \geq 2$ a $p = 2$ máme *euklidovskou metriku*

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &:= \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} , \end{aligned}$$

kde $\| \cdot \|$ (resp. $\langle \cdot, \cdot \rangle$) je norma (resp. skalární součin) na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$. Například vzdálenost dvou nesousedních vrcholů $u = (0, 1)$ a $v = (1, 0)$ jednotkového čtverce $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ v rovině je

$$d_2(u, v) = \sqrt{(0 - 1)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2} .$$

Jsou-li u, v konce tělesové úhlopříčky jednotkové krychle v $\mathbb{R}^n$, pak $d_2(u, v) = \sqrt{n}$.

Úloha 1.1.12. *Dokažte geometricky, že $d_2(\cdot, \cdot)$ v rovině $\mathbb{R}^2$ (argument ale funguje obecně v každém $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$) splňuje trojúhelníkovou nerovnost. Kdy tato nerovnost platí jako rovnost?*

Definice 1.1.13 (euklidovské prostory). *Euklidovským prostorem rozumíme každý podprostor (M, d_2) metrického prostoru $(\mathbb{R}^n, d_2)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.*

Maximová metrika je limitním případem L_p metrik s konečným p:

Úloha 1.1.14. *Dokažte, že*

$$\lim_{p \to \infty} d_p(x, y) = d_\infty(x, y) \ .$$

Příklad 1,5 — komplexní čísla. Komplexním číslům $\mathbb{C}$ s metrikou

$$d_{\mathbb{C}}(a + bi, c + di) := \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

rozumíme jako euklidovskému prostoru $\mathbb{R}^2$. Můžeme si to dovolit díky izometrii $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $f(a+bi) = (a, b)$. Ovšem na $\mathbb{C}$ máme algebraickou strukturu tělesa $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ a v ní pro vzdálenost čísel $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vyjádření

$$d_{\mathbb{C}}(\alpha, \beta) = \sqrt{(\alpha - \beta) \cdot \overline{\alpha - \beta}} \ .$$

Zde $\overline{\alpha}$ označuje komplexní sdružení ($\overline{a + bi} = a - bi$), jediný neidentický $\mathbb{R}$-automorfismus tělesa $\mathbb{C}$ (bijekce $\mathbb{C}$ na sebe respektující aritmetické operace a fixující každé reálné číslo).

Úloha 1.1.15. *Dokažte, že kromě identity a komplexního sdružení těleso $\mathbb{C}$ nemá jiné $\mathbb{R}$-automorfismy.*

Příklad 2 — supremová metrika na funkcích. Nechť X je libovolná množina a M je množina všech omezených funkcí $f: X \to \mathbb{R}$. Pak definujeme *supremovou metriku*

$$d_{\sup}(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \ .$$

Úloha 1.1.16. *Dokažte, že $d_{\sup}(f, g)$ je metrika.*

Speciálním případem je $M = \mathcal{C}[a, b]$, množina reálných funkcí definovaných a spojitých na intervalu $[a, b]$. Pak se supremum dokonce nabývá a máme zase *maximovou metriku*

$$d_\infty(f, g) = d_{\max}(f, g) := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

(souřadnic je teď nekonečně mnoho, pro každé $x \in [a, b]$ jedna).

Úloha 1.1.17. *Proč se pro spojité funkce supremum nabývá?*

Například pro $[a, b] = [0, \pi]$ je

$$d_\infty(\sin x, \cos x) = \max_{0 \le x \le \pi} |\sin x - \cos x| = \sqrt{2} \ .$$

Úloha 1.1.18. *Dokažte to.*

Příklad 3 — L_p metriky na funkcích. Vezmeme $M = \mathcal{C}[a,b]$ a reálné číslo $p \geq 1$. V analogii s prvním příkladem máme na M vzdálenost

$$d_p(f,g) := \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{1/p} .$$

Úloha 1.1.19. *Dokažte pro tuto vzdálenost první axiom metriky.*

Úloha 1.1.20. *Ukažte, že první axiom metriky není splněn, pokud rozšíříme $\mathcal{C}[a,b]$ na $\mathcal{R}[a,b]$, množinu riemannovsky integrovatelných funkcí. Jak byste tuto obtíž obešli, aby bylo možné na $\mathcal{R}[a,b]$ mít L_p metriku?*

Pro $p = 1$ se této metrice říká *integrální*. Přechod $p \to \infty$ dává maximovou metriku z druhého příkladu:

Úloha 1.1.21. *Dokažte, že*

$$\lim_{p\to\infty} d_p(f,g) = d_\infty(f,g) .$$

Úloha 1.1.22. *Dokažte pro $d_1(f,g)$ trojúhelníkovou nerovnost.*

Pro $1 < p < \infty$ dokážeme trojúhelníkovou nerovnost pro $d_p(f,g)$ v následujícím oddílu ve větě 1.2.2.

Úloha 1.1.23. *Spočítejte L_1 vzdálenost sinu a kosinu na intervalu $[0,\pi]$,*

$$d_1(\sin x, \cos x) = \int_0^\pi |\sin x - \cos x| \, dx = ?$$

Výjimečné postavení má případ $p = 2$ vzdálenosti $d_2(\cdot,\cdot)$, pro n-tice i pro funkce. Metrika $d_2(\cdot,\cdot)$ je totiž odvozena ze skalárního součinu ve vektorovém prostoru, máme tak nad ní hezkou a mocnou geometrickou nadstavbu.

Úloha 1.1.24 (skalární součin a metrika). *Jak přesně v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem*

$$(M, +, x \mapsto cx, \langle\cdot,\cdot\rangle)$$

skalární součin $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dává metriku?

Nemáme bohužel prostor se pustit do podrobností.

Příklad 4 — vzdálenost v grafech. Nechť $G = (M, E)$ je souvislý graf s množinou vrcholů M a množinou hran E, takže $E \subset \binom{M}{2}$ a každé dva vrcholy v G lze spojit cestou. Pak máme *grafovou metriku*

$$d_{\mathrm{gr}}(u,v) := \text{počet hran na nejkratší cestě v } G \text{ spojující } u \text{ a } v .$$

Úloha 1.1.25. *Dokažte, že* $d_{\mathrm{gr}}(u,v)$ *je metrika.*

Například grafová vzdálenost v grafu nekonečné čtvercové mřížky

$$G = (\mathbb{Z}^2, E),\ \{(i,j),(k,l)\} \in E \iff |i-k| + |j-l| = 1\ ,$$

se shoduje s L_1 metrikou: $d_{\mathrm{gr}}(u,v) = d_1(u,v)$.

Úloha 1.1.26. *Dokažte to.*

Příklad 5 — metrika na slovech. Je-li A množina (abeceda) a $m > 0$ celé číslo, máme na množině $M = A^m$ slov délky m nad abecedou A tak zvanou *Hammingovu metriku* ($u = a_1a_2\ldots a_m, v = b_1b_2\ldots b_m$)

$$d_{\mathrm{H}}(u,v) := \text{počet souřadnic } i, \text{ pro něž } a_i \neq b_i\ .$$

Měří míru odlišnosti obou slov — nejmenší počet změn v písmenech postačující k přeměně u ve v.

Úloha 1.1.27. *Dokažte, že* $d_{\mathrm{H}}(u,v)$ *je metrika.*

Například, uvážíme-li (bijektivní) korespondenci podmnožin $X \subset \{1,2,\ldots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$, a jejich charakteristických vektorů $c_X \in \{0,1\}^n$, pak

$$d_{\mathrm{H}}(c_X, c_Y) = |X \Delta Y| = |X \cup Y \backslash X \cap Y|\ .$$

Metrika $d_{\mathrm{H}}(u,v)$ je nazvána po americkém matematikovi, informatikovi a inženýrovi *Richardu W. Hammingovi (1915–1998)* (doktorát získal na Univerzitě v Illinois na téma z diferenciálních rovnic pod vedením W. Trjitzinskyho, zúčastnil se projektu Mannhatan, pracoval v Bellových laboratořích a až do konce života přednášel v Postgraduální námořní škole v Monterey v Kalifornii).

Příklad 6 — vzdálenost na sféře. Na dvourozměrné jednotkové sféře

$$M = S_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

(vnořené do $\mathbb{R}^3$) definujeme *sférickou metriku*

$$d_{\mathrm{sf}}(a,b) := \text{úhel z } [0,\pi] \text{ sevřený úsečkami } \overline{0}a \text{ a } \overline{0}b$$

($a, b \in S_2$ a $\overline{0} = (0,0,0)$ je počátek souřadnic). Hodnota $d_{\mathrm{sf}}(a,b)$ je vlastně délka kratšího z obou oblouků, na něž body a a b dělí hlavní kružnici $K(a,b)$ jimi procházející, přičemž $K(a,b)$ je průnik S_2 s rovinou určenou třemi body $\overline{0}$, a a b. Leží-li tyto tři body na přímce (a a b jsou antipodální), není $K(a,b)$ určena zdaleka jednoznačně, ale to nic nemění na tom, že pak $d_{\mathrm{sf}}(a,b) = \pi$. Dokažme pořádně, že jde o metrický prostor.

Tvrzení 1.1.28 (sférický MP). (S_2, d_{sf}) *je metrický prostor.*

Důkaz. Funkce d_{sf} splňuje první dva axiomy triviálně. Dokážeme trojúhelníkovou nerovnost. Nechť $a, b, c \in S_2$ jsou tři různé body na sféře (pokud některé dva z nich splývají, je tr. nerovnost triviální). Leží-li čtyři body $\overline{0}, a, b$ a c v jedné rovině, leží a, b a c na hlavní kružnici a tr. nerovnost mezi jejich sférickými vzdálenostmi je opět triviální (v jednom případě platí jako rovnost). Předpokládáme tedy, že $\overline{0}, a, b$ a c leží ve vrcholech čtyřstěnu. Nechť ρ je rovina určená třemi body $\overline{0}, a, b$ a c' je kolmá projekce bodu c do roviny ρ. □

Tvrzení 1.1.29 (sféra není plochá). *Následující dvě konečné množiny X_n a X bodů z dvourozměrné sféry S_2 se sférickou metrikou d_{sf} se nedají izometricky vložit do žádného euklidovského prostoru $(\mathbb{R}^n, d_2)$.*

$$X_n = \{s, j, r_1, \ldots, r_{n+1}\} \quad a \quad X = \{s, a, b, c\} \ ,$$

kde $s = (0, 0, 1)$ a $j = (0, 0, -1)$ jsou severní a jižní pól, $r_1, \ldots, r_{n+1}$ je $n + 1$ různých bodů na rovníku ($z = 0$), $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$ a $c = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

Důkaz. Pro spor nechť $X'_n = \{s', j', r'_1, \ldots, r'_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^n$ je izometrické vložení X_n do euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ (se zřejmým spárováním prvků X_n a X'_n). Protože $d_{\mathrm{sf}}(s, r_i) = d_{\mathrm{sf}}(j, r_i) = \frac{\pi}{2}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, má s' i j' od každého bodu r'_i stejnou euklidovskou vzdálenost $\frac{\pi}{2}$ a samozřejmě $s' \neq j'$.

Podobně pro spor nechť $X' = \{s', a', b', c'\} \subset \mathbb{R}^n$ je izometrické vložení X do euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$. Protože $d_{\mathrm{sf}}(s, a) = d_{\mathrm{sf}}(a, b) = d_{\mathrm{sf}}(b, s) = \frac{\pi}{2}$, je trojúhelník $s'a'b' \subset \mathbb{R}^n$ rovnostranný se stranou délky $\frac{\pi}{2}$. Dále $d_{\mathrm{sf}}(a, c) = d_{\mathrm{sf}}(c, b) = \frac{\pi}{4} = \frac{d_{\mathrm{sf}}(a,b)}{2}$. Odtud plyne, že c' je středem úsečky $a'b'$ (c' leží na této úsečce, protože součet jeho vzdáleností od a' a b' je přesně její délka, a současně leží na půlící nadrovině bodů s touž vzdáleností od a' i b'). Tedy $d_2(c', s') = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{2}$ (úsečka $c's'$ je výška v rovnostranném trojúhelníku $s'a'b'$). Což je ve sporu s $d_{\mathrm{sf}}(c, s) = \frac{\pi}{2}$ (c leží na rovníku, stejně jako a a b, a všechny body na rovníku mají od severního pólu stejnou sférickou vzdálenost $\frac{\pi}{2}$). □

Důsledek 1.1.30 (čočka není plochá).

Důsledek 1.1.31 (oktant není plochý).

Příklad 7 — p-adická vzdálenost. V některých metrických prostorech se trojúhelníková nerovnost splňuje v silné podobě.

Definice 1.1.32 (ultrametrický prostor). *Ultrametrický prostor je ten metrický prostor (M, d), že pro každé tři prvky $x, y, z \in M$ máme*

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y)) \ .$$

Metrika d splňující tuto silnější verzi trojúhelníkové nerovnosti se nazývá ultrametrikou či nearchimédovskou metrikou.

Proč nearchimédovská? Sčítání $+$, ať to obvyklé nebo nějaké zobecněné, splňuje Archimédův axiom, pokud pro každé dvě veličiny $u, v > 0$ existuje takové $n \in \mathbb{N}$, že

$$nu = \underbrace{u + u + \cdots + u}_{n \text{ sčítanců}} > v \ .$$

V dané struktuře tak nejsou přítomné ani nekonečně velké prvky, k nimž by se nedalo dostat konečným počtem kroků, ani nekonečně malé prvky (kladné prvky nekonečně blízké 0), které by se od 0 neodlepily po žádném konečném počtu kroků. V ultrametrickém prostoru právě tento axiom neplatí. Máme-li třeba nějaký ultrametrický normovaný vektorový prostor (M, d) s normou $\|\cdot\|$, pak ($\overline{0} \in M$ označuje počátek souřadnic, nulový vektor, a $+$ sčítání v daném vektorovém prostoru)

$$\forall\, x \in B(\overline{0}, 1)\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ nx = x + x + \cdots + x \in B(\overline{0}, 1)\ ,$$

protože $d(\overline{0}, 2x) = \|x + x\| \le \max(\|x\|, \|x\|) = \|x\| = d(\overline{0}, x)$, $d(\overline{0}, 3x) = \|2x + x\| \le \max(\|2x\|, \|x\|) \le \|x\| = d(\overline{0}, x)$ a tak dále. Ať se jakýkoli vektor x z jednotkové koule přičítá sám k sobě kolikrát chce, z jednotkové koule se nikdy nedostane, dokonce jeho vzdálenost od počátku nevzroste. To značně odporuje naší intuici, vybudované na euklidovských prostorech $\mathbb{R}^n$, které jsou archimédovské. Předvedeme nekonečně mnoho příkladů nearchimédovských prostorů.

Definice 1.1.33 (p-adická norma a metrika na $\mathbb{Q}$). *Pro prvočíslo $p \in \mathbb{N}$ a nenulové celé číslo $a \in \mathbb{Z}$ jako $\mathrm{ord}_p(a) = k \in \mathbb{N}_0$ (tzv. p-adický řád čísla a) označíme největší k, že p^k dělí a. Definujeme $\mathrm{ord}_p(0) = +\infty$. Pro zlomek $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ jeho p-adický řád definujeme jako $\mathrm{ord}_p(\alpha) = \mathrm{ord}_p(a) - \mathrm{ord}_p(b) \in \mathbb{Z}$. Pro zlomek α pak definujeme jeho p-adickou normu $\|\cdot\|_p$ jako*

$$\|\alpha\|_p := \left(\frac{1}{p}\right)^{\mathrm{ord}_p(\alpha)} \in \{p^m \mid m \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$$

(zde $\|0\|_p = (1/p)^{+\infty} = 0$). Konečně pro zlomky $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ jejich p-adická vzdálenost se definuje jako

$$d_{p\text{-ad}}(\alpha, \beta) := \|\alpha - \beta\|_p \ .$$

Například,

$$d_{3\text{-ad}}(17/5, 1) = 1/3 \ \text{ a } \ d_{5\text{-ad}}(17/5, 1) = 5 \ .$$

Na první pohled tato definice zajisté vypadá dosti složitě, a tak se pokusíme ji v pár poznámkách přiblížit a vysvětlit její pozadí. Obyčejná absolutní hodnota $|\cdot|$ na $\mathbb{R}$ i na $\mathbb{Q}$ nejenže splňuje trojúhelníkovou nerovnost $|a + b| \le |a| + |b|$, ale také respektuje součin: $|ab| = |a| \cdot |b|$. Dává tak příklady *normovaných těles.*

Definice 1.1.34 (normované těleso). *Normované těleso je algebraická struktura $T = (T, +, \cdot, \|\cdot\|)$ tělesa $(T, +, \cdot)$ a funkce*

$$\|\cdot\|:\ T \to \mathbb{R}$$

zvané norma, jež není identicky nulová a splňuje následující tři axiomy. Pro každé dva prvky $x, y \in T$ platí, že

1. $\|x\| \geq 0$ *a* $\|x\| = 0 \iff x = 0_T$*,*
2. *(multiplikativita)* $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$ *a*
3. *(trojúhelníková nerovnost)* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*.*

Další normovaná tělesa jsou $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ s *triviální normou*, jež posílá 0 na 0 a vše ostatní na 1. Normované těleso je automaticky metrickým prostorem,

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

je metrika na T.

Úloha 1.1.35. *Ověřte to.*

1.2 Minkowski, Gödel, Ostrowski

Minkowskiho nerovnost. Gödelovo izometrické vložení čtyřstěnu do sféry. Ostrowskiho věta o normách na $\mathbb{Q}$.

Věta 1.2.1 (Δ-ová nerovnost pro n-tice). *Pro jakákoli reálná čísla $p \geq 1$ a $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ je*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Důkaz.

□

Věta 1.2.2 (Δ-ová nerovnost pro funkce). *Je-li $p \geq 1$ reálné číslo a $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, pak*

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Důkaz.

□

Věta 1.2.3 (Ostrowski, 1916). *Nechť $\| \cdot \|$ je norma na tělese zlomků $\mathbb{Q}$. Pak*

1. *(triviální norma)* $\|0\| = 0$ *a pro každý zlomek* $\alpha \neq 0$ *je* $\|\alpha\| = 1$ *nebo*

2. *(ekvivalence s klasickou normou) existuje konstanta* $c \in (0,1]$*, že pro každý zlomek* α *je*
$$\|\alpha\| = |\alpha|^c$$
nebo

3. *(ekvivalence s p-adickou normou) existuje konstanta* $c \in (0,1)$ *a prvočíslo* p*, že pro každý zlomek* α *je*
$$\|\alpha\| = c^{\mathrm{ord}_p(\alpha)}\ .$$

Důkaz. Pokud $\|n\| = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, máme podle multiplikativity normy první případ s triviální normou. Jinak rozlišíme dvě možnosti.

Existuje $n \in \mathbb{N}$ *s* $\|n\| > 1$. Nechť n_0 je nejmenší takové přirozené číslo. Pak $n_0 \geq 2$, protože 1 má vždy normu 1. Reálné $\alpha \in (0,1]$ definujeme vztahem $n_0^\alpha = \|n_0\|$. Zde $\alpha \leq 1$, protože vždy $\|n\| \leq \|1\| + \|1\| + \cdots + \|1\| = n$. Každé $n \in \mathbb{N}$ má při základu n_0 rozvoj
$$n = a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_s n_0^s,\ a_i \in \{0,1,\ldots,n_0-1\} \ \text{ a } \ a_s \neq 0\ .$$
Pak
$$\|n\| \leq \|a_0\| + \|a_1\| \cdot n_0^\alpha + \|a_2\| \cdot n_0^{2\alpha} + \cdots + \|a_s\| \cdot n_0^{s\alpha}\ .$$
Podle volby n_0 máme vždy $\|a_i\| \leq 1$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ je
$$\|n\| \leq n_0^{s\alpha}(1 + n_0^{-\alpha} + n_0^{-2\alpha} + \cdots + n_0^{-s\alpha}) \leq n^\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1/n_0^\alpha)^i := n^\alpha C\ .$$
Speciálně pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ je
$$\|n\|^m = \|n^m\| \leq C(n^m)^\alpha = C(n^\alpha)^m \ \text{ a tedy } \ \|n\| \leq C^{1/m} n^\alpha\ .$$
Limitní přechod $m \to \infty$ dává $\|n\| \leq n^\alpha$.

Odvodíme opačnou nerovnost. Číslo $n \in \mathbb{N}$ rozvineme při základu n_0 jako předtím, což dává $n_0^{s+1} > n \geq n_0^s$. Z $\|n_0^{s+1}\| \leq \|n\| + \|n_0^{s+1} - n\|$ máme (podle multiplikativity normy, definice α a již odvozené nerovnosti)
$$\|n\| \geq \|n_0^{s+1}\| - \|n_0^{s+1} - n\| \geq n_0^{(s+1)\alpha} - (n_0^{s+1} - n)^\alpha\ .$$
Tedy ($n \geq n_0^s$)
$$\|n\| \geq n_0^{(s+1)\alpha} - (n_0^{s+1} - n_0^s)^\alpha = n_0^{(s+1)\alpha}(1 - (1 - 1/n_0)^\alpha) \geq D n^\alpha\ ,$$
pro nějakou konstantu $D > 0$ nezávislou na n. Stejným trikem pomocí umocnění a odmocnění dostáváme $\|n\| \geq n^\alpha$. Tedy $\|n\| = n^\alpha$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a vlastně (podle multiplikativity normy) pro každé nenulové $n \in \mathbb{Q}$ je $\|n\| = |n|^\alpha$. Máme druhý případ s normou ekvivalentní klasické (absolutní hodnotě).

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ *je* $\|n\| \leq 1$ *a existuje* $n \in \mathbb{N}$ *s* $\|n\| < 1$. Nechť n_0 je nejmenší takové přirozené číslo. Toto $n_0 =: p$ je prvočíslo ($n_0 = n_1 n_2$ s přirozenými čísly $1 < n_1, n_2 < n_0$ nelze vzhledem k minimalitě n_0 a multiplikativitě normy). Tvrdíme, že pro každé jiné prvočíslo $q \neq p$ je $\|q\| = 1$. Kdyby totiž bylo $\|q\| < 1$, pak pro dostatečně velké $m \in \mathbb{N}$ je $\|q^m\|, \|p^m\| < \frac{1}{2}$ (multiplikativita normy) a z těchto dvou mocnin lze díky jejich nesoudělnosti celočíselně lineárně zkombinovat jedničku (úloha 1.2.4), takže (pro nějaká $a, b \in \mathbb{Z}$) máme spor

$$1 = \|1\| = \|aq^m + bp^m\| \leq \|a\| \cdot \|q^m\| + \|b\| \cdot \|p^m\| < 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} < 1 \; .$$

Tím jsme skoro hotovi: $n \in \mathbb{N}$ rozložíme na prvočísla a multiplikativitou normy dostaneme

$$\|n\| = \|p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}\| = \|p_1\|^{a_1} \cdot \ldots \cdot \|p_k\|^{a_k} = c^{\mathrm{ord}_p(n)}, \; c = \|p\| \; .$$

Díky multiplikativitě normy toto platí vlastně pro každé nenulové $n \in \mathbb{Q}$ a máme třetí případ s normou ekvivalentní p-adické. □

Úloha 1.2.4 (Bachetova identita). *Dokažte, že pro každá dvě nesoudělná čísla $m, n \in \mathbb{Z}$ existují $a, b \in \mathbb{Z}$, že*

$$am + bn = 1 \; .$$

Alexander Ostrowski (1893–1986) (narodil se v Kijevě)

1.3 Kompaktní množiny

Základní pojmy: koule, otevřené a uzavřené množiny, konvergence, spojitost. Kompaktnost a její vlastnosti. Důkaz (přesněji, redukce) Základní věty algebry pomocí principu maxima/minima. Topologická definice kompaktnosti a Heineho–Borelova věta.

Oživíme si základní látku o metrických prostorech, vyloženou v závěru letního semestru v Matematické analýze II, a pak přejdeme k novým věcem. Nechť (M, d) je metrický prostor. *Koulí (či přesněji otevřenou koulí) se středem v bodě $a \in M$ a poloměrem $r \in (0, +\infty)$* rozumíme podmnožinu

$$B(a, r) := \{x \in M \mid d(x, a) < r\} \subset M \; .$$

Množina $X \subset M$ je *otevřená*, když pro každý bod $a \in X$ existuje poloměr $r > 0$, že $B(a, r) \subset X$. Doplňky otevřených množin do M jsou *uzavřené množiny*. Připomeňte si vlastnosti těchto tříd podmnožin metrického prostoru.

Úloha 1.3.1. *Každá koule $B(a, r)$ je otevřená množina. Množiny $\emptyset$ a M jsou otevřené i uzavřené. Průnik dvou (tedy konečně mnoha) otevřených množin je otevřená množina. Totéž platí pro sjednocení a uzavřené množiny. Sjednocení jakéhokoli systému otevřených množin je otevřená množina. Totéž platí pro průnik a uzavřené množiny.*

Koule v (M,d) je pochopitelně relativní pojem, $B(0,1)=(-1,1)$ v euklidovském prostoru $\mathbb{R}$, ale $B(0,1)=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ v jeho podprostoru $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Rovněž otevřenost a uzavřenost množiny jsou relativní, například $\mathbb{Q}$ je uzavřená v podprostoru $\mathbb{Q}$ prostoru $\mathbb{R}$, ale v celém $\mathbb{R}$ uzavřená není.

Množinový systém (X,τ), kde $\tau\subset\exp(X)$ (τ je tedy systém některých podmnožin X), který má předchozí vlastnosti otevřených množin — $\emptyset, X\in\tau$ a τ je uzavřený na konečné průniky a libovolná sjednocení — se nazývá *topologickým prostorem.* Otevřené množiny metrického prostoru tedy tvoří topologický prostor. Existuje ovšem mnoho topologických prostorů, které nelze získat z metrických.

Úloha 1.3.2. *Uveďte nějaký příklad, co možná nejjednodušší, topologického prostoru, který není tvořen otevřenými množinami metrického prostoru.*

Popíšeme vztah mezi otevřenými a uzavřenými množinami v podprostoru a v celém prostoru.

Tvrzení 1.3.3 (otevřené množiny v podprostoru). *Nechť (M,d) je metrický prostor a (A,d), kde $A\subset M$, je jeho podprostor. Množina $X\subset A$ je otevřená v (A,d), právě když $X=A\cap Y$ pro nějakou otevřenou množinu $Y\subset M$ v (M,d). Podobně pro uzavřené množiny.*

Důkaz. Stačí dokázat první část tvrzení, část pro uzavřené množiny plyne přechodem k doplňkům. Označíme si pořádně koule v M a v A s týmž středem $a\in A$ a poloměrem $r>0$, jinak se do toho zamotáme:

$$B_M(a,r)=\{x\in M\mid d(x,a)<r\}\ \text{ a }\ B_A(a,r)=\{x\in A\mid d(x,a)<r\}$$

($B_A(a,r)\subset B_M(a,r)$, ale nemusejí se rovnat). Nechť je $X\subset A$ otevřená v A. Položíme

$$Y:=\bigcup\{B_M(a,r)\mid a\in X,\ r>0,\ B_A(a,r)\subset X\}\ .$$

Množina $Y\subset M$ je otevřená v M, je totiž sjednocením množin otevřených v M (úloha 1.3.1). Dále

$$X=A\cap Y$$

— z $a\in X$ plyne $a\in A$ a $B_A(a,r)\subset X$ pro nějaké $r>0$ (X je otevřená v A), tedy $B_M(a,r)\subset Y$ a $a\in Y$, a z $x\in A\cap Y$ plyne $x\in A$ a $x\in B_M(a,r)$ pro nějakou kouli v M splňující $a\in X$ a $B_A(a,r)\subset X$, tedy $x\in B_A(a,r)$ a $x\in X$.

Nechť naopak $Y\subset M$ je otevřená v M. Pak

$$Y\cap A=\bigcup\{B_A(a,r)\mid a\in Y\cap A,\ r>0,\ B_M(a,r)\subset Y\}$$

— z $a\in Y\cap A$ plyne $B_M(a,r)\subset Y$ pro nějaké $r>0$ (Y je otevřená v M), tedy díky $a\in B_A(a,r)$ je a prvkem pravé strany, a je-li x prvkem pravé strany, máme $x\in B_A(a,r)\subset B_M(a,r)\subset Y$ pro nějakou kouli $B_A(a,r)$ v A, tedy $x\in A$ i $x\in Y$. Pravá strana je otevřená množina v A, je totiž sjednocením množin otevřených v A (úloha 1.3.1). $\square$

Proto se obecně v topologii pro topologické prostory definují otevřené množiny podprostoru jako průniky otevřených množin celého prostoru s podmnožinou definující podprostor a jde o definici. Pro metrické prostory to ale je tvrzení, jež je nutné dokázat.

Popíšeme otevřené množiny základního euklidovského prostoru $\mathbb{R}$. Připomeňme si, že *interval* je každá množina $X \subset \mathbb{R}$ splňující implikaci

$$a, b \in X,\ c \in \mathbb{R},\ a < c < b \Rightarrow c \in X\ .$$

Jeho *konce* jsou $\inf(X)$ a $\sup(X)$, jsou-li konečné. Otevřené intervaly tedy jsou množiny $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ a (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$. Je jasné, že interval je otevřený, právě když neobsahuje svůj žádný konec.

Úloha 1.3.4 (jedna vlastnost intervalů). *Dokažte tuto vlastnost intervalů: je-li $Z \subset \exp(\mathbb{R})$ množina intervalů s $\bigcap Z \neq \emptyset$ (existuje bod ležící v každém intervalu $I \in Z$), pak sjednocení $\bigcup Z$ je interval.*

Věta 1.3.5 (reálné otevřené množiny). *Pro každou otevřenou množinu X v euklidovském prostoru $\mathbb{R}$ existuje právě jedna nejvýše spočetná množina Z po dvou disjunktních neprázdných otevřených intervalů, že*

$$X = \bigcup Z\ .$$

Důkaz. Pro $X = \emptyset$ je zřejmě $Z = \emptyset$, a tak předpokládáme $X \neq \emptyset$. Pro každé $x \in X$ definujeme

$$I_x := \bigcup \{I \mid x \in I \subset X \text{ a } I \text{ je interval}\}\ .$$

Podle úlohy 1.3.4 je I_x interval, zřejmě vzhledem k inkluzi největší interval obsahující x a obsažený v X. Neobsahuje svůj žádný konec (jinak bychom díky otevřenosti X a úloze 1.3.4 dostali spor s maximalitou I_x) a je tedy otevřený. Pro každé dva různé body $x, y \in X$ je $I_x = I_y$ nebo $I_x \cap I_y = \emptyset$, opět díky maximalitě I_x a I_y a úloze 1.3.4. Množina

$$Z = \{I_x \mid x \in X\}$$

tak má uvedené vlastnosti (hned ukážeme, že není nespočetná). Naopak, je-li $Z' \neq \emptyset$ množina po dvou disjunktních neprázdných otevřených intervalů s $\bigcup Z' = X$, pak pro každý bod a interval $x \in I \in Z'$ je zřejmě $I = I_x$. Tedy $Z' = Z$. Zobrazení vybírající z každého $I \in Z$ jeden zlomek $\alpha \in I$ je injekce ze Z do $\mathbb{Q}$, takže Z je nejvýše spočetná. □

Nechť (M, d) je metrický prostor. Posloupnost $(a_n) \subset M$ *konverguje* k *limitě* $a \in M$, značeno $\lim a_n = a$ nebo $a_n \to a$, pokud

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$$

— mluvíme o *konvergentní posloupnosti* (a_n). Konvergence v metrickém prostoru se tak metrikou převádí na konvergenci posloupností reálných čísel. Konvergence posloupnosti (a_n) je relativní pojem, ale pro danou $X \subset M$ je konvergence posloupnosti $(a_n) \subset X$ k bodu v X pojem absolutní.

Je-li (N, e) další metrický prostor, je zobrazení $f:\ M \to N$ *spojité*, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall a \in M\, \exists \delta > 0:\ x \in M,\ d(a,x) < \delta \Rightarrow e(f(a), f(x)) < \varepsilon\ ,$$

což je (i není) totéž jako

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall a \in M\, \exists \delta > 0:\ f(B(a,\delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)\ ,$$

kde první koule je v M a druhá v N. Druhá definice spojitosti je trochu kratší než první, ale je vnější, zatímco první je vnitřní, používá jen prvky množiny $\{(x, f(x)) \mid x \in M\}$ a obě metriky d a e. Z první definice tak hned plyne absolutnost spojitosti zobrazení: je-li B jakákoli mezimnožina $f(M) \subset B \subset N$, pak $f:\ M \to N$ je spojité, právě když $f:\ M \to B$ je spojité.

Úloha 1.3.6. *Dokažte to pomocí druhé definice.*

Následující charakterizace uzavřených množin je známá a důležitá.

Úloha 1.3.7. *Množina $A \subset M$ je uzavřená, právě když pro každou konvergentní posloupnost $(a_n) \subset A$ je i $\lim a_n \in A$.*

Například $A = [0,1) \subset \mathbb{R}$ není uzavřená množina reálné osy, protože posloupnost $(1 - \frac{1}{n}) \subset A$ je konvergentní v $M = \mathbb{R}$, ale její limita 1 neleží v A. Ovšem jako podprostor prostoru $[-1,1)$ uzavřená je (posloupnost $(1 - \frac{1}{n})$ není konvergentní v $[-1,1)$).

Tvrzení 1.3.8 (topologická definice spojitosti). *$f:\ M \to N$ buď zobrazení mezi metrickými prostory (M,d) a (N,e). Platí ekvivalence*

$$f \text{ je spojité} \iff \text{pro každou otevřenou } Y \subset N \text{ je } f^{-1}(Y) \subset M \text{ otevřená}\,.$$

Důkaz. Nechť je zobrazení f spojité podle definice, $Y \subset N$ je otevřená množina a $a \in f^{-1}(Y)$ je bod. Tedy $f(a) \in Y$. Díky otevřenosti Y je $B(f(a), r) \subset Y$ pro nějaké $r > 0$ a díky spojitosti f existuje $s > 0$, že $f(B(a,s)) \subset B(f(a), r) \subset Y$. Tedy $B(a,s) \subset f^{-1}(Y)$. Ukázali, jsme, že $f^{-1}(Y)$ je otevřená množina v M. Naopak, nechť je f topologicky spojité zobrazení a jsou dány $a \in M$ a $\varepsilon > 0$. Koule $B(f(a), \varepsilon) \subset N$ je otevřená množina (úloha 1.3.1) a díky topologické spojitosti f je $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ otevřená množina v M, která obsahuje bod a. Tedy existuje poloměr $\delta > 0$, že $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Což znamená, že $f(B(a,\delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$ a f je spojité zobrazení podle definice. □

Tak se přesně definuje spojitost zobrazení mezi topologickými prostory. K topologické definici spojitosti dodáme ještě, že je vnější, a následující úlohu.

Úloha 1.3.9. *Ukažte, že ekvivalence v tvrzení platí i po náhradě otevřených množin uzavřenými.*

A ještě jedna definice spojitosti zobrazení, tentokrát vnitřní.

Úloha 1.3.10. *Dokažte, že zobrazení $f: M \to N$ mezi dvěma metrickými prostory je spojité, právě když zachovává limity posloupností: když $(a_n) \subset M$ konverguje k a, pak $\lim f(a_n) = f(a)$.*

Definujeme uzávěr množiny. Zřejmě to je relativní pojem.

Definice 1.3.11 (uzávěr). *Uzávěr množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) označujeme jako $\overline{X} \subset M$ a definujeme jako průnik všech uzavřených množin v M obsahujících X. Vzhledem k inkluzi to je nejmenší uzavřená množina v M obsahující X.*

Například v euklidovském prostoru $\mathbb{R}$ je $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Patrně vždy $X \subset \overline{X}$ a rovnost nastává, právě když je X uzavřená. Množiny $A, B \subset M$ nazveme *oddělenými*, pokud $A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \emptyset$.

Úloha 1.3.12. *Nechť $a, b \in M$ jsou dva různé body v metrickém prostoru. Ukažte, že množiny $\{a\}$ a $\{b\}$ jsou oddělené a že v M existují disjunktní otevřené množiny A a B s $a \in A$ a $b \in B$.*

Tento výsledek zobecníme.

Věta 1.3.13 (úplná normalita MP). *Nechť $A, B \subset M$ jsou oddělené množiny v metrickém prostoru (M, d). Pak existují disjunktní otevřené množiny $U, V \subset M$ s $A \subset U$ a $B \subset V$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $A, B \neq \emptyset$. Definujeme funkci vzdálenosti bodu od množiny A:

$$d_A(x) := \inf_{y \in A} d(x, y) : M \to [0, +\infty) .$$

Tato funkce je spojitá (úloha 1.3.14). Analogicky definujeme spojitou funkci $d_B(x)$ vzdálenosti bodu od množiny B. Vezmeme ale funkci

$$f(x) := d_A(x) - d_B(x) : M \to \mathbb{R} ,$$

která je rovněž spojitá. Množiny

$$U := f^{-1}((-\infty, 0)) \text{ a } V := f^{-1}((0, +\infty))$$

pak mají požadované vlastnosti. Jsou zjevně disjunktní a otevřené (podle tvrzení 1.3.8). Pro $x \in A$ je $d_A(x) = 0$ (zřejmé) a $d_B(x) > 0$ (x je vnější bod B díky oddělenosti A a B). Pro $x \in B$ to platí naopak, $d_A(x) > 0$ a $d_B(x) = 0$. Tedy $f(A) \subset (-\infty, 0)$ a $f(B) \subset (0, +\infty)$ a $A \subset U, B \subset V$. □

Úloha 1.3.14. *Dokažte, že vzdálenost bodu x od podmnožiny metrického prostoru je spojitou funkcí x. Všimněte si, že to je absolutní pojem.*

Nyní se konečně dostáváme k hlavnímu tématu oddílu. Jak jsme již uvedli na začátku, z následující definice je zřejmá absolutnost kompaktnosti.

Definice 1.3.15 (kompaktní množiny a prostor). *Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je kompaktní, má-li každá posloupnost $(a_n) \subset A$ konvergentní podposloupnost s limitou v A. Prostor (M, d) je tedy kompaktní, má-li v něm každá posloupnost konvergentní podposloupnost.*

Podíváme se na mohutnosti kompaktních metrických prostorů. Není těžké nahlédnout, že každý konečný prostor je kompaktní a že spočetný prostor může a nemusí být kompaktní. Rovněž se lehce vidí, že na každé nekonečné množině lze zřídit nekompaktní metrický prostor.

Úloha 1.3.16. *Dokažte, že každý konečný metrický prostor je kompaktní. Uveďte příklady kompaktního a nekompaktního spočetného prostoru.*

Úloha 1.3.17. *Ukažte, že pro každou nekonečnou množinu M existuje metrika $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$, že (M, d) je nekompaktní metrický prostor.*

Velikost kompaktního prostoru odhadneme pomocí tvrzení 1.1.4 a silné omezenosti. Řekneme, že podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je *silně omezená*, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $B = B_\varepsilon \subset M$, že $A \subset \bigcup_{b \in B} B(b, \varepsilon)$ (koule se chápou v M). Silná omezenost patrně implikuje omezenost. Je-li celý prostor M silně omezený a nekonečný, je zřejmě $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{1/n}$ spočetná hustá podmnožina a M je separabilní. Na druhou stranu, například euklidovský prostor $\mathbb{R}$ je separabilní, ale není omezený, tím spíše není silně omezený. Silná omezenost je absolutní vlastnost.

Úloha 1.3.18 (vnitřní definice silné omezenosti). *Podejte vnitřní definici silné omezenosti.*

Tvrzení 1.3.19 ($|$kompaktní MP$| \le \mathfrak{c}$). *Každý kompaktní metrický prostor (M, d) je silně omezený. Je-li M nekonečný, je tedy separabilní. Tedy kompaktní metrický prostor má mohutnost nejvýše kontinuum,*

$$|M| \le \mathfrak{c}\ .$$

Důkaz. Pokud M není silně omezený, existuje $\varepsilon > 0$, že M není sjednocením žádných konečně mnoha koulí s poloměrem ε. Snadno se vidí, že pak existuje posloupnost $(a_n) \subset M$, že $d(a_m, a_n) \ge \varepsilon$ pro každé dva indexy $m < n$ a to platí i pro libovolnou podposloupnost. Posloupnost (a_n) tak nemá konvergentní podposloupnost a M není kompaktní. Kompaktní M tak splňuje $|M| \le \mathfrak{c}$ podle tvrzení 1.1.4. □

Příkladem kompaktního metrického prostoru mohutnosti $\mathfrak{c}$ je každý euklidovský prostor $[a, b]$ s reálnými čísly $a < b$. A kolik je kompaktních metrických prostorů? Dva izometrické prostory samozřejmě nepovažujeme za různé.

Tvrzení 1.3.20 (počet kompaktních MP). *Každá množina X vzájemně neizometrických kompaktních metrických prostorů splňuje $|X| \le \mathfrak{c}$. Existuje X, pro níž se nabývá rovnost.*

Důkaz.

□

S mohutnostmi kompaktních metrických prostorů jsme se ale ještě úplně nevypořádali. Když nepřijmeme *hypotézu kontinua*, že $2^{\aleph_0}(= \mathfrak{c}) = \aleph_1$, pak existují nekonečné nespočetné množiny X s mohutností ostře menší než $\mathfrak{c}$,

$$\aleph_0 < |X| < \mathfrak{c}\ .$$

Lze na takové množině X zřídit kompaktní metrických prostor? (Nekompaktní lze, podle úlohy 1.3.17.) Ve větě **??** ukážeme, že odpověď je záporná. Pro mohutnosti kompaktních metrických prostorů tak hypotéza kontinua platí.

Připomeneme si další vlastnosti kompaktních množin.

Úloha 1.3.21. *Dokažte, že každá uzavřená podmnožina kompaktního metrického prostoru je kompaktní.*

Úloha 1.3.22. *Dokažte, že každá kompaktní množina v metrickém prostoru je omezená a uzavřená.*

Úloha 1.3.23. *Dokažte, že spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina: jsou-li (M, d) a (N, e) metrické prostory, $A \subset M$ je kompaktní a $f:\ M \to N$ je spojité zobrazení, pak $f(A)$ je kompaktní podmnožina N.*

V euklidovských prostorech lze implikaci z úlohy 1.3.22 obrátit, obecně však nikoli:

Věta 1.3.24 (kompakty a uzavřenost a omezenost). *1. Podmnožina euklidovského prostoru je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.*

2. Metrický prostor

$$(M,\, d) = (\{f \mid f:\ \mathbb{N} \to [0, 1]\},\, d_{\mathrm{sup}})$$

je (triviálně) uzavřený a je omezený, ale není kompaktní.

Důkaz. 1. Implikace $\Rightarrow$ platí podle úlohy 1.3.22 obecně. Naopak nechť $A \subset \mathbb{R}^m$ je nějaká omezená a uzavřená podmnožina a $(a_n) \subset A$ je libovolná posloupnost. Pak (a_n) v každé z m souřadnic dává omezenou posloupnost v $\mathbb{R}$ a m-násobným použitím Bolzanovy–Weierstrassovy věty z MAI z (a_n) vybereme podposloupnost (b_n), která v každé z m souřadnic konverguje (jako posloupnost v $(\mathbb{R}, |x-y|)$. To ale znamená (podle úlohy 1.3.25), že celá (b_n) konverguje v metrice d_2 k nějakému bodu $b \in \mathbb{R}^m$. Díky uzavřenosti A (a úloze 1.3.7) je $b \in A$ a vidíme, že A je kompaktní.

2. Celý M je vždy uzavřený. Označíme-li jako f_0 identicky nulovou funkci, pak $M \subset B(f_0, 2)$ (vlastně $M = B(f_0, r)$ pro každý poloměr $r > 1$) a celý prostor je omezený. Ale posloupnost (funkcí)

$$(f_n) \subset M,\ f_n(n) = 1 \ \text{ a } \ f_n(x) = 0 \ \text{ pro } \ x \neq n\ ,$$

nemá konvergentní podposloupnost, protože $d(f_m, f_n) = 1$ pro každé dva různé indexy m a n. □

Úloha 1.3.25. *Dokažte, že $(a_n) \subset \mathbb{R}^m$ konverguje v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^m$, právě když v každé z m souřadnic (a_n) tvoří konvergentní posloupnost v euklidovském prostoru $\mathbb{R}$.*

Věta 1.3.26 (princip maxima/minima). *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na metrickém prostoru (M, d) a $\emptyset \neq A \subset M$ je kompaktní podmnožina. Pak existují takové body $a, b \in A$, že pro každé $x \in A$*

$$f(a) \le f(x) \le f(b)$$

— funkce f nabývá na A v bodě a svou nejmenší a v bodě b svou největší hodnotu.

Důkaz. Podle úlohy 1.3.23 je $f(A)$ kompaktní podmnožina euklidovského prostoru $\mathbb{R}$. Podle úlohy 1.3.22 je $f(A)$ omezená a uzavřená (a neprázdná) podmnožina $\mathbb{R}$. Tedy, podle věty z MAI, má infimum a supremum a vzhledem k uzavřenosti dokonce $\inf(f(A)), \sup(f(A)) \in f(A)$ (podle aproximační vlastnosti infima a suprema a podle úlohy 1.3.7). Libovolné dva body

$$a \in f^{-1}(\inf(f(A))) \ \text{ a } \ b \in f^{-1}(\sup(f(A)))$$

pak zřejmě mají uvedenou vlastnost. □

Spojité zobrazení $f : M \to N$ mezi metrickými prostory (M, d) a (N, e) je *stejnoměrně spojité*, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ x, y \in M,\ d(x, y) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(y)) < \varepsilon\ .$$

Tvrzení 1.3.27 (stejnoměrná spojitost). *Spojité zobrazení z kompaktního metrického prostoru do jiného metrického prostoru je stejnoměrně spojité.*

Důkaz. Nechť pro spor je zobrazení $f : M \to N$ spojité, ale ne stejnoměrně, a M je kompaktní. Existuje tedy $\varepsilon_0 > 0$, že pro každé $\delta > 0$ pro nějaké dva body $a, b \in M$ máme $d(a, b) < \delta$ a $e(f(a), f(b)) \ge \varepsilon_0$. Volíme třeba $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ a přechodem ke konvergentním podposloupnostem (díky kompaktnosti prostoru

M) získáme konvergentní posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset M$, že $d(a_n, b_n) \to 0$, ale $e(f(a_n), f(b_n)) \geq \varepsilon_0$ pro každý index $n \in \mathbb{N}$. Protože f je spojité v bodě

$$a := \lim a_n = \lim b_n \in M ,$$

existuje $\delta > 0$, že $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon_0/2)$ (první koule je v M a druhá v N). Vezmeme tak velké m, že $a_m, b_m \in B(a, \delta)$. Pak $f(a_m), f(b_m) \in B(f(a), \varepsilon_0/2)$ a podle Δ-ové nerovnosti dostáváme spor $e(f(a_m), f(b_m)) < \varepsilon_0$ s předchozí nerovností. □

Předvedeme dvě aplikace této věty 1.3.26. První je důkaz tak zvané *Základní věty algebry (ZVA)*. Ta praví, že každý nekonstantní polynom s komplexními koeficienty má kořen: když

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,\ a_i \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0 \ \text{ a } \ n \geq 1 ,$$

pak existuje $\alpha \in \mathbb{C}$, že $p(\alpha) = 0$. Máme-li tento analytický fakt, již pouhá algebra dává odštěpováním kořenových činitelů rozklad

$$p(z) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i) ,$$

kde $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ je multimnožina všech n kořenů polynomu $p(z)$ (kořeny bereme s případným opakováním).

Úloha 1.3.28. *Připomeňte si, jak se v algebře odvodí rozklad mnohočlenu na kořenové činitele.*

Důkaz ZVA má dvě fáze: nejprve obecný polynom pomocí principu maxima/minima redukujeme na binomický a pak (později) dokážeme, že každý binomický polynom má kořen (ekvivalentně, těleso $\mathbb{C}$ je uzavřené na všechny odmocniny).

Věta 1.3.29 (ZVA, redukce na binom). *Má-li každý binomický polynom*

$$z^n + a,\ a \in \mathbb{C} \ \text{ a } \ n \geq 1 ,$$

kořen, potom má každý nekonstantní polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ kořen.

Důkaz. Předpokládáme, že každý binomický polynom má kořen a vezmeme libovolný nekonstantní polynom

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,\ a_i \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0 \ \text{ a } \ n \geq 1 .$$

Ukážeme, že funkce

$$f(z) := |p(z)| :\ \mathbb{C} \to [0, +\infty)$$

má dvě vlastnosti: (i) nabývá v nějakém bodě $a \in \mathbb{C}$ na $\mathbb{C}$ nejmenší hodnotu a (ii) pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ s $f(\alpha) > 0$ existuje $\beta \in \mathbb{C}$ s $f(\alpha) > f(\beta) \geq 0$. Pak je jasné, že $f(a) = 0$ a tedy $p(a) = 0$ a máme kýžený kořen.

$\mathbb{C}$ bereme jako euklidovský prostor $\mathbb{R}^2$ a f je zřejmě spojitá funkce, ale vlastnost (i) hned neplyne z věty 1.3.26, protože $\mathbb{C}$ není kompaktní. Ale díky

$$\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = +\infty$$

(i) vlastně z věty 1.3.26 plyne. Díky odhadu

$$f(z) \ge |z|^n(|a_n| - (|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|)/|z|),\ |z| \ge 1\ ,$$

pro velké $R > 1$ máme $z \in \mathbb{C}, |z| > R \Rightarrow f(z) > f(0) = |a_0|$. Pak ale nejmenší hodnota $f(a)$, $a \in D$, funkce f na kompaktním disku

$$D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}\ ,$$

kterou nabývá podle věty 1.3.26 (D je kompaktní podle první části věty 1.3.24), je podle

$$z \in \mathbb{C},\ |z| > R \Rightarrow f(z) > f(0) \ge f(a)\ (0 \in D)$$

nejmenší hodnota f na celém $\mathbb{C}$.

Vlastnost (ii) odvodíme z existence kořene binomického polynomu. Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$ s $f(\alpha) > 0$. Bez újmy na obecnosti $\alpha = 0$, polynom $p(z)$ totiž můžeme pro libovolné $\alpha \in \mathbb{C}$ vyjádřit jako

$$p(z) = \sum_{i=0}^{n} b_i(z-\alpha)^i = \sum_{i=0}^{n} b_i u^i,\ u = z - \alpha\ ,$$

s nějakými novými koeficienty $b_i \in \mathbb{C}$ (ovšem $b_n = a_n$), viz úloha 1.3.32, a $z = \alpha$ pak přejde na $u = 0$. Pro $f(0) = |a_0| > 0$ tedy nalezneme $\beta \in \mathbb{C}$ s $|a_0| > f(\beta) \ge 0$. Napíšeme si

$$p(z) = a_0 + a_k z^k + a_{k+1}z^{k+1} + \cdots + a_n z^n =: a_0 + a_k z^k + r(z)\ ,$$

kde $a_0, a_k \ne 0$ a $1 \le k \le n$. Podle předpokladu existuje $\gamma \in \mathbb{C}$, že $\gamma^k = -a_0/a_k$ (číslo γ je kořen binomu $z^k + a_0/a_k$). Protože patrně $\lim_{z\to 0} r(z)/z^k = 0$, lze vzít tak malé reálné $\delta \in (0,1)$, že

$$|r(\delta\gamma)| < \delta^k|a_0|/2\ .$$

Pro $\beta := \delta\gamma$ pak vskutku máme

$$\begin{aligned} f(\beta) &= |a_0 + a_k\beta^k + r(\beta)| \le |a_0(1-\delta^k)| + |r(\beta)| \\ &= |a_0| - \delta^k|a_0| + |r(\beta)| < |a_0| - \delta^k|a_0|/2 \\ &< |a_0|\ . \end{aligned}$$

□

Druhou část důkazu ZVA provedeme pomocí souvislosti množin později v tvrzení 1.4.24.

Věta 1.3.30 (ZVA, n-tá odmocnina). *Každý binomický polynom*

$$z^n + a,\ a \in \mathbb{C} \ \text{ a } \ n \geq 1\ ,$$

má kořen. To jest, pro každé $a \in \mathbb{C}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje (v oboru $\mathbb{C}$) n-tá odmocnina z a, takové číslo $\alpha \in \mathbb{C}$, že $\alpha^n = a$.

Důsledek 1.3.31 (ZVA). *Každý nekonstantní komplexní polynom má kořen.*

Důkaz. Plyne okamžitě z vět 1.3.29 a 1.3.30. □

Úloha 1.3.32. *Dokažte, že pro každý polynom $a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, kde $a_i \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}_0$, a každé $\alpha \in \mathbb{C}$ existují $b_i \in \mathbb{C}$, kde $i = 0, 1, \ldots, n$ a $b_n = a_n$, že*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z^i = \sum_{i=0}^{n} b_i (z - \alpha)^i\ .$$

V druhém použití principu maxima/minima vyřešíme jistou *izoperimetrickou úlohu.* „Izoperimetrický“ znamená „s týmž obvodem“ — určíme, který rovinný útvar při pevně daném obvodu má největší plochu. Konkrétněji, představme si vlákno délky $t > 0$ položené v rovině a zachycené jedním koncem v počátku $\overline{0} = (0, 0)$ a druhým v nějakém bodě b na ose x. Vlákno sebe sama neprotíná (je to tzv. oblouk, viz níže) a kromě konců celé leží nad osou x. Spolu s úsečkou $\overline{0}b$ tak dělí rovinu na vnitřek A a vnějšek B. Pro jaký tvar vlákna bude (při jeho pevné délce t) plocha $P(A)$ vnitřku největší? (Pokud vůbec někdy bude největší, napadne okamžitě profesně deformovaného analýzníka.) Úlohu si hned zjednodušíme: vlákno nahradíme lomenou čarou L s nejvýše $n - 1$ zlomy (pro velké ale pevné $n \in \mathbb{N}$) a povolíme sebeprotínání a další body na ose x, ne však pod ní. Pro dané celé číslo $n \geq 2$ a reálné $t > 0$ budeme tedy hledat taková reálná čísla $x_1, \ldots, x_n$ a $y_1, \ldots, y_{n-1} \geq 0$, že (položíme $x_0 = y_0 = y_n = 0$)

$$\begin{aligned}
\ell(\overline{x}, \overline{y}) &:= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = t \ \text{ a} \\
P(\overline{x}, \overline{y}) &:= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(y_i + y_{i-1}) \ \text{ je maximální}\ .
\end{aligned}$$

Hodnota $\ell(\overline{x}, \overline{y})$ je délka lomené čáry L složené z úseček $(x_{i-1}, y_{i-1})(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq n$, a $P(\overline{x}, \overline{y})$ je (zobecněná) plocha útvaru

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\, (a, c) \in (x = a) \cap L:\ 0 \leq b \leq c\}$$

mezi L a osou x. Lomenou čáru L nazveme *horním (n, t)-úhelníkem.* Řekneme, že je *pravidelný kruhový*, pokud $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, úsečky $(x_{i-1}, y_{i-1})(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq n$, mají všechny stejnou délku t/n a všechny body (x_i, y_i), $0 \leq i \leq n$, leží na kružnici s průměrem $(x_0, y_0)(x_n, y_n) = \overline{0}(x_n, 0)$. Pravidelný kruhový horní (n, t)-úhelník je jednoznačně určen svými parametry n a t.

Věta 1.3.33 (jistá izoperimetrická úloha). *Pro každé dané $n \geq 2$ a délku $\ell(\overline{x}, \overline{y}) = t > 0$ horního (n, t)-úhelníka má největší plochu $P(\overline{x}, \overline{y})$ právě a jen pravidelný kruhový horní (n, t)-úhelník.*

Důkaz. Má dvě části. Nejprve pro každý horní (n, t)-úhelník různý od pravidelného kruhového nalezneme jiný horní (n, t)-úhelník s větší plochou $P(\cdot, \cdot,)$. Pak, a to je právě použití kompaktnosti, dokážeme existenci horního (n, t)-úhelníka s největší plochou. To dohromady dává, co věta tvrdí.

Nechť (x_i, y_i), $0 \leq i \leq n$, je horní (n, t)-úhelník různý od pravidelného kruhového. Tedy (i) čísla x_i, $0 \leq i \leq n$, netvoří rostoucí posloupnost nebo (ii) ji tvoří, ale L není grafem konkávní funkce v prvním kvadrantu a s $n - 1$ zlomy, nebo (iii) L je graf konkávní funkce v prvním kvadrantu s $n - 1$ zlomy, ale některá úsečka $(x_{i-1}, y_{i-1})(x_i, y_i)$ nemá délku t/n, nebo konečně (iv) L je graf konkávní funkce v prvním kvadrantu s $n - 1$ zlomy a každá z n úseček má délku t/n, ale ne všechny body (x_i, y_i), $0 \leq i \leq n$, leží na kružnici s průměrem $\overline{0}(x_n, 0)$. V každém z těchto čtyř případů ukážeme, jak při zachování délky L zvětšit plochu pod ní.

Případ (i). □

Kompaktnost množiny se dá zachytit jen pomocí otevřených množin.

Definice 1.3.34 (kompaktnost topologicky). *Podmnožinu $A \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) nazveme topologicky kompaktní, pokud pro každý systém otevřených množin $\{X_i \mid i \in I\}$ v M splňující*

$$\bigcup_{i \in I} X_i \supset A$$

— tak zvané otevřené pokrytí A — existuje konečně mnoho indexů $J \subset I$, že stále $\bigcup_{i \in J} X_i \supset A$ — $\{X_i \mid i \in J\}$ je tak zvané konečné podpokrytí.

Podle následující věty je tato definice kompaktnosti ekvivalentní původní definici. Přívlastek v „topologická kompaktnost“ proto nebudeme používat. Nicméně takto se definuje kompaktnost v topologických prostorech.

Věta 1.3.35 (Heine a Borel). *Množina $A \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti $A = M$. Množina $X \subset A$ je totiž otevřená v podprostoru (A, d), právě když $X = Y \cap A$ pro nějakou otevřenou množinu Y celého prostoru M.

Implikace $\Rightarrow$. Nechť je (M, d) kompaktní a

$$\bigcup_{i \in I} X_i = M$$

je jeho pokrytí otevřenými množinami. Pak pro každé $\delta > 0$ existuje taková konečná množina $S = S_\delta \subset M$, že pro každý bod $a \in M$ existuje bod $b \in S$

s $d(a,b) < \delta$. Kdyby to tak nebylo, snadno sestrojíme posloupnost $(a_n) \subset M$, že $d(a_m, a_n) \geq \delta$ pro každé dva různé indexy $m < n$ (jak? — úloha 1.3.36). Ta však nemá, ve sporu s předpokladem o M, konvergentní podposloupnost. Pro každé $\delta > 0$ proto $S \subset M$ existuje a nazveme ji δ*-sítí*. Vlastností δ-sítě S tedy je, že je konečná a

$$\bigcup_{b \in S} B(b, \delta) = M \ .$$

Pro spor nechť pokrytí $\{X_i \mid i \in I\}$ nemá konečné podpokrytí. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje bod $b_n \in S_{1/n}$ ($S_{1/n}$ označuje $\frac{1}{n}$-síť), že koule $B(b_n, 1/n) \not\subset X_i$ pro každé $i \in I$. Jinak bychom totiž dokázali z $\{X_i \mid i \in I\}$ vybrat konečné podpokrytí: pro každý bod $b \in S_{1/n}$ bychom vzali jednu množinu X_i, $i \in I$, splňující $X_i \supset B(b, 1/n)$ a tyto by (podle vlastnosti $\frac{1}{n}$-sítě) pokrývaly M. Uvažme nyní posloupnost

$$(b_n) \subset M \ .$$

Podle předpokladu o M má konvergentní podposloupnost (b_{k_n}) s limitou $b \in M$. Vezmeme $j \in I$, že $b \in X_j$ (X_i pokrývají M) a pak $r > 0$, že $B(b,r) \subset X_j$ (X_j je otevřená). Vezmeme tak velké $n \in \mathbb{N}$, že $d(b_{k_n}, b) < r/2$ ($\lim b_{k_n} = b$) a současně $1/k_n < r/2$. Z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že pak

$$B(b_{k_n}, 1/k_n) \subset B(b, r) \subset X_j \ .$$

To je ale spor s definicí bodů b_n. Tedy z $\{X_i \mid i \in I\}$ lze vybrat konečné podpokrytí prostoru M a ne, že nelze.

Implikace $\Leftarrow$. Předpokládáme, že M je topologicky kompaktní a v dané posloupnosti bodů $(a_n) \subset M$ nalezneme konvergentní podposloupnost. Předpokládejme, že pro každý bod $b \in M$ existuje takový poloměr $r(b) > 0$, že množina indexů $I_b := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b, r(b))\}$ je konečná. To vede ke sporu: otevřené pokrytí $M = \bigcup_{b \in M} B(b, r(b))$ má konečné podpokrytí dané konečnou množinou $N \subset M$, $M = \bigcup_{b \in N} B(b, r(b))$, a protože množina indexů $I = \bigcup_{b \in N} I_b$ je konečná (je to konečné sjednocení konečných množin), existuje dokonce nekonečně mnoho indexů $m \in \mathbb{N}$, že $m \notin I$ a tedy $a_m \notin B(b, r(b))$ pro každé $b \in N$ — spor, neboť tyto koule pokrývají M a v některé z nich a_m musí ležet. Proto existuje bod $b \in M$, že pro každý poloměr $r > 0$ je množina indexů $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b, r)\}$ nekonečná. Teď už lehce sestrojíme podposloupnost s limitou b: vezmeme libovolně $n_1 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_1} \in B(b, 1)$, pak vybereme $n_2 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_2} \in B(b, 1/2)$ a současně $n_2 > n_1$ (což díky vlastnosti bodu b lze), pak vybereme $n_3 \in \mathbb{N}$, že $a_{n_3} \in B(b, 1/3)$ a současně $n_3 > n_2$ a tak dále. Podposloupnost $(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$ zřejmě konverguje k b. □

Úloha 1.3.36. *Dokažte, že když metrický prostor pro nějaké $\delta > 0$ nemá konečnou δ-síť, pak není kompaktní.*

1.4 Vztah bodu k množině, homeomorfismus, křivky a oblouky, souvislost

Vztah bodu k množině: vnitřní, vnější atd. Homeomorfismus. Křivky a oblouky, i lomené. Různé definice souvislosti prostoru. Dokončení důkazu ZVA: existence komplexní n-té odmocniny pomocí souvislosti. Křivková a oblouková souvislost.

Okolí bodu $a \in M$ v metrickém prostoru (M, d) je jakákoli otevřená množina $U \subset M$ obsahující a. V následující definici je U okolí bodu a.

Definice 1.4.1 (vztah bodu ke množině). *Nechť $a \in M$ je bod v metrickém prostoru (M, d) a $X \subset M$ je podmnožina. Pak*

- *a je vnitřním bodem X, když existuje U, že $U \subset X$.*
- *a je vnějším bodem X, když existuje U, že $U \subset M \backslash X$.*
- *a je hraničním bodem X, když každé U protíná X i $M \backslash X$.*
- *a je limitním bodem X, když pro každé U je průnik $U \cap X$ nekonečný.*
- *a je izolovaným bodem X, když existuje U, že $U \cap X = \{a\}$.*

Vnitřní a izolované body X nutně leží v X a vnější body leží mimo X. Hraniční a limitní body X mohou ležet v X i mimo X. Podmínka limitního bodu a říká, že libovolně blízko a se nachází bod z X různý od a, tedy $a = \lim a_n$ pro nějakou posloupnost $(a_n) \subset X$ s $a_n \neq a$ pro každé n.

Příklad. Nechť $(M, d) = (\mathbb{R}^2, d_2)$ a

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < d_2(\overline{0}, x) < 1\} \cup \{(0, 2)\}\ .$$

X je jednotkový kruh s vyjmutým počátkem $\overline{0} = (0, 0)$ a přidaným bodem $(0, 2)$. Vnitřní body množiny X jsou $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < d_2(\overline{0}, x) < 1\}$, vnější $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(\overline{0}, x) > 1, x \neq (0, 2)\}$, hraniční $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(\overline{0}, x) = 1\} \cup \{\overline{0}, (0, 2)\}$, limitní $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(\overline{0}, x) \leq 1\}$ a izolovaný bod je pouze $(0, 2)$.

Jak víme, izometrie jsou izomorfismy metrických prostorů vzhledem k metrikám. Slabší izomorfismy vzhledem k otevřeným množinám představují homeomorfismy.

Definice 1.4.2 (homeomorfismus). *Bijekce $f:\ M \to N$ mezi dvěma metrickými prostory (M, d) a (N, e) je homeomorfismus, je-li zobrazení f i inverzní zobrazení f^{-1} spojité. Homeomorfní jsou ty metrické prostory, mezi nimiž existuje homeomorfismus.*

Například euklidovské prostory $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a $\mathbb{R}$ jsou homeomorfní prostřednictvím funkce $x \mapsto \tan x$, i když první je omezený a druhý nikoli. Zobrazení

$$\varphi:\ [0, 2\pi) \to S_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(\overline{0}, x) = 1\},\ \varphi(t) = (\cos t, \sin t)\ ,$$

mezi euklidovskými prostory, z intervalu do jednotkové kružnice, je spojitá bijekce. Nejde o homeomorfismus, protože inverzní zobrazení φ^{-1} není v bodě $(1, 0)$ spojité.

Úloha 1.4.3. *Ukažte, že euklidovské prostory $[a, b)$ (zde $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$) a S_2 nejsou homeomorfní, dokonce ani neexistuje spojité zobrazení z S_2 na $[a, b)$.*

O *homeomorfním vložení* prostoru M do prostoru N mluvíme tehdy, když je zobrazení f z definice 1.4.2 prosté, ale nemusí být na. Homeomorfní vložení $f : M \to N$ je tedy takové spojité prosté zobrazení, že i zobrazení $f^{-1} : f(M) \to M$ je spojité.

Tvrzení 1.4.4 (kompakt a inverz). *Je-li zobrazení $f : M \to N$ mezi metrickými prostory prosté a spojité a M je kompaktní, pak inverzní zobrazení $f^{-1} : f(M) \to M$ je spojité.*

Důkaz. Stačí ukázat, že pro každou uzavřenou podmnožinu $A \subset M$ je podmnožina $f(A) \subset f(M)$ uzavřená v podprostoru $f(M)$. Máme totiž $f^{-1} : f(M) \to M$ a $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$, takže podle tvrzení 1.3.8 a úlohy 1.3.9 je f^{-1} spojité zobrazení.

Nechť je $A \subset M$ uzavřená. Je tedy kompaktní (úloha 1.3.21), obě množiny $f(A), f(M) \subset N$ jsou kompaktní (úloha 1.3.23 a předpoklad) a tedy uzavřené v N (úloha 1.3.22) a tedy $f(A)$ je uzavřená v $f(M)$ (podle tvrzení 1.3.3, protože $f(A) = f(A) \cap f(M)$). □

Každé spojité prosté zobrazení kompaktního metrického prostoru M do jiného metrického prostoru N tak už je homeomorfní vložení M do N, prostor M je homeomorfní podprostoru $f(M)$. Základním příkladem jsou *prosté křivky*, kterým budeme krátce říkat *oblouky*.

Definice 1.4.5 (křivka a oblouk, uzavřenost). *Křivkou v metrickém prostoru (M, d) rozumíme spojité zobrazení*

$$f : [a, b] \to M$$

z euklidovského intervalu $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) do M. Je-li f navíc prosté, mluvíme o oblouku. Křivka je uzavřená, když $f(a) = f(b)$. Uzavřený oblouk je taková uzavřená křivka, že zúžení $f \mid [a, b)$ je prosté.

Každý oblouk je tak homeomorfní vložení euklidovského intervalu $[a, b]$ do metrického prostoru. Například

$$\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \ \varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) ,$$

je uzavřený oblouk v rovině, jehož obrazem je jednou proběhnutá jednotková kružnice S_2. Zaměníme-li zde $2\pi t$ za $4\pi t$, dostaneme uzavřenou křivku, nikoli oblouk, probíhající jednotkovou kružnici dvakrát.

Důležité křivky a oblouky představují ty, které se dají definovat lineárními funkcemi.

Definice 1.4.6 (lomená křivka a lomený oblouk). *Lomenou křivkou v euklidovském prostoru* $\mathbb{R}^n$ *rozumíme po částech lineární spojité zobrazení*

$$f:\ [a,\,b] \to \mathbb{R}^n$$

definované na euklidovském intervalu $[a,b]$*. Tedy existuje dělení* $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_k = b$ *a vektory* $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}^n$*, že pro každé* $i = 1, 2, \ldots, k$ *a* $t \in [a_{i-1}, a_i]$ *je* $f(t) = t\alpha_i + \beta_i$*. Je-li* f *navíc prosté, mluvíme o lomeném oblouku.*

Následující dvě aproximace, euklidovské křivky lomenou křivkou a jejího obrazu obrazem lomeného oblouku, se často používají.

Úloha 1.4.7 *Nechť* $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *je křivka. Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje taková lomená křivka* $g:\ [a,b] \to \mathbb{R}^n$*, že* $f(a) = g(a)$*,* $f(b) = g(b)$ *a*

$$\forall\, x \in [a,b]:\ d_2(f(x), g(x)) < \varepsilon\,.$$

Úloha 1.4.8 *Nechť* $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *je křivka. Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje takový lomený oblouk* $g:\ [a,b] \to \mathbb{R}^n$*, že* $f(a) = g(a)$*,* $f(b) = g(b)$ *a*

$$\forall\, x \in g([a,b])\ \exists\, y \in f([a,b]):\ d_2(x,y) < \varepsilon\,.$$

Souvislý metrický (a obecně i topologický) prostor je ten, který se nerozpadá na dvě oddělené neprázdné části. Elegantně se to vyjádří pomocí obojetných množin. Podmnožina metrického prostoru (M,d) je *obojetná*, je-li otevřená i uzavřená. Množiny $\emptyset$ a M jsou zřejmě vždy obojetné.

Definice 1.4.9 (souvislost a nesouvislost). *Metrický prostor* (M,d) *je souvislý, když kromě množin* $\emptyset$ *a* M *už jiné obojetné množiny neobsahuje. Ekvivalentně řečeno,* M *nemá rozklad* $M = A \cup B$ *na otevřené (ekvivalentně, uzavřené) množiny* A *a* B*. Podmnožina* $X \subset M$ *je souvislá, je-li podprostor* (X,d) *souvislý. Množina, která není souvislá, je nesouvislá.*

Jak víme, termín „rozklad“ v sobě zahrnuje podmínky $A \cap B = \emptyset$ a $A, B \neq \emptyset$. Například euklidovský prostor $[0,1)$ je souvislý (jak za chvíli dokážeme), stejně jako jeho podprostor $(\frac{1}{2}, 1)$, ale podprostory $[0,1) \cap \mathbb{Q}$ a $[0,1)\backslash\{\frac{1}{2}\}$ jsou nesouvislé. Prázdná množina je z definice souvislá. Každá jednoprvková podmnožina je souvislá.

Otevřeným (resp. uzavřeným) rozkladem množiny $X \subset M$ v metrickém prostoru (M,d) rozumíme výše zmíněný rozklad, čili vyjádření $X = A \cup B$ s neprázdnými a disjunktními množinami A a B, otevřenými (resp. uzavřenými) v podprostoru X. Souvislost množiny tak znamená neexistenci jejího otevřeného (ekvivalentně, uzavřeného) rozkladu. Jiná možná definice souvislosti je tato (oddělené množiny byly definovány po definici 1.3.11).

Tvrzení 1.4.10 (souvislost a oddělené množiny). *Podmnožina* X *metrického prostoru* (M,d) *je nesouvislá, právě když je sjednocením dvou neprázdných oddělených množin.*

Důkaz. Nechť $X = A \cup B$, kde $\emptyset \neq A, B \subset M$ a jsou oddělené. Pak

$$X = A \cup B = (X \cap \overline{A}) \cup (X \cap \overline{B})$$

je uzavřený rozklad množiny X a ta je nesouvislá ($\overline{A}$ a $\overline{B}$ se mohou protínat jen mimo X). Naopak nechť X je nesouvislá a $X = A \cup B$ je její uzavřený rozklad. Množiny A a B pak jsou neprázdné a oddělené (protože $\overline{A} \cap X = A$ a $\overline{B} \cap X = B$). □

Těmito všemi ekvivalentními způsoby se souvislost definuje i pro topologické prostory. Díky větě 1.3.13 máme následující další definici, která už ale platí jen pro metrické prostory a pro topologické obecně ne.

Důsledek 1.4.11 (další definice souvislosti). *Podmnožina $X \subset M$ metrického prostoru je nesouvislá, právě když existují otevřené množiny $A, B \subset M$, že $A \cap X, B \cap X \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ a $X \subset A \cup B$.*

Důkaz. Plyne hned z tvrzení 1.4.10 a věty 1.3.13. □

S uzavřenými množinami místo otevřených to ale neplatí.

Úloha 1.4.12. *Uveďte příklad metrického prostoru (M, d) a nesouvislé podmnožiny $X \subset M$, pro kterou neexistují uzavřené množiny $A, B \subset M$, že $A \cap X, B \cap X \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ a $X \subset A \cup B$.*

Již jsme si uvědomili, že nejvýše jednoprvková množina je v každém metrickém prostoru nutně souvislá. Větší množiny už ale mohou být vždy nesouvislé.

Úloha 1.4.13. *Definujte pro každou konečnou či nekonečnou množinu M s $|M| \geq 2$ metriku $d: M^2 \to \mathbb{R}$, aby metrický prostor (M, d) byl nesouvislý.*

Nejdůležitější na souvislosti je, že se zachovává spojitým obrazem.

Tvrzení 1.4.14 (souvislost obrazu). *Nechť $f: M \to N$ je spojité zobrazení mezi metrickými prostory a podmnožina $A \subset M$ je souvislá. Pak obraz $f(A) \subset N$ je též souvislý.*

Důkaz. Kdyby $f(A)$ byl nesouvislý a $f(A) = B \cup C$ byl jeho otevřený rozklad, byl by podle tvrzení 1.3.8 a úlohy 1.3.9 $A = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C)$ otevřený rozklad množiny A a ta by byla nesouvislá. □

Speciálně jsou tedy dva homeomorfní prostory oba souvislé či oba nesouvislé. Jiný způsob vytváření souvislých množin (než pomocí spojitých obrazů) popisuje následující úloha.

Úloha 1.4.15 (souvislost a lepení). *Dokažte, že sjednocení dvou protínajících se souvislých podmnožin v metrickém prostoru je souvislá množina.*

Podle následující úlohy to je jediná situace, kdy je souvislost sjednocení dvou množin určena.

Úloha 1.4.16 (plno příkladů). *Ukažte na příkladech, že sjednocení podmnožin A a B v metrickém prostoru, kde B je nesouvislá, může být souvislá i nesouvislá množina, bez ohledu na to, zda je A souvislá nebo ne a zda se A a B protínají nebo ne. A co sjednocení dvou disjunktních souvislých množin? Můžete použít větu 1.4.17 níže.*

Podle úlohy 1.4.13 se nesouvislý prostor vyrobí lehce. Naopak to jde trochu (ale jen trochu) hůře. Uvedeme základní příklad souvislého prostoru. Je jím euklidovský interval.

Věta 1.4.17 (souvislost intervalů). *Podmnožina $X \subset \mathbb{R}$ je souvislá, právě když je interval.*

Důkaz. Když X není interval, existují tři reálná čísla $a < b < c$, že $a, c \in X$, ale $b \notin X$. Pak $X = (X \cap (-\infty, b)) \cup (X \cap (b, +\infty))$ je otevřený rozklad X a X je nesouvislá. Když X je interval, pak dokážeme, že nemá uzavřený rozklad a je tedy souvislá. Prázdná X je souvislá, a tak nechť $X \neq \emptyset$. Nechť $X = A \cup B$ je sjednocení dvou neprázdných množin, uzavřených v X. Dokážeme, že se A a B protínají. Můžeme zřejmě vzít dva různé body $a, b \in X$, že $a \in A$ a $b \in B$ (kdyby to nešlo, jsou A a B v inkluzi a protínají se). Búno $a < b$. Nechť $c \in [a, b] \subset X$ je supremum $c = \sup(A \cap [a, b])$. Z vlastností suprema plyne, že c je limitou posloupnosti bodů z A i posloupnosti bodů z B, takže vzhledem k relativní uzavřenosti A a B je (podle úlohy 1.3.7) $c \in A \cap B$. □

Úloha 1.4.18. *Dokažte, že jednotková kružnice v rovině (S_2, d_2) je souvislá.*

Úloha 1.4.19. *Navážeme na úlohu 1.4.3. Pomocí souvislosti ukažte, že žádný euklidovský interval $I \subset \mathbb{R}$ není homeomorfní jednotkové kružnici $S_2 \subset \mathbb{R}^2$. Speciálně, neexistuje oblouk v rovině s obrazem rovným S_2.*

Podle konců se reálné intervaly $I \subset \mathbb{R}$ dělí na pět typů: $I = \emptyset$, $\{a\}$, (a, b), $[a, b)$ či $(a, b]$ a $[a, b]$, kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Úloha 1.4.20. *Dokažte, že dva reálné intervaly jsou homeomorfní, právě když mají stejný typ.*

Naši hlavní aplikaci souvislosti metrických prostorů představuje dokončení důkazu Základní věty algebry, kde nám ještě zbývá dokázat existenci všech odmocnin v tělese komplexních čísel $\mathbb{C}$ — pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $\beta \in \mathbb{C}$ s $\beta^n = \alpha$.

Úloha 1.4.21. *Na jaké odmocniny je uzavřené těleso reálných čísel $\mathbb{R}$?*

$S_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ označuje jednotkovou kružnici v komplexní rovině. Množinu $A \subset \mathbb{C}$ nazveme *středově souměrnou*, pokud $z \in A \Rightarrow -z \in A$. Existence odmocnin v $\mathbb{C}$ plyne z následujícího tvrzení.

Tvrzení 1.4.22 (množina, co vše zaplní). *Je-li $A \subset S_2$ neprázdná středově souměrná souvislá podmnožina jednotkové kružnice, pak $A = S_2$.*

Důkaz. Nechť $a \in A$. Pak i $-a \in A$. Kdyby existoval bod $b \in S_2 \backslash A$, pak i $-b \in S_2 \backslash A$ a $b, -b \neq a, -a$. Přímka ℓ jdoucí body b a $-b$ by pak ale určovala takové disjunktní otevřené podmnožiny B a C kružnice S_2,

$$\begin{aligned} B &= \{x \in S_2 \mid x \text{ je v téže polorovině určené } \ell \text{ jako } -a\} \text{ a} \\ C &= \{x \in S_2 \mid x \text{ je v téže polorovině určené } \ell \text{ jako } a\}\ , \end{aligned}$$

že $B \cup C \supset A$, $-a \in B$ a $a \in C$. Pak $A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ by byl otevřený rozklad A, v rozporu se souvislostí A. Proto $A = S_2$. □

Druhé, čtvrté, osmé atd. odmocniny v $\mathbb{C}$ umíme spočítat vzorcem.

Tvrzení 1.4.23 (komplexní $\sqrt{x}$). *Druhá odmocnina z čísla $a + bi \in \mathbb{C}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, je daná identitou*

$$\left(\frac{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}}{\sqrt{2}} \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{2}} \cdot i \right)^2 = a + bi\ ,$$

kde znaménko je $+$ pro $b \geq 0$ a $-$ pro $b < 0$.

Důkaz. Plyne hned z rovnosti $(c+di)^2 = (c^2 - d^2) + 2cd \cdot i$. Existence $\sqrt{x}$ pro nezáporné $x \in \mathbb{R}$ je záležitostí Matematické analýzy I. □

Opakováním komplexní druhé odmocniny dostáváme, že v $\mathbb{C}$ existují všechny 2^m-té odmocniny, $m \in \mathbb{N}_0$. Každé $n \in \mathbb{N}$ lze však psát jako $n = 2^m k$ pro $m \in \mathbb{N}_0$ a liché $k \in \mathbb{N}$, a tak n-tá odmocnina z $a \in \mathbb{C}$ je k-tá odmocnina z 2^m-té odmocniny z a. Zbývá proto dokázat existenci pouze lichých odmocnin. Nechť $a \neq 0$ (každá odmocnina z nuly je totiž nula). Pak $a/|a|$ leží na jednotkové kružnici S_2 a je-li $\alpha \in S_2$ k-tá odmocnina z tohoto čísla, je zřejmě $\alpha|a|^{1/k}$ k-tá odmocnina z a. (Existence čísla $|a|^{1/k}$ byla dokazována a dokázána v Matematické analýze I.) Stačí tak dokázat, že každé číslo na jednotkové kružnici S_2 má každou lichou odmocninu.

Tvrzení 1.4.24 (komplexní liché odmocniny). *Nechť číslo $k \in \mathbb{N}$ je liché. Pak zobrazení $f(z) = z^k$ z S_2 do S_2 je surjekce.*

Důkaz. Zřejmě je f spojité a obraz $f(S_2) \subset S_2$ je souvislý podle tvrzení 1.4.14 a úlohy 1.4.18. Dále jistě $f(S_2) \neq \emptyset$ (např. $1 = f(1) \in f(S_2)$) a $f(S_2)$ je středově souměrná, protože S_2 je středově souměrná a $f(-z) = (-z)^k = -z^k = -f(z)$ (k je liché). Podle tvrzení 1.4.22 tedy je $f(S_2) = S_2$. □

Věta 1.3.30 je dokázána a důkaz Základní věty algebry je úplný.

Zavedeme silnější verzi souvislosti souhlasící, narozdíl od souvislosti z definice 1.4.9, s představou souvislé množiny jako množiny, v níž lze mezi každými dvěma body putovat po cestě.

Definice 1.4.25 (křivková a oblouková souvislost). *Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) se nazývá křivkově (resp. obloukově) souvislou, když pro každé dva (resp. pro každé dva různé) body $a, b \in X$ existuje v podprostoru X křivka (resp. oblouk)*

$$f : [0, 1] \to X,\ f(0) = a \ \&\ f(1) = b\ .$$

Řekneme, že každé dva body X se v X dají spojit křivkou, resp. obloukem.

Je jasné, jaká je hierarchie tří druhů souvislosti množin, které teď známe.

Úloha 1.4.26. *Nechť $X \subset M$ je množina v metrickém prostoru (M, d). Dokažte dvě implikace*

$$X \text{ je obloukově souvislá} \Rightarrow X \text{ je křivkově souvislá} \Rightarrow X \text{ je souvislá}\ .$$

Druhou implikaci nelze vždy obrátit, jak ukazuje následující příklad.

Tvrzení 1.4.27 (you shall not pass). *Uvažme úsečky v $\mathbb{R}^2$ definované pro $n \in \mathbb{N}$ jako $u = \{0\} \times [0, 1]$, $u_n = [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}] \times \{1\}$, $v_n = [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}] \times \{0\}$ a $w_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$. Rovinná množina*

$$X = u \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (u_n \cup v_n \cup w_n)$$

je souvislá, ale není křivkově souvislá.

Důkaz.

□

Nicméně někdy tuto implikaci lze obrátit.

Věta 1.4.28 (kdy souv. ⇒ kř. souv.). *Je-li každá koule $B(a, r)$ v metrickém prostoru (M, d) křivkově souvislá, je každá otevřená a souvislá množina $X \subset M$ křivkově souvislá.*

Důkaz.

□

To se jistě vztahuje na všechny euklidovské prostory $(M, d) = (\mathbb{R}^n, d_2)$. Pro ně ale platí více.

Tvrzení 1.4.29 (po lomených obloucích). *Otevřená množina*

$$X \subset \mathbb{R}^n$$

je souvislá, právě když její každé dva body lze v X spojit lomeným obloukem.

Důkaz.

□

Z tvrzení 1.4.27 víme, že souvislá množina nemusí příliš držet pohromadě, takže následující příklad — evokující prostupující se galaxie — už nešokuje, ale stále je zajímavý.

Věta 1.4.30 (srážka galaxií). *Nechť $M = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ je euklidovský jednotkový čtverec. Uvažme rozklad*

$$M = A \cup B := \Big((\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times \{0\} \cup ([0,1] \backslash \mathbb{Q}) \times (0,1] \Big) \cup \Big(M \backslash A \Big) \, .$$

Množina A se skládá z bodů na dolní straně čtverce s racionální x-ovou souřadnicí a ze svislých úseček délky 1 s iracionální x-ovou souřadnicí a bez dolního konce. Její doplněk B má podobnou strukturu, pouze se vymění slova „racionální“ a „iracionální“. Množiny A i B protínají každou ze čtyř stran čtverce M, jsou disjunktní a obě jsou souvislé.

Důkaz.

□

Intuitivně „je jasné“ (tedy bylo by neobyčejně překvapující, kdyby tomu tak nebylo, ovšem tento pocit není vůbec žádným důkazem), že v předchozím příkladu ani A ani B nemůže být křivkově souvislá. Dokážeme to v následujícím oddílu ve větě 1.5.9 a úloze 1.5.11.

A co první implikace v úloze 1.4.26? Dá se obrátit?

1.5 Oblouky a křivky, v rovině i jinde

Lomený oblouk neroztíná rovinu. Uzavřený lomený oblouk roztíná rovinu. Dvě křivky jdoucí vzájemně napříč čtvercem se nutně protínají. Oblouk neroztíná rovinu. Uzavřený oblouk roztíná rovinu; pomocí Brouwerovy věty a Tietzeho věty. Oblouková a křivková souvislost pro metrické prostory splývají.

V první části oddílu pracujeme v rovině, tedy v euklidovském metrickém prostoru $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2, d_2)$.

Tvrzení 1.5.1 (lomený oblouk neroztíná rovinu). *Pro každý lomený oblouk $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je doplněk jeho obrazu*

$$\mathbb{R}^2 \backslash O, \ O := \gamma([a,b]) \, ,$$

otevřená souvislá neomezená množina.

Důkaz. Tento doplněk je zřejmě otevřený a neomezený (O je kompaktní, tedy uzavřená a omezená množina). Indukcí podle počtu k úseček tvořících O dokážeme, že každé dva body $a, b \in \mathbb{R}^2 \backslash O$ lze spojit lomenou čarou neprotínající O. Pro $k = 1$ to zřejmě platí. Pro $k > 1$ podle indukčního předpokladu spojíme a a b lomenou čarou L, která z O protíná nejvýše pevně zvolenou krajní úsečku u. Úsek lomené čáry L mezi jejím prvním a jejím posledním průsečíkem s u můžeme podle úlohy 1.5.2 nahradit lomenou „obchůzkou" kolem u, kterou neprotneme O. Tím dostaneme lomenou čáru L' spojující a a b a neprotínající O. Doplněk O do $\mathbb{R}^2$ je souvislý. □

Úloha 1.5.2. *Popište podrobně onu lomenou „obchůzku".*

Pro uzavřené lomené oblouky předchozí tvrzení naopak nikdy neplatí a doplněk obrazu je vždy nesouvislý.

Tvrzení 1.5.3 (šikovná 0-1 funkce). *Pro každý uzavřený lomený oblouk* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *existuje lokálně konstantní (speciálně, spojitá) funkce*

$$f : \mathbb{R}^2 \backslash O \to \{0, 1\} \subset \mathbb{R},\ O := \gamma([a, b])$$

— každý bod definičního oboru má okolí, na němž je f *konstantní — která není konstantní. Každé dva body* $a, b \in \mathbb{R}^2 \backslash O$ *s* $f(a) \neq f(b)$ *tedy leží v různých komponentách množiny* $\mathbb{R}^2 \backslash O$ *a ta není souvislá.*

Důkaz. Zvolíme pevně směr $s \in S_2$ (S_2 je jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$), aby byl různý od směrů všech úseček použitých v O. Pro $a \in \mathbb{R}^2$ jako ℓ_a označíme polopřímku jdoucí z a směrem s. Pro $a \in \mathbb{R}^2$ mimo O definujeme

$$f(a) \equiv \sum_{b \in \ell_a \cap O} p(b) \pmod 2 ,$$

kde $p(b) \in \{0, 1\}$ je parita průsečíku b a sčítá se modulo 2. Pro prázdný průnik je suma definovaná jako 0 a díky volbě s je vždy konečná. Průsečík polopřímky a obrazu oblouku má paritu 1, je-li transverzální, a 0 jinak. *Transverzální průsečík* b je ten, že O leží lokálně u b na obou stranách od ℓ_a. Není-li b transverzální, je nutně vrcholem O a ta leží lokálně u b jen na jedné straně od ℓ_a.

Ověříme, že f má uvedené vlastnosti. Nechť $a \in \mathbb{R}^2 \backslash O$ je libovolné a $\delta > 0$ je menší než vzdálenost a a O a než všechny vzdálenosti ℓ_a od vrcholů O neležících na ℓ_a. Není těžké vidět (úloha 1.5.5), že pak pro každé $a' \in B(a, \delta)$ existuje takové zobrazení

$$k : \ell_{a'} \cap O \to \ell_a \cap O ,$$

že pro transverzální b je vždy $k^{-1}(b) = \{b_1\}$ jeden transverzální průsečík a pro netransverzální b je $k^{-1}(b) = \{b\}$ nebo $k^{-1}(b) = \emptyset$ nebo $k^{-1}(b) = \{b_1, b_2\}$ jsou dva různé transverzální průsečíky. Tedy $f(a') = f(a)$. Lehce se najdou body a a a' mimo O s $f(a) = 0$ a $f(a') = 1$ (úloha 1.5.6), takže f není konstantní. Když body $a, b \in \mathbb{R}^2 \backslash O$ leží v téže komponentě, lze je v $\mathbb{R}^2 \backslash O$ spojit lomenou čarou K, na níž f musí být konstantní (jinak by K byla nesouvislá), takže $f(a) = f(b)$, což dává poslední část tvrzení. □

Úloha 1.5.4. *Pokud oblouk γ není uzavřený, musí definice funkce f v předchozím důkazu někde selhat, protože podle tvrzení 1.5.1 je doplněk lomeného oblouku souvislý. Kde selže?*

Úloha 1.5.5. *Definujte zobrazení k v předchozím důkazu.*

Úloha 1.5.6. *Nalezněte hodnoty $f(a) = 0$ a $f(a') = 1$ v předchozím důkazu.*

Úloha 1.5.7. *Zobecněte předchozí tvrzení: doplněk do $\mathbb{R}^2$ obrazu každé uzavřené lomené křivky je nesouvislý.*

Dokážeme Jordanovu větu o kružnici pro lomené oblouky.

Věta 1.5.8 (lomená Jordanova o kružnici). *Každý uzavřený lomený oblouk $\gamma:\ [a, b] \to \mathbb{R}^2$ určuje jednoznačný rozklad roviny na tři (neprázdné) souvislé množiny*

$$\mathbb{R}^2 = U \cup O \cup V,\ O := \gamma([a, b]) ,$$

kde U je otevřená a omezená, V je otevřená a neomezená a $\overline{U} \cap \overline{V} = O$ (O je společnou hranicí množin U a V).

Důkaz. Zvolíme pevně libovolný bod $b \in \mathbb{R}^2$ mimo nějaký čtverec obsahující O (b je jistě vně O, ve V). Níže L označuje lomenou čáru spojující body b a c, definujeme

$$U := \{c \in \mathbb{R}^2 \backslash O \mid \forall L:\ L \cap O \neq \emptyset\} \ \text{ a } \ V := \{c \in \mathbb{R}^2 \backslash O \mid \exists L:\ L \cap O = \emptyset\} .$$

Zřejmě jsou U, O a V disjunktní, jejich sjednocení je $\mathbb{R}^2$, $O, V \neq \emptyset$, O je souvislá, U je omezená a V je neomezená. Lehce se také vidí, že V je souvislá (sjednocení dvou lomených čar mimo O spojujících b s c, resp. s c', je lomená čára ve V spojující c a c') a otevřená (pro každý $c \in V$ existuje $r > 0$, že $B(c, r) \cap O = \emptyset$ a pro každý $c' \in B(c, r)$ úsečka $cc' \subset B(c, r)$). Z téhož důvodu je otevřená i U. Podle tvrzení 1.5.3 je $U \neq \emptyset$. Ukážeme, že U je souvislá. Nechť $c, c' \in U$ jsou dva libovolné body a u je libovolná pevně zvolená úsečka v O. Podle definice U a tvrzení 1.5.1 existují lomené čáry K a L, že K spojuje c s b, L spojuje c' s b a $K \cap O, L \cap O \subset u$. Vezmeme počáteční úsek K_0 čáry K, resp. L_0 čáry L, ukončený v bodě d, resp. bodě d', dostatečně blízko před prvním průsečíkem s u. Vezmeme bod $e \in K$ dostatečně blízko za posledním průsečíkem K s u a označíme úsek K mezi b a e jako K_1. Kdyby e ležel na téže straně od u jako d nebo jako d', lomená čára $K_1 \cup ed \cup K_0$ nebo $K_1 \cup ed' \cup L_0$ by spojovala b s c nebo s c' mimo O, v rozporu s $c, c' \in U$. Body d a d' leží na opačné straně od u než e, vzájemně tedy na téže straně. Lomená čára $K_0 \cup dd' \cup L_0$ neprotíná O, spojuje c a c' a tedy leží celá v U, takže U je souvislá. Ukážeme, že každý bod $x \in O$ je hraniční pro U i pro V. Můžeme předpokládat, že x není vrchol O. Pak lze zřejmě vzít jakkoli krátkou úsečku $u = aa'$ se směrem s (viz důkaz tvrzení 1.5.3), že $u \cap O = \{x\}$ a $a, a' \neq x$. Podle definice 0-1 funkce f pak $f(a) \neq f(a')$ a a leží v U a a' ve V nebo naopak. Takže $x \in \overline{U} \cap \overline{V}$ a tento průnik se nutně rovná O. Konečně je rozklad roviny na U, O a V jednoznačný, protože U a V jsou vlastně komponenty souvislosti množiny $\mathbb{R}^2 \backslash O$, a ty jsou jednoznačně určené. $\square$

Obraz uzavřeného lomeného oblouku tak vždy rozděluje rovinu na omezený souvislý vnitřek U a neomezený souvislý vnějšek V. Prvním „highlightem" sekce je rozšíření tohoto výsledku na úplně všechny uzavřené oblouky. Nejprve ale ukážeme, že už lomená Jordanova věta implikuje lemma o křížení.

Věta 1.5.9 (lemma o křížení). $S = [0,1]^2$ *buď jednotkový čtverec v rovině a*

$$\beta : \ [a,b] \to S \quad a \quad \gamma : \ [c,d] \to S$$

buďte dvě libovolné křivky jdoucí napříč S tak, že obraz β protíná dolní i horní stranu S a obraz γ protíná levou i pravou stranu. Potom

$$\beta([a,b]) \cap \gamma([c,d]) \neq \emptyset \ .$$

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že $\beta([a,b]) \cap \gamma([c,d]) = \emptyset$. Nechť

$$\delta := d_2(\beta([a,b]),\ \gamma([c,d])) = \inf(\{d_2(x,y) \mid x \in \beta([a,b]), y \in \gamma([c,d])\}) > 0$$

(dvě disjunktní kompaktní množiny mají kladnou vzdálenost). Můžeme také předpokládat, že body obrazů obou křivek ležící v dolní, horní, levé a pravé straně S jsou po řadě $\beta(a)$, $\beta(b)$, $\gamma(c)$ a $\gamma(d)$ a že to jsou jediné průsečíky obou obrazů s ∂S. Díky stejnoměrné spojitosti β a γ (tvrzení 1.3.27) je můžeme aproximovat takovými lomenými křivkami

$$\beta' : \ [a,b] \to S \ \text{ a } \ \gamma' : \ [c,d] \to S \ ,$$

že obraz β' (resp. γ') spojuje $\beta(a)$ s $\beta(b)$ (resp. $\gamma(c)$ s $\gamma(d)$) a jinde ∂S neprotíná a pro každé $t \in [a,b]$ a $u \in [c,d]$ je

$$d_2(\beta(t), \beta'(t)) = |\beta(t) - \beta'(t)| < \delta/2 \ \text{ a } \ d_2(\gamma(u), \gamma'(u)) = |\gamma(u) - \gamma'(u)| < \delta/2 \ .$$

Z β' a γ' vynecháme smyčky a zopakované úseky a dostaneme takové lomené oblouky

$$\beta'' : \ [a,b] \to S \ \text{ a } \ \gamma'' : \ [c,d] \to S \ ,$$

že obraz β'' (resp. γ'') spojuje $\beta(a)$ s $\beta(b)$ (resp. $\gamma(c)$ s $\gamma(d)$) a jinde ∂S neprotíná a pro každé $x \in \beta''([a,b])$ a $y \in \gamma''([c,d])$ je

$$d_2(x,\ \beta([a,b])) < \delta/2 \ \text{ a } \ d_2(y,\ \gamma([c,d])) < \delta/2 \ .$$

To ovšem ale znamená, že obrazy lomených oblouků β'' a γ'' se neprotínají. Uvážíme uzavřený lomený oblouk κ tvořený β'' a levým ze dvou úseků parametrizace hranice ∂S, na něž ∂S dělí body $\beta(a)$ a $\beta(b)$. Zvolíme body $x, y \in \gamma''([c,d])$, x poblíž $\gamma''(c) = \gamma(c)$ a y poblíž $\gamma''(d) = \gamma(d)$, že x leží uvnitř obrazu κ a y vně (úloha 1.5.10). Dostali jsme spor: x a y jsou spojené úsekem obrazu $\gamma''([c,d])$ a tento úsek neprotíná obraz κ, což podle věty 1.5.8 použité na κ není možné. $\square$

Úloha 1.5.10. *Proč x leží uvnitř obrazu κ a y vně obrazu κ?*

Na konci předchozího oddílu jsme ale slíbili dokázat něco trochu silnějšího. Přenecháváme to čtenářce jako úlohu.

Úloha 1.5.11. *Zesilte lemma o křížení tak, že se obraz jedné křivky nahradí souvislou množinou.*

Věta 1.5.12 (oblouk neroztíná rovinu). *Pro každý oblouk $\gamma:\ [a,b]\to\mathbb{R}^2$ je doplněk jeho obrazu*

$$\mathbb{R}^2\backslash O,\ O:=\gamma([a,b])\ ,$$

otevřená souvislá neomezená množina.

Důkaz.

$\square$

Úloha 1.5.13 (potřásání rukama). *Dokažte „lemma o počtu potřesení rukou": každý konečný jednoduchý graf $G=(V,E)$ obsahuje sudý počet vrcholů s lichým stupněm. Proč se mu tak říká? Platí i pro multigrafy?*

Věta 1.5.14 (Brouwerova o pevném bodu). *Každé spojité zobrazení*

$$f:\ [0,1]^2\to[0,1]^2$$

jednotkového čtverce do sebe má pevný bod $a\in[0,1]^2$, bod splňující $f(a)=a$.

Důkaz.

$\square$

Věta 1.5.15 (Jordanova o kružnici). *Každý uzavřený oblouk $\gamma:\ [a,b]\to\mathbb{R}^2$ určuje jednoznačný rozklad roviny na tři (neprázdné) souvislé množiny*

$$\mathbb{R}^2=U\cup O\cup V,\ O:=\gamma([a,b])\ ,$$

kde U je otevřená a omezená, V je otevřená a neomezená a $\overline{U}\cap\overline{V}=O$ (O je společnou hranicí množin U a V).

Důkaz.

$\square$

1.6 Úplné metrické prostory

Z následující definice je zřejmá absolutnost úplnosti.

Definice 1.6.1 (úplné množiny a prostor). *Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je úplná, má-li každá cauchyovská posloupnost $(a_n) \subset A$ konvergentní podposloupnost s limitou v A. Prostor (M, d) je tedy úplný, má-li v něm každá cauchyovská posloupnost konvergentní podposloupnost.*

Jak velké mohou být úplné metrické prostory? Jakkoli. Pokud jste vyřešili úlohu 1.3.17, vyřešili jste (asi) i následující úlohu.

Úloha 1.6.2. *Ukažte, že pro každou množinu M existuje metrika $d: M \times M \to \mathbb{R}$, že (M, d) je úplný metrický prostor.*

Věta 1.6.3 (jednobodový průnik). *$A_1 \supset A_2 \supset \dots$ buď posloupnost neprázdných uzavřených množin v úplném metrickém prostoru (M, d) splňující, že $\lim \operatorname{diam}(A_n) = 0$. Potom existuje právě jeden bod $a \in M$, který leží v každé z množin A_n,*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{a\} \; .$$

Důkaz. Zvolíme libovolně body $a_n \in A_n$. Z předpokladů hned plyne, že $(a_n) \subset M$ je cauchyovská posloupnost. Její limita $a := \lim a_n$ pak vzhledem k uzavřenosti množin A_n a inkluzím $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ leží v každé A_n. Jiný takový bod v M není vzhledem k $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$. □

1.7 Použití úplnosti

1.8 Poznámky a další úlohy

Mnoho dalších zajímavých a důležitých výsledků o metrických prostorech, s důrazem na úplnost a na kompaktnost, naleznete v Netukových skriptech [27].

Oddíl 1.1. Výsledky o sférické metrice jsou inspirovány článkem Robinsona [31].

Oddíl 1.2. Důkaz Ostrowskiho věty 1.2.3 je převzat z knihy Koblitze [16], která obsahuje mnoho zajímavého o p-adických číslech.

Oddíl 1.3. Kompaktnostní důkaz ZVA pomocí minimalizace hodnot funkce $|p(z)|$ je dobře známý a často uváděný (např. Zorich [**?**] či [27]). Podle mého názoru se ale často zapomíná na to, že to ještě není celý důkaz, ale jen jeho začátek, redukce na případ binomického polynomu $z^n - a$ s nenulovým $a \in \mathbb{C}$. Existence jeho kořene α se odbude jako „jasná“ nebo s odkazem na vyjádření

$$\alpha = |a|^{1/n}(\cos(\arg(a)/n) + i \sin(\arg(a)/n)) \; .$$

Když si ale uvědomíme, že tak pečlivě a podrobně, jak se dokázala první část, by se mělo také dokázat, že opravdu toto $\alpha^n = a$ (měl by se zavést kosinus a sinus a měly by se podrobně odvodit jejich relevantní vlastnosti), je jasné, že minimalizační částí důkazu ZVA zdaleka nejsme hotovi a zbývající část důkazu, existence kořene binomického polynomu, je přinejmenším stejně podstatná a náročná. Tuto zbývající část, jak by asi měla správně vypadat, aby byl minimalizační důkaz ZVA úplný, jste si mohli přečíst výše v oddílu 1.4 a je to snad původní přínos těchto skript. Různé důkazy ZVA jsou vůbec dosti populární: … je jen menší výběr.

Oddíl 1.4.
Oddíl 1.5.
Oddíl 1.6.
Oddíl 1.7.

Další úlohy

Úloha 1.8.1. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je čtvercová ortogonální matice, tedy $AA^T = I$ (ekvivalentně, sloupce A tvoří vzhledem k obvyklému skalárnímu součinu ortonormální systém), a*

$$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(u) = Au\ ,$$

je zobrazení, kde $u \in \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n\times 1}$ chápeme jako sloupcový vektor. Dokažte, že f je izometrie euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ na sebe. Jaký je její geometrický smysl?

Kapitola 2

Posloupnosti a řady funkcí

2.1 Stejnoměrná konvergence

Konvergence: bodová, stejnoměrná a lokálně stejnoměrná. Kdy $f_n \to f$ implikuje $f_n \rightrightarrows f$. Stejnoměrná Bolzanova–Cauchyova podmínka.

V této kapitole symbol M neodkazuje na metrický prostor, ale označuje neprázdnou množinu $M \subset \mathbb{R}$ reálných čísel, obvykle definiční obor nějakých reálných funkcí. Na posloupnost (f_n) takových funkcí $f_n : M \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, můžeme pohlížet jako na systém posloupností reálných čísel $(f_n(x)) \subset \mathbb{R}$, který je parametrizován číslem $x \in M$.

Definice 2.1.1 (tři druhy konvergence). *Fukce $f_n : M \to \mathbb{R}$ konvergují k funkci $f : M \to \mathbb{R}$ na množině M*

- *bodově, když pro každé $x \in M$ je $\lim f_n(x) = f(x)$ (značíme „$f_n \to f$ na M“),*
- *stejnoměrně, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že $x \in M, n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (značíme „$f_n \rightrightarrows f$ na M“) a*
- *lokálně stejnoměrně, když pro každé $a \in M$ existuje $\delta > 0$, že $f_n \rightrightarrows f$ na $B(a, \delta) \cap M$ (značíme „$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na M“).*

Věta 2.1.2 (stejnoměrná B.–C. podmínka). *Nechť $f_n : M \to \mathbb{R}$ s $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce definované na $M \subset \mathbb{R}$. Pak existuje funkce $f : M \to \mathbb{R}$, že $f_n \rightrightarrows f$ na M, právě když*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 : \ m, n > n_0, \ x \in M \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

— říkáme, že posloupnost (f_n) splňuje (na množině M) stejnoměrnou Bolzanovu–Cauchyovu podmínku a píšeme „$f_n \rightrightarrows$ na M“.

Důkaz. Nechť $f_n \rightrightarrows f$. Pak pro každé $x \in M$ a každé $m, n \in \mathbb{N}$ podle Δ-ové nerovnosti máme

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \ .$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ podle předpokladu vezmeme n_0, že pro každé $x \in M$ a každé $m, n > n_0$ jsou obě absolutní hodnoty vpravo $< \varepsilon/2$, tedy $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Je splněna stejnoměrná B.–C. podmínka.

Naopak, nechť $f_n \rightrightarrows$ na M. Pro každé pevné $x \in M$ pak je posloupnost $(f_n(x)) \subset \mathbb{R}$ cauchyovská a podle věty z Matematické analýzy I má vlastní limitu, kterou označíme $f(x) \in \mathbb{R}$. Pro každé $x \in M$ a každé $m, n \in \mathbb{N}$ pak podle Δ-ové nerovnosti máme

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \ .$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ zvolíme podle stejnoměrné B.–C. podmínky n_0, že pro každé $x \in M$ a každé dva indexy $m, n > n_0$ je první absolutní hodnota vpravo $< \varepsilon/2$. Pro libovolně vybrané $x \in M$ pak vezmeme m, že $m > n_0$ a druhá absolutní hodnota vpravo je $< \varepsilon/2$. Pro toto x a každé $n > n_0$ jsou obě absolutní hodnoty vpravo $< \varepsilon/2$ a tedy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Protože n_0 je pevné a nezávisí na vybraném $x \in M$ (na něm může záviset m, to se ale vlevo neobjevuje), máme $f_n \rightrightarrows f$ na M. □

Věta 2.1.3 (st. B.–C. podmínka pro MP). *Nechť $f_n : M \to N$ s $n \in \mathbb{N}$ jsou zobrazení z metrického prostoru (M, d) do úplného metrického prostoru (N, e). Pak existuje zobrazení $f : M \to N$, že $f_n \rightrightarrows f$ na M, právě když*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 : \ m, n > n_0, \ x \in M \Rightarrow e(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$$

— říkáme, že posloupnost (f_n) splňuje (na metrickém prostoru M) stejnoměrnou Bolzanovu–Cauchyovu podmínku a píšeme „$f_n \rightrightarrows$ na M“.

2.2 Výměna pořadí dvou limitních operací

Výměna pořadí limity podle n a funkční limity, limity podle n a integrace a limity podle n a derivace.

Věta 2.2.1 (Mooreova–Osgoodova). *Nechť $f_n, f : P(x_0, \delta) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce definované na prstencovém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ (i nevlastního), pro něž platí následující.*

1. *Pro každé n existuje vlastní limita $a_n := \lim_{x \to x_0} f_n(x) \in \mathbb{R}$.*
2. *$f_n \rightrightarrows f$ na $P(x_0, \delta)$.*

Potom existují vlastní limity $\lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ *a* $\lim a_n \in \mathbb{R}$ *a rovnají se. Tedy*

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) \; .$$

Důkaz. Podle ekvivalence ve větě 2.1.2 a druhého předpokladu pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme n_0, že $m, n > n_0, x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Limitním přechodem $x \to x_0$ odtud díky prvnímu předpokladu dostáváme nerovnost

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \le \varepsilon \; .$$

Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je tedy cauchyovská a podle věty z Matematické analýzy I má vlastní limitu, kterou označíme $a \in \mathbb{R}$. Zbývá ukázat, že to je i limita funkce $f(x)$ v bodě x_0. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in P(x_0, \delta)$ podle Δ-ové nerovnosti máme

$$|f(x) - a| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a| \; .$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ nejprve podle druhého předpokladu vezmeme n_0, že pro každé $n > n_0$ a každé $x \in P(x, \delta)$ je první absolutní hodnota vpravo $< \varepsilon/3$. Pak zvolíme $n \in \mathbb{N}$, že $n > n_0$ a třetí absolutní hodnota vpravo je $< \varepsilon/3$ ($\lim a_n = a$). Pro toto n vezmeme podle prvního předpokladu $\delta_0 \in (0, \delta)$, že pro každé $x \in P(x_0, \delta_0)$ je druhá absolutní hodnota vpravo $< \varepsilon/3$. Pro každé $x \in P(x_0, \delta_0)$ (a zvolené n) jsou všechny tři absolutní hodnoty vpravo $< \varepsilon/3$, tedy $|f(x) - a| < \varepsilon$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. □

Věta nese jména amerických matematiků *Eliakima Hastingse Mooreho (1862–1932)* (byl synem metodistického kazatele, působil na Chicagské univerzitě, v r. 1893 klasifikoval strukturu konečných těles, v topologii zavedl operátor uzávěru) a *Williama Fogga Osgooda (1864–1943)* (narodil se v Bostonu, studoval na německých univerzitách ve městech Göttingen a Erlangen, zabýval se komplexní analýzou). Uvedeme k ní dodatek a pak variantu.

Kromě dvojitých (složených) limit můžeme totiž uvažovat i následující *smíšenou limitu.*

Tvrzení 2.2.2 (dodatek k M.–O. větě). *Mějme situaci věty 2.2.1 a označme jako* $a \in \mathbb{R}$ *výslednou dvojitou limitu. Pak i*

$$\lim_{x\to x_0,\, n\to\infty} f_n(x) = a \; ,$$

to jest

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists\, \delta_0 \in (0, \delta)\; \exists\, n_0 :\; x \in P(x_0, \delta_0),\, n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - a| < \varepsilon \; .$$

Důkaz. Pro dané $\varepsilon > 0$ zvolíme n_0, že pro každé $n > n_0$ a $x \in P(x_0, \delta)$ je $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2$ ($f_n \rightrightarrows f$) a zvolíme $\delta_0 \in (0, \delta)$, že $f(P(x_0, \delta_0)) \subset B(a, \varepsilon/2)$ (bylo dokázáno, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$). Pro každé $n > n_0$ a $x \in P(x_0, \delta_0)$ pak skutečně máme

$$|f_n(x) - a| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \; .$$

$\square$

M.–O. větu zformulujeme obecně v metrickém prostoru.

Úloha 2.2.3. *Dokažte tvrzení níže. V rámci úlohy vyložte smysl prvního předpokladu a smysl poslední limity.*

Tvrzení 2.2.4 (varianta M.–O. věty). *Předpokládejme, že (M, d) je úplný metrický prostor a $s: \mathbb{N}^2 \to M$ je dvojná posloupnost jeho bodů splňující následující podmínky.*

1. $\lim_{n\to\infty} s_{m,n}$ *existuje stejnoměrně v* m *a*
2. $\lim_{m\to\infty} s_{m,n}$ *existuje pro každé* n.

Potom existuje $a \in M$, že

$$a = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} s_{m,n} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} s_{m,n} = \lim_{m,n\to\infty} s_{m,n} .$$

Z věty 2.2.1 hned plyne, že stejnoměrná limita zachovává spojitost funkce. Lze to dokázat i přímo (viz důkaz tvrzení 2.2.6).

Důsledek 2.2.5 (st. limita zachovává spojitost). *Když $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b), kde $a < b$ jsou reálná čísla a funkce $f_n: (a, b) \to \mathbb{R}$ jsou spojité, pak i limitní funkce f je na (a, b) spojitá.*

Důkaz. Vezmeme libovolný bod $x_0 \in (a, b)$. Podle věty 2.2.1 (použité ve druhé rovnosti) máme

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

— f je spojitá v bodě x_0. $\square$

Ukážeme, že stejnoměrná limita zachovává spojitost obecně, pro zobrazení mezi metrickými prostory.

Tvrzení 2.2.6 (zobecnění důsledku 2.2.5). *Nechť (M, d) a (N, e) jsou metrické prostory a (N, e) je úplný (jak uvidíme, to vlastně není třeba předpokládat). Pokud $f_n, f: M \to N$ s $n \in \mathbb{N}$ jsou taková zobrazení, že $f_n \rightrightarrows f$ na M a každé f_n je spojité, pak i limitní zobrazení f je spojité.*

Důkaz. *První důkaz.* Vskutku, pro $a \in M$ a libovolnou posloupnost $(a_n) \subset M$ jdoucí k a podle tvrzení 2.2.4 máme

$$\lim_{m\to\infty} f(a_m) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(a_m) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} f_n(a_m) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$$

— f je spojité v bodě a.

Druhý důkaz. Postupujme přímo. Pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme n_0, že pro každé $n > n_0$ a každé $x \in M$ je $e(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3$. Zvolíme pevně $m > n_0$ a pro daný bod $a \in M$ vezmeme $\delta > 0$, že $f_m(B(a,\delta)) \subset B(f_m(a), \varepsilon/3)$ (první koule je v M a druhá v N). Pro každý bod $x \in B(a,\delta)$ pak máme

$$\begin{aligned} e(f(x), f(a)) &\leq e(f(x), f_m(x)) + e(f_m(x), f_m(a)) + e(f_m(a), f(a)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

— díky stejnoměrné konvergenci f_n k f, spojitosti f_m v a a opět díky stejnoměrné konvergenci f_n k f. Takže f je spojité v bodě a a úplnost prostoru N nepotřebujeme (existence limity $f(a)$ je už totiž předpokládána). □

Stejnoměrnou konvergenci posloupností zobrazení a M.–O. větu teď využijeme při sestrojení křivky vyplňující čtverec.

Věta 2.2.7 (Peanova křivka). *Existuje taková křivka $f: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ (tj. spojité zobrazení mezi uvedenými euklidovskými prostory), že*

$$f([0,1]) = [0,1] \times [0,1] =: K$$

— obraz křivky f přesně vyplní jednotkový čtverec K.

Důkaz. Sestrojíme takové křivky $f_n: [0,1] \to K$, $n \in \mathbb{N}$, že (i) $f_n \rightrightarrows$ na $[0,1]$ a (ii) množina $B \subset K$ bodů čtverce, jimiž procházejí skoro všechny (až na konečně mnoho indexů) obrazy křivek f_n je v K hustá (uzávěr $\overline{B} = K$). Pak podle (i) a věty 2.1.3 $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ pro nějakou křivku $f: [0,1] \to K$ (K je uzavřený a tedy úplný podprostor $\mathbb{R}^2$). Nechť $b \in B$. Zvolíme posloupnost $(x_n) \subset [0,1]$, že pro $n > n_0$ je $f_n(x_n) = b$ (hodnoty $f_n(x_n)$ pro $n \leq n_0$ nás nezajímají). Podle B.–W. věty z MAI můžeme předpokládat, že $\lim x_n = a \in [0,1]$. Podle tvrzení 2.2.4 (použitého ve druhé rovnosti) pomocí smíšené limity máme

$$b = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} f_n(x_m) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$$

a tedy $B \subset f([0,1])$. Ale obraz $f([0,1])$ je uzavřená množina (úlohy 1.3.23 a 1.3.22) a $\overline{B} = K \subset f([0,1])$ a $K = f([0,1])$.

Popíšeme jednu z možných konstrukcí křivek f_n. Uvážíme dvojice tvaru

$$D = D_\emptyset = (R, \varphi)\ ,$$

kde $R \subset \mathbb{R}^2$ je rovinný obdélník se stranami rovnoběžnými s osami a $\varphi: [a,b] \to R$ je spojité, po dvou částech lineární zobrazení, jehož obraz je úsečka uv spojující středy u a v dvou protilehlých stran R; $\varphi(x)$ v první části pro $a \leq x \leq \frac{a+b}{2}$ běží lineárně od u do v a ve druhé pro $\frac{a+b}{2} \leq x \leq b$ běží zpátky lineárně od v do u (tímto je $\varphi(x)$ jednoznačně určeno). Definujeme nové spojité po osmi částech lineární zobrazení $\psi: [a,b] \to R$ se stejným definičním oborem. Nechť rs je úsečka spojující středy r a s zbývajících dvou protilehlých stran R (kolmá na uv), kde r leží vlevo od uv, a t je průsečík uv a rs, střed obdélníka R. Definiční interval $[a,b]$ rozdělíme na osm stejných částí (osmin). V těchto osmi částech $\psi(x)$ lineárně probíhá po řadě (a uvedeným směrem) následující úsečky: v první části úsečku ut, ve druhé tr, ve třetí rt, ve čtvrté tv, v páté vt, v šesté ts, v sedmé st a v osmé tu. Označíme-li tyto úseky zobrazení ψ jako $\psi_{ut},\dots,\psi_{tu}$ a jsou-li S a T levá a pravá polovina obdélníka R vzhledem k uv, dostáváme z D dvě nové dvojice

$$D_0 := (S, \psi_{tr} \cup \psi_{rt}) \ \text{ a } \ D_1 := (T, \psi_{ts} \cup \psi_{st})$$

(zobrazení tu chápeme jako množiny uspořádaných dvojic, které sjednocujeme). Stejný postup použitý pro D_0 a D_1 dá čtyři dvojice $D_{00} = (D_0)_0$, $D_{01} = (D_0)_1$, $D_{10} = (D_1)_0$ a $D_{11} = (D_1)_1$, a tak dále. Označíme-li druhou složku dvojice D_- jako $F(D_-)$, definujeme pro $n \in \mathbb{N}$ hledané křivky f_n jako

$$f_n := \bigcup_{k=0}^{n-1} \bigcup_{w \in \{0,1\}^k} F(D_w)\ ,$$

s výchozí dvojicí $D_\emptyset = (K, \varphi)$ pro $\varphi :\ [0,1] \to K$ probíhající úsečku $uv = (\frac{1}{2},0)(\frac{1}{2},1)$.

Ukážeme, že f_n mají vlastnosti (i) a (ii). Pro každou dvojici $D = (R, \varphi)$ a odvozené zobrazení ψ zřejmě pro každé $x \in [a,b]$ je $\varphi(x), \psi(x) \in R$, tudíž $|\varphi(x) - \psi(x)| \le \mathrm{diam}(R)$ (tato nerovnost by se dala zesílit díky tomu, že hodnoty obou zobrazení leží vždy ve stejné polovině obdélníka R). Označíme-li první složku dvojice D_- jako $E(D_-)$, pak pro $w \in \{0,1\}^n$ s lichým $n = 2k-1 \in \mathbb{N}$, resp. sudým $n = 2k \in \mathbb{N}$, je

$$\mathrm{diam}(E(D_w)) = \sqrt{(1/2)^{2(k-1)} + (1/2)^{2k}},\ \text{ resp. } \sqrt{(1/2)^{2k} + (1/2)^{2k}}\ ,$$

tedy nejvýše $\sqrt{(1/2)^n + (1/2)^{n+1/2}} < 2^{1-n/2}$. Pro každé $x \in [0,1]$ a $n \in \mathbb{N}$ tak platí nerovnost

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| < 2^{1-n/2}\ ,$$

z níž se snadno vidí, že posloupnost zobrazení (f_n) splňuje na $[0,1]$ stejnoměrnou B.–C. podmínku (věta 2.1.3) — máme vlastnost (i). Označuje-li t_w pro $w \in \{0,1\}^n$ střed obdélníka $E(D_w)$, pak obraz každé křivky f_m s $m > n$ probíhá bodem t_w. Tyto body (pro w probíhající všechna binární slova) tvoří patrně hustou podmnožinu čtverce K, takže f_n mají i vlastnost (ii). □

Úloha 2.2.8. *Ukažte, že výše sestrojené křivky f_n mají silnější vlastnost než (ii): je-li B množina těch bodů $b \in K$, že pro nějaké $a \in [0,1]$ a n_0 pro každé $n > n_0$ je $f_n(a) = b$, pak $\overline{B} = K$. Rovnost $f([0,1]) = K$ pak plyne už z bodové konvergence $f_n \to f$ a M.–O. větu nepotřebujeme ($f_n \rightrightarrows$ ale potřebujeme pro spojitost f).*

Úloha 2.2.9. *Dokažte, že výše sestrojená křivka f vyplňující čtverec K nemůže být prostá, nemůže to být oblouk.*

Přejdeme k výměně pořadí limity a integrálu. V důkazu $s(f,d)$ a $S(f,d)$ označují dolní a horní Riemannovu sumu pro funkci $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ a dělení d intervalu $[a,b]$. Předpokládáme tu znalost teorie Riemannova integrálu.

Věta 2.2.10 (**$\lim_n \leftrightarrow \int$**). *Pokud $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ ($a<b$ jsou reálná čísla) a každá funkce f_n má na $[a,b]$ Riemannův integrál, pak ho má i f a $\int_a^b f = \lim \int_a^b f_n$. Tedy*

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\ .$$

Důkaz. Pro každé $\varepsilon>0$ existuje n_0, že pro každé $n>n_0$ a každé dělení d intervalu $[a,b]$ máme

$$s(f_n,d)-\varepsilon \le s(f,d)\le S(f,d)\le S(f_n,d)+\varepsilon$$

— stačí vzít tak velké n_0, že pro $n>n_0$ a každé $x\in[a,b]$ je $f_n(x)-\frac{\varepsilon}{b-a} < f(x) < f_n(x)+\frac{\varepsilon}{b-a}$ a použít definici sum $s(\cdot,d)$ a $S(\cdot,d)$. Pro dané $\varepsilon>0$ pak vezmeme libovolné $n>n_0$ a, protože $\int_a^b f_n$ existuje, dělení e intervalu $[a,b]$, že $0\le S(f_n,e)-s(f_n,e)<\varepsilon$. Potom

$$0\le S(f,e)-s(f,e)\le (S(f_n,e)+\varepsilon)-(s(f_n,e)-\varepsilon) < 3\varepsilon$$

a podle teorie Riemannova integrálu z Matematické analýzy II existuje $\int_a^b f$. Z ($n>n_0$)

$$\int_a^b f\in[s(f,e),S(f,e)]\subset[s(f_n,e)-\varepsilon,S(f_n,e)+\varepsilon]$$

a

$$\int_a^b f_n\in[s(f_n,e),S(f_n,e)]\subset[s(f_n,e)-\varepsilon,S(f_n,e)+\varepsilon]$$

máme $|\int_a^b f-\int_a^b f_n|<3\varepsilon$. Tedy $\lim\int_a^b f_n=\int_a^b f$. □

Větu o výměně pořadí limity a derivace uvedeme třemi příklady ilustrujícími její nutně odlišnou strukturu. Máme

$$\frac{\sin(nx)}{n}\rightrightarrows 0\ \ \text{(konstantní nula) na } \mathbb{R}\ ,$$

ale posloupnost derivací $(\cos(nx))$ nekonverguje na $\mathbb{R}$ ani bodově. Derivování totiž funkce kazí, ve srovnání s integrováním, které je zlepšuje. Dále

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\rightrightarrows |x|\ \ \text{na } \mathbb{R}\ \text{(úloha 2.2.11)}\ ,$$

ale i když každá funkce $\sqrt{x^2+1/n^2}$ má na celém $\mathbb{R}$ vlastní derivaci, limitní funkce $|x|$ ji v nule nemá. Při stejnoměrné limitě se může ztratit diferencovatelnost. Konečně

$$(n)'=0\rightrightarrows 0\ \ \text{(derivace konstantního } n\text{) na } \mathbb{R}\ ,$$

ale posloupnost konstantních funkcí (n) nekonverguje bodově na $\mathbb{R}$ nikde. Ani stejnoměrná konvergence derivací tedy bez dalšího předpokladu nezaručuje konvergenci původních funkcí.

Úloha 2.2.11. *Zdůvodněte hořejší stejnoměrnou konvergenci.*

Nyní je struktura následující věty snad srozumitelnější.

Věta 2.2.12 ($\lim_n \leftrightarrow d/dx$)**.** *Předpokládejme, že funkce $f_n:\ (a,b) \to \mathbb{R}$ ($-\infty \le a < b \le +\infty$) (i) mají na (a,b) vlastní první derivace f_n', (ii) tyto derivace $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ na (a,b) k nějaké funkci $g:\ (a,b) \to \mathbb{R}$ a (iii) existuje $x_0 \in (a,b)$, že posloupnost hodnot $(f_n(x_0))$ konverguje. Pak $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b) k nějaké funkci $f:\ (a,b) \to \mathbb{R}$ a $f' = g$ na (a,b). Tedy*

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n' \ .$$

Věta platí i po náhradě (na dvou místech) lokálně stejnoměrné konvergence stejnoměrnou konvergencí.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a,b). Pak pomocí věty 2.2.1 spočítáme, že limitní funkce f má derivaci rovnou g. Nakonec ověříme předpoklady užití věty 2.2.1.

Nechť $x_1 \in (a,b)$ je libovolný bod. Máme nalézt jeho okolí U takové, že $f_n \rightrightarrows$ na $(a,b) \cap U$. Stačí dokázat, že $f_n \rightrightarrows$ na $[c,d]$ pro libovolný kompaktní interval $[c,d] \subset (a,b)$ obsahující „záchytný“ bod x_0 — takový interval lze totiž zvolit tak, že oba body x_0 a x_1 leží v (c,d), a pak $U = (c,d)$.

Nechť tedy interval $[c,d] \subset (a,b)$ splňuje, že $x_0, x_1 \in (c,d)$. Ověříme, že posloupnost (f_n) splňuje na $[c,d]$ Bolzanovu–Cauchyovu podmínku. Pro každé $m,n \in \mathbb{N}$ a $x \in [c,d]$ máme nerovnost

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le \underbrace{|f_m(x) - f_n(x) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))|}_{V_1} + \underbrace{|f_m(x_0) - f_n(x_0)|}_{V_2} \ .$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože posloupnost čísel $(f_n(x_0))$ konverguje, existuje n_0, že $m,n > n_0 \Rightarrow V_2 < \varepsilon$. Výraz V_1 odhadneme Lagrangeovou větou o střední hodnotě, použitou na funkci $f_m - f_n$ na intervalu s krajními body x_0 a x:

$$V_1 = |(x - x_0) \cdot (f_m - f_n)'(\zeta)| = |x - x_0| \cdot |f_m'(\zeta) - f_n'(\zeta)| \ ,$$

kde ζ leží mezi body x_0 a x (bod ζ obecně závisí na m,n i na x, ale díky $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows}$ nám to nevadí). Protože $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a,b), máme (podle části 1 tvrzení z minulé přednášky) $f_n' \rightrightarrows$ na $[c,d]$. Existuje tedy n_1, že pro každé $m,n > n_1$ a každé $x \in [c,d]$ platí $|f_m'(x) - f_n'(x)| < \varepsilon$. Tedy

$$m,n > n_1,\ x \in [c,d] \Rightarrow V_1 < (d-c)\varepsilon < (b-a)\varepsilon \ .$$

Celkem pro $m, n > \max(n_0, n_1)$ a každé $x \in [c, d]$ máme

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le V_1 + V_2 < (b-a)\varepsilon + \varepsilon = (b-a+1)\varepsilon\ .$$

Posloupnost (f_n) tak na $[c, d]$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku a $f_n \rightrightarrows$ na $[c, d]$. Limitní funkci označíme jako f, máme $f_n \rightrightarrows f$ na $[c, d]$ a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a, b).

Nyní spočteme derivaci funkce f v libovolném bodě $x_1 \in (a, b)$ a ukážeme, že $f'(x_1) = g(x_1)$. Vskutku, podle M.–O. věty máme

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \lim_{x\to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x\to x_1} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_1} \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1} = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_1) \\ &= g(x_1)\ . \end{aligned}$$

M.–O. větu jsme použili při záměně pořadí limit ve třetí rovnosti. Je ale třeba ověřit, že její předpoklady jsou splněny. Větu jsme použili pro bod x_1 a posloupnost funkcí

$$h_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1}\ .$$

Funkce h_n jsou definované na nějakém prstencovém okolí $P(x_1, \delta)$ bodu x_1 a vlastní limity $\lim_{x\to x_1} h_n(x)$ existují podle předpokladu a rovnají se $f_n'(x_1)$. Zbývá ukázat, že pro nějaké $\delta_0 > 0$ máme $h_n \rightrightarrows h$ na $P(x_1, \delta_0)$, kde

$$h(x) := \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}\ .$$

Je jasné, že $h_n \to h$ na $P(x_1, \delta)$ (protože $f_n \to f$ na $U(x_1, \delta)$). Stačí ukázat, že na nějakém $P(x_1, \delta_0)$ posloupnost (h_n) splňuje B.–C. podmínku.

Zvolme $\delta_0 > 0$ tak malé, že $\delta_0 < \delta$ a že $f_n' \rightrightarrows$ na $U(x_1, \delta_0)$ (což lze podle předpokladu). Podle L. věty o střední hodnotě pro každé $x \in P(x_1, \delta_0)$ a každé $m, n \in \mathbb{N}$ existuje takový bod λ ležící mezi x_1 a x, že

$$\begin{aligned} |h_m(x) - h_n(x)| &= \left| \frac{f_m(x) - f_n(x) - (f_m(x_1) - f_n(x_1))}{x - x_1} \right| \\ &= |f_m'(\lambda) - f_n'(\lambda)|\ . \end{aligned}$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $f_n' \rightrightarrows$ na $U(x_1, \delta_0)$, existuje n_0, že

$$m, n > n_0,\ x \in P(x_1, \delta_0) \Rightarrow |h_m(x) - h_n(x)| = |f_m'(\lambda) - f_n'(\lambda)| < \varepsilon\ .$$

B.–C. podmínka je tedy pro posloupnost (h_n) na prstencovém okolí $P(x_1, \delta_0)$ splněna. □

2.3 Mocninné řady

2.4 Fourierovy řady

Pro funkci $f:\ (a, a+\delta) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$, zavedeme zkratky

$$f(a+0) := \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

a podobně definovaná limita zleva $f(a-0)$.

Definice 2.4.1 (po částech hladká funkce). *Funkce*

$$f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$$

je po částech hladká, když existuje takové dělení $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b$ definičního intervalu, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, k-1$ má f na (a_i, a_{i+1}) spojitou první derivaci (sama f je tedy na (a_i, a_{i+1}) spojitá) a existují vlastní limity

$$f(a_i+0), f(a_i-0), f'(a_i+0), f'(a_i-0) \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1)$$

a $f(a+0), f'(a+0), f(b-0), f'(b-0) \in \mathbb{R}$.

Ukazuje se, že stačí předpokládat existenci jen vlastních limit derivace, existence vlastních limit funkce pak plyne pomocí věty o střední hodnotě. Například

$$f(x) = \sqrt{x}:\ [0,1] \to \mathbb{R}$$

není po částech hladká funkce, protože $f'(0+0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$. Po částech hladká funkce nemusí být spojitá.

Úloha 2.4.2. *Připomeňte si základní vlastnosti Riemannova integrálu. Odvoďte, že po částech hladká funkce má Riemannův integrál.*

Věta 2.4.3 (Dirichletova o bodové konvergenci F. řady). *Funkce*

$$f:\ [-\pi, \pi] \to \mathbb{R},\ f(-\pi) = f(\pi)\ ,$$

buď po částech hladká. Pak její Fourierova řada pro každé $x \in [-\pi, \pi]$ konverguje k hodnotě

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}\ .$$

V bodech spojitosti $x \in [-\pi, \pi]$ funkce f tak její Fourierova řada konverguje k hodnotě $f(x)$.

Jen bodová konvergence Fourierovy řady, jak víme, obecně neumožňuje limitění, derivování a integrování řady člen po členu. Je-li f na $[-\pi, \pi]$ po částech hladká avšak nespojitá v alespoň jednom bodě, její Fourierova řada nekonverguje k $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ na $[-\pi, \pi]$ stejnoměrně — jinak by funkce $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ jako stejnoměrný součet spojitých funkcí byla spojitá, ale to není (úloha 2.4.4).

Úloha 2.4.4. *Dokažte, že když je $f(x):\ [a,b] \to \mathbb{R}$ po částech hladká a nespojitá, je i $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ nespojitá.*

Pro po částech hladkou a spojitou funkci už ale její Fourierova řada konverguje stejnoměrně.

Věta 2.4.5 (o stejnoměrné konvergenci F. řady). *Funkce*

$$f:\ [-\pi,\pi] \to \mathbb{R},\ \ f(-\pi) = f(\pi)\ ,$$

buď po částech hladká a spojitá. Pak je f na $[-\pi,\pi]$ stejnoměrným součtem své Fourierovy řady.

2.5 Poznámky a další úlohy

Oddíl 2.2. Z logické perspektivy se na důkaz Mooreovy–Osgoodovy věty dívá Blake [1].

Kapitola 3

Úvod do komplexní analýzy

Holomorfní a analytické funkce. Čtyři rozdíly mezi reálnou a komplexní analýzou, například Liouvilleova věta. Důkaz Základní věty algebry komplexní analýzou. Co naleznete jen zde.

Myslím, že komplexní analýza je nejpoutavějším odvětvím matematické analýzy a snad i celé matematiky. Zkoumá funkce

$$f:\ U \to \mathbb{C}$$

definované na neprázdných otevřených množinách $U \subset \mathbb{C}$. Symboly U a U' budeme označovat takové množiny. Množina komplexních čísel

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\},\ i^2 = -1,\ \mathrm{Re}(z) := a \ \text{ a } \ \mathrm{Im}(z) := b$$

($\mathrm{Re}(z)$ je *reálná* a $\mathrm{Im}(z)$ *imaginární část* komplexního čísla z) s obvyklými aritmetickými operacemi $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$ a $(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$ a obvyklou normou $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ tvoří normované těleso, speciálně tvoří metrický prostor a normovaný (reálný či komplexní) vektorový prostor. Pro $a \in \mathbb{C}$ a reálné $r > 0$ označuje $B(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$ otevřený kruh se středem v a a poloměrem r.

Definice 3.0.1 (holomorfie a analytičnost). *Funkce $f:\ U \to \mathbb{C}$ je holomorfní, existuje-li pro každé $z \in U$ derivace $f'(z) \in \mathbb{C}$. Tato funkce je analytická, pokud pro každý bod $a \in U$ existují koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, že jakmile $z \in B(a,r) \subset U$ pro nějaký poloměr $r > 0$, pak*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n\ .$$

Celá funkce je funkce holomorfní na celém $\mathbb{C}$, tedy všude definovaná holomorfní funkce. Připomeneme definici derivace komplexní funkce, která zůstává formálně stejná jako pro reálné funkce: číslo $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ je *derivace funkce*

$f : U \to \mathbb{C}$ *v bodě* $z_0 \in U$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 :\ 0 < |z - z_0| < \delta,\ z \in U \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon\ .$$

V okolí bodu z_0 tak má $f(z)$ dobrou lineární aproximaci:

$$z \in B(z_0, \delta) \cap U \Rightarrow f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \Delta(z)(z - z_0) \ \text{ s } \ |\Delta(z)| < \varepsilon\ .$$

Formálně se komplexní funkce derivují jako reálné:

Úloha 3.0.2. *Nechť* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *a* $f, g :\ U \to \mathbb{C}$ *jsou holomorfní. Dokažte že pak i funkce* $\alpha f + \beta g$ *a* fg *jsou holomorfní na* U, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ *a* $(fg)' = f'g + fg'$*. Taktéž* $(z)' = 1$ *(konstantní funkce). Podobně dokažte, že když* $f : U \to \mathbb{C}$, $g : U' \to \mathbb{C}$ *jsou holomorfní s* $f(U) \subset U'$*, pak i složená funkce* $g(f) : U \to \mathbb{C}$ *je holomorfní a* $(g(f))' = g'(f)f'$*.*

Holomorfní funkce tedy mají v každém bodě definičního oboru derivaci a analytické funkce se dají v každém otevřeném kruhu obsaženém v definičním oboru vyjádřit mocninnou řadou centrovanou ve středu kruhu. *Základní výsledek komplexní analýzy představuje skutečnost, že se obě třídy funkcí rovnají. Hluboký výsledek je analytičnost holomorfních funkcí, opačná inkluze se dokáže jednoduše.* V reálné analýze tato rovnost neplatí, například funkce

$$f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 0 \ \text{ pro } \ x \le 0 \ \text{ a } \ f(x) = x^2 \ \text{ pro } \ x \ge 0\ ,$$

má vlastní derivaci $f'(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ ($f'(x) = 0$ pro $x \le 0$ a $f'(x) = 2x$ pro $x \ge 0$), ale v žádném okolí 0 není součtem mocninné řady centrované v 0.

Úloha 3.0.3. *Proč?*

V oddílech 3.1–3.2 dokážeme slabší formu analytičnosti holomorfních funkcí (silnější formu z definice 3.0.1 dokážeme ve větě 3.4.4):

Věta 3.0.4 (holomorfie ⇒ analytičnost). *Nechť* $f :\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je celá funkce (má všude derivaci). Pak existují taková čísla* $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$*, že pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *platí rovnost*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\ .$$

Naopak, jak víme a jak se lehce dokáže, každá posloupnost $(a_0, a_1, \dots) \subset \mathbb{C}$ komplexních čísel splňující $\limsup |a_n|^{1/n} = 0$ definuje celou funkci

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\ .$$

Rozdíl mezi reálnou a komplexní analýzou lze uchopit přímočařeji. Reálné funkce jako $f(x) = 2017$ (konstantní funkce), $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ nebo i

$$f(x) = e^{-x^2} :\ \mathbb{R} \to (0, 1]$$

jsou všude definované, mají všude derivaci (dokonce derivace všech řádů) a jsou omezené. V komplexní analýze přežívá jen první příklad těchto funkcí, jak dokážeme v oddílech 3.1–3.2:

Věta 3.0.5 (Liouville, 1847). *Je-li $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ omezená celá funkce, potom je $f(z)$ konstantní funkce.*

Často se jako aplikace Liouvilleovy věty uvádí následující „jednoduchý" důkaz Základní věty algebry. Píšeme uvozovky, protože po rozvinutí důkazu Liouvilleovy věty do detailů (abychom například oponenta přesvědčili, že fragment komplexní analýzy dokazující Liouvilleovu větu nepoužívá ZVA a nedokazujeme ji tak kruhem) je jasné, že to zdaleka není jednoduchý důkaz.

Důsledek 3.0.6 (důkaz ZVA komplexní analýzou). *Nemá-li komplexní polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ kořen, $p(z) \neq 0$ pro každé $z \in \mathbb{C}$, pak to je nenulový konstantní polynom.*

Důkaz. V důkazu věty 1.3.29 jsme vlastně dokázali, že pro (úplně) každý polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ se nabývá nejmenší hodnota $|p(z_0)| = \min_{z\in\mathbb{C}} |p(z)|$. Nemá-li $p(z)$ kořen, je $|p(z_0)| > 0$ a reciproká funkce $1/p(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je všude definovaná a omezená ($|1/p(z)| \leq |1/p(z_0)|$ pro každé $z \in \mathbb{C}$). Je to též holomorfní funkce, protože

$$\left(\frac{1}{p(z)}\right)' = \frac{-p'(z)}{p(z)^2}$$

(podle úlohy 3.0.2). Podle věty 3.0.5 je $1/p(z)$ konstantní a tedy i $p(z)$ je konstantní. □

Reálná funkce

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \sin(1/x) \ \text{ pro } \ x \neq 0 \ \text{ a } \ f(0) = 0\ ,$$

má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ derivaci, $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ pro $x \neq 0$ a $f'(0) = 0$. Tato derivace $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ale není spojitá, má nespojitost v bodě 0. Žádná taková komplexní funkce neexistuje.

Věta 3.0.7 (spojitost komplexní derivace). *Má-li funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ v každém bodě $z \in \mathbb{C}$ derivaci $f'(z) \in \mathbb{C}$, je tato derivace $f' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vždy spojitá funkce.*

Věta platí i pro funkce s definičním oborem U. Věta 3.0.7 samozřejmě plyne jednoduše z věty 3.0.4

Úloha 3.0.8. *— jak? —*

ale pro zajímavost je v oddílu 3.2 dokážeme obě.

Do čtvrtice poslední rozdíl mezi reálnou a komplexní analýzou. Reálná funkce

$$f(x) = 1 - x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

má zřejmě všude derivaci (má dokonce derivace všech řádů) a její absolutní hodnota $|f(x)| = |1 - x^2|$ má v bodě $x = 0$ ostré lokální maximum: $x \in (-1, 1), x \neq 0 \Rightarrow |f(x)| < |f(0)| = 1$. Žádná taková komplexní funkce neexistuje. Je to důsledek analytičnosti.

Důsledek 3.0.9 (princip maxima modulu). *Nechť $f : U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce. Pro každý bod $a \in U$ a každé $\delta > 0$ existuje bod $b \in U$, že*

$$0 < |a - b| < \delta \ \& \ |f(b)| \geq |f(a)|$$

— $|f|$ nemá žádné ostré lokální maximum.

Dokážeme to v důsledku 3.4.5. Obdobný princip minima modulu jsme už použili, když jsme v důkazu věty 1.3.29 blízko nenulové hodnoty komplexního polynomu nalezli jeho jinou hodnotu s menším modulem.

Mým cílem bylo uspořádat důkazy vět 3.0.5, 3.0.7 a 3.0.4 v oddílu 3.2 co nejvíc přímočaře, stručně a „selfcontained" (bez odkazů na nevysvětlené a nezdůvodněné nástroje a výsledky). V následujícím oddílu tak komplexní integrál (přesněji, jeho minimální verzi) zavádím úplně od začátku a nepředpokládám jakoukoli znalost Riemannova nebo Newtonova integrálu (na nichž se většinou staví v kurzech komplexní analýzy). Toto stručné a rychlé odvození zmíněných základních vět „od nuly" je původním příspěvkem skript. Nikde jinde jsem podobné pojetí neviděl.

Originalita podání by však neměla ublížit čtenáři a tak jsem standardní definici křivkového integrálu zařadil do oddílu 3.3 a oddíl 3.4 obsahuje další základní výsledky komplexní analýzy v obvyklé podobě. V čem však spočívá význam komplexní analýzy, proč se nespokojíme s reálnou? V oddílu 3.7 na několika příkladech předvedeme její někdy až zázračnou moc.

3.1 Minimalistické komplexní integrály

Úsečka, její dělení a obdélník v $\mathbb{C}$. Integrál spojité funkce přes úsečku a přes hranici obdélníka. Konstanta $\rho\,(= 2\pi i) \neq 0$. Délka rovinné křivky. Cauchyho věta pro obdélníky.

Zavedeme integrál spojité komplexní funkce přes úsečku a přes hranici obdélníka. Začneme úsečkami. S těmi jsme již pracovali, ale teď je definujeme znovu a přesně.

Definice 3.1.1 (úsečka a její dělení). *Pro dva různé body $a, b \in \mathbb{C}$ úsečkou $u = ab \subset \mathbb{C}$ spojující a a b v tomto pořadí rozumíme množinu komplexních čísel*

$$u = \{\varphi(t) \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{C}\,,$$

kde $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C}$ je lineární zobrazení $\varphi(t) = (b - a)t + a$. Její dělení $p = (a_0, a_1, \dots, a_k) \subset u$ je konečná posloupnost bodů na ní, přičemž $a_i = \varphi(t_i)$ pro nějaká reálná čísla $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1$.

Délka úsečky u je $|u| = |ab| := |b - a|$. Pro její dělení tedy máme $a_0 = a$, $a_k = b$ a vzájemně různé body $a_0, a_1, \ldots, a_k$ běží na u v tomto pořadí od konce a do druhého konce b. Všimněte si, že $\sum_{i=1}^{k} |a_i - a_{i-1}| = |a_k - a_0| = |u|$ díky kolinearitě bodů dělení. Pokud $t_i = i/n$ pro $i = 0, 1, \ldots, k$, hovoříme o *k-ekvidělení*. *Normou dělení* $\|p\| \in (0, +\infty)$ rozumíme největší vzdálenost mezi sousedními body,

$$\|p\| := \max_{1 \le i \le k} |a_i - a_{i-1}| \ .$$

Je-li $f\colon u \to \mathbb{C}$ funkce definovaná na úsečce u a $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ je dělení u, položíme

$$C(f, p) := \sum_{i=1}^{k} f(a_i)(a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{C}$$

— je to tak zvaná *Cauchyho suma*. Lehce se vidí, že

$$|C(f, p)| \le \max_{z \in u} |f(z)| \cdot |u| \ .$$

Lomená čára je k-tice navazujících úseček $\ell = (a_0 a_1, a_1 a_2, \ldots, a_{k-1} a_k)$ daná různými body $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$. Řekneme, že spojuje body a_0 a a_k. Její *délka* je $L(\ell) := \sum_{i=1}^{k} |a_{i-1} a_i|$.

Úloha 3.1.2. *Dokažte, že pro každé dva body a, b v rovině $\mathbb{C}$ či $\mathbb{R}^2$ spojené lomenou čarou ℓ je $L(\ell) \ge |ab| = |b - a|$.*

Obdélník $R \subset \mathbb{C}$ je množina

$$R = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha \le \mathrm{Re}(z) \le \beta \ \& \ \gamma \le \mathrm{Im}(z) \le \delta\} \ ,$$

kde $\alpha < \beta$ a $\gamma < \delta$ jsou reálná čísla. Pro $\beta - \alpha = \delta - \gamma$ máme *čtverec*. Obdélníky tak mají strany rovnoběžné s reálnou nebo imaginární osou. *Čtvrtkou* R rozumíme každý ze čtyř obdélníků, na něž R rozdělí dvě spojnice středů protilehlých stran. *Hranice obdélníka* R, kterou značíme ∂R, je množina bodů ležících na jeho čtyřech stranách a rovná se tedy sjednocení čtyř úseček. Je to přesně množina hraničních bodů obdélníka R podle definice 1.4.1. *Vnitřek* R je množina $\mathrm{int}(R) := R \backslash \partial R$, množina vnitřních bodů R podle definice 1.4.1. *Kanonickými vrcholy obdélníka* rozumíme čtveřici jeho vrcholů a, b, c, d uvedenou v pořadí proti směru hodinek a začínající levým dolním rohem:

$$a = \alpha + \gamma i, \ b = \beta + \gamma i, \ c = \beta + \delta i, \ d = \alpha + \delta i \ .$$

Obvod obdélníka R je $|\partial R| := |ab| + |bc| + |cd| + |da|$.

Jak jsme uvedli v úvodu ke kapitole, definice integrálu níže není standardní (standardní je definice 3.3.21), je totiž střižená pro náš přístup k důkazům tří základních vět.

Definice 3.1.3 (integrál). *Nechť $f\colon u, \partial R \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce definovaná na nějaké úsečce u nebo na hranici nějakého obdélníka R. Integrál funkce f přes u definujeme jako*

$$\int_u f := \lim_{n \to \infty} C(f, p_n) \in \mathbb{C} \ ,$$

kde (p_n) *je libovolná posloupnost dělení úsečky* u *splňující* $\lim \|p_n\| = 0$. *Jsou-li kanonické vrcholy obdélníka* R *rovny* a, b, c, d, *definujeme integrál funkce* f *přes* ∂R *jako*

$$\int_{\partial R} f := \int_{ab} f + \int_{bc} f + \int_{cd} f + \int_{da} f \in \mathbb{C}\,.$$

Dokážeme-li, a to hned dokážeme, nezávislost limity na volbě dělení, lze pak integrály počítat limitou pouze přes ekvidělení. Integrál $\int_u f$ lze také stejně dobře definovat pomocí *modifikované Cauchyho sumy*

$$C'(f, p) = \sum_{i=1}^{k} f(a_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

(berou se hodnoty funkce v začátcích podúseček dělení místo jejich konců). Ze stejnoměrné spojitosti f na u (tvrzení 1.3.27) totiž snadno dostaneme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že $\|p\| < \delta \Rightarrow |C(f, p) - C'(f, p)| < \varepsilon$.

Věta 3.1.4 (vlastnosti integrálu). *Mějme situaci definice 3.1.3. Definiční limita pro* $\int_u f$ *vždy existuje a nezávisí na posloupnosti dělení* (p_n). *Integrál má následující vlastnosti.*

1. *Je-li* g *další spojitá funkce definovaná na* u *resp. na* ∂R *a* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *pak*

$$\int_u (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_u f + \beta \int_u g$$

   a totéž platí pro integrál přes ∂R.

2. *Platí odhady*

$$\left| \int_u f \right| \le |u| \max_{z \in u} |f(z)| \quad a \quad \left| \int_{\partial R} f \right| \le |\partial R| \max_{z \in \partial R} |f(z)|\,.$$

3. *Platí identity* $(u = a'a'')$

$$\int_u f = \int_{a'a''} f = \int_{a'b'} f + \int_{b'a''} f \quad a \quad \int_{a'a''} f = -\int_{a''a'} f\,,$$

   kde $b' \in u$ *je libovolný bod na* u *různý od jejích konců* a' *a* a''.

Důkaz. Nechť $f: u \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pro existenci a jednoznačnost definiční limity integrálu stačí ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že když dvě dělení d a e úsečky u splňují $\|d\|, \|e\| < \delta$, pak $|C(f, d) - C(f, e)| < \varepsilon$. Podle tvrzení 1.3.27 je f na u stejnoměrně spojitá, pro dané $\varepsilon > 0$ tedy vezmeme $\delta > 0$, že $x, y \in u, |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon/|u|$. Nechť nejprve jedno z dělení úsečky u zjemňuje druhé, $d = (a_0, a_1, \ldots, a_k) \subset e$ a $\|d\| < \delta$ (patrně $\|e\| \le \|d\|$). Pak existují dělení $p_i \subset e$ úseček $a_{i-1}a_i$, $1 \le i \le k$, že $C(f, e) = \sum_{i=1}^{k} C(f, p_i)$. Označíme-li jako $\equiv f(a_i)$ funkci, jež je na úsečce $a_{i-1}a_i$

konstantně $f(a_i)$, máme podle hořejšího odhadu Cauchyho sumy (použitého pro úsečku $a_{i-1}a_i$ a funkci $\equiv f(a_i) - f$) a podle volby δ, že

$$\begin{aligned} |C(f,d) - C(f,e)| &\le \sum_{i=1}^{k} |C(\equiv f(a_i), p_i) - C(f,p_i)| = \sum_{i=1}^{k} |C(\equiv f(a_i) - f, p_i)| \\ &< \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{|u|}|a_{i-1}a_i| = \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Případ dvou obecných dělení d a e úsečky u převedeme na předchozí případ pomocí společného zjemnění $d \cup e$.

1. Linearita integrálu plyne limitním přechodem z linearity Cauchyho sumy v proměnné f. 2. Odhady plynou limitním přechodem z hořejšího odhadu Cauchyho sumy. 3. Je-li p dělení úsečky $a'b'$ a q dělení úsečky $b'a''$, pak je zřejmě $p \cup q$ dělení úsečky $a'a''$, $C(f, p \cup q) = C(f,p) + C(f,q)$ a $\|p \cup q\| = \max(\|p\|, \|q\|)$. Limitní přechod vede na první identitu pro integrály. Druhá identita plyne limitním přechodem z rovnosti $C(f,p) = -C'(f,\overline{p})$, kde pro dělení $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ úsečky $a'a''$ je $\overline{p} = (a_k, a_{k-1}, \ldots, a_0)$ dělení úsečky $a''a'$, se stejnou normou. □

Pro ilustraci a z nutnosti spočteme z definice dva integrály, integrál obecné lineární funkce přes obecnou úsečku a integrál funkce $1/z$ přes hranici čtverce se středem v počátku. Oba výsledky budeme později potřebovat. Následující formule asi nikoho nepřekvapí.

Tvrzení 3.1.5 (integrál lineární funkce). *Jsou-li $a, b \in \mathbb{C}$ dva různé body a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, pak*

$$\int_{ab} (\alpha z + \beta) = \alpha \frac{b^2 - a^2}{2} + \beta(b - a) = g(b) - g(a),\ \ g(z) := \alpha \frac{z^2}{2} + \beta z\ .$$

Důkaz. Pro k-ekvidělení p_k úsečky ab zřejmě $C(1, p_k) = b - a$ a

$$\begin{aligned} C(z, p_k) &= \sum_{j=1}^{k} (a + j(b-a)/k) \frac{b-a}{k} = a(b-a) + \frac{(k+1)k(b-a)^2}{2k^2} \\ &= a(b-a) + (1 + 1/k)(b-a)^2/2\ . \end{aligned}$$

Pro $k \to \infty$ dostáváme $\int_{ab} 1 = b - a$ a $\int_{ab} z = \frac{b^2 - a^2}{2}$. Linearita integrálu podle části 1 věty 3.1.4 dává uvedený vzorec. □

Tvrzení níže představuje nedoceňovaný pilíř komplexní analýzy. Kdyby se totiž uvedený integrál anuloval, žádné Cauchyho vzorce (věta 3.2.2) by nebyly a komplexní analýza by se zhroutila.

Tvrzení 3.1.6 (integrál funkce $\frac{1}{z}$). *Nechť S je čtverec s vrcholy $\pm 1 \pm i$. Pak*

$$\rho := \int_{\partial S} \frac{1}{z} \neq 0\ ,$$

dokonce $\mathrm{Im}(\rho) \geq 4$.

Důkaz. Nyní $a = -1 - i$, $b = 1 - i$, $c = 1 + i$ a $d = -1 + i$ (kanonické vrcholy čtverce S). Uvažme k-ekvidělení p (resp. q) úsečky ab (resp. úsečky bc). Odpovídající Cauchyho sumy s funkcí $1/z$ jsou stejné:

$$C(1/z, p) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(b-a)/k}{a + j(b-a)/k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(ib-ia)/k}{ia + j(ib-ia)/k} = C(1/z, q)\ ,$$

protože $ia = b$ a $ib = c$ (rotace $\mathbb{C}$ kolem počátku o $\pi/2$). Ze stejného důvodu (rozšíření zlomku faktory -1 a $-i$) mají stejnou hodnotu i Cauchyho sumy pro $1/z$ a ekvidělení úseček cd a da. Z $(b - a = 2)$

$$C(1/z, p) = \sum_{j=1}^{k} \frac{2/k}{a + 2j/k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(2/k)(i - (2j/k - 1))}{(2j/k-1)^2 + 1}$$

máme

$$\mathrm{Im}(C(1/z, p)) = \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(2j/k-1)^2 + 1} \ge \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2} = 1$$

a totéž platí pro ostatní tří úsečky. Podle definice integrálu přes hranici obdélníka limitní přechod dává $\mathrm{Im}(\int_{\partial S} \frac{1}{z}) \ge 1 + 1 + 1 + 1 = 4$, a tak $\rho = \int_{\partial S} \frac{1}{z} \ne 0$. □

Mnoho čtenářů asi zná přesnou hodnotu této konstanty: $\rho = 2\pi i$. Pro důkaz tří základních vět komplexní analýzy ale stačí jenom vědět, že ρ není 0. Pro úplnost ji spočteme v tvrzení 3.3.22.

Než přejdeme ke stěžejnímu výsledku komplexní analýzy, uděláme malou odbočku k délce křivky. Sumu $C(f, p)$ v definici $\int_u f$ můžeme nahradit podobnou sumou (f je definovaná na úsečce $u = ab$ s dělením $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$)

$$L(f, p) := \sum_{i=1}^{k} |f(a_i) - f(a_{i-1})| \in [0, +\infty)\ .$$

Patrně je $L(f, p)$ délka $L(\ell)$ lomené čáry

$$\ell = (f(a)f(a_1),\ f(a_1)f(a_2),\ \ldots,\ f(a_{k-1})f(b))$$

(zde dovolujeme degenerované jednobodové úsečky) vepsané křivce $f(u)$ (přesněji, obrazu křivky $f \circ \varphi :\ [0, 1] \to \mathbb{C}$). Očekáváme, že pro $\|p_n\| \to 0$ jdou $L(f, p_n)$ k limitní hodnotě, kterou prohlásíme za délku křivky $f(u)$. Dokážeme to. Existenci limity veličin $C(f, p_n)$ jsme dokázali Cauchyovou podmínkou, viz důkaz věty 3.1.4. Pro $L(f, p_n)$ to tak ale nepůjde, protože teď může nastat i případ $L(f, p_n) \to +\infty$ (v oddílu 3.3 uvedeme příklad křivek s nekonečnou délkou).

Věta 3.1.7 (délka křivky podle Jordana). *Nechť u je úsečka a $f :\ u \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak pro každou posloupnost (p_n) dělení úsečky u splňující* $\lim \|p_n\| = 0$ *platí, že*

$$\lim_{n\to\infty} L(f, p_n) = \sup(\{L(f, p) \mid p \textit{ je dělení úsečky } u\})$$

a tato hodnota je nezáporné reálné číslo nebo $+\infty$.

Důkaz. Jsou-li $d \subset e$ dvě dělení úsečky u, pak podle úlohy 3.1.2 máme

$$L(f, e) \geq L(f, d) .$$

Pro důkaz uvedené rovnosti, včetně existence limity, stačí zřejmě přivést ke sporu následující situaci. Existuje taková posloupnost (d_n) dělení úsečky u s $\|d_n\| \to 0$ a takové její dělení $d = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$, že

$$\lim L(f, d_n) =: \alpha < \beta := L(f, d) .$$

Mějme tedy takovou (d_n) a takové d. Zvolíme $\varepsilon > 0$, že $2\varepsilon(k-1) < \frac{\beta-\alpha}{2}$. Protože f je dokonce stejnoměrně spojitá (tvrzení 1.3.27), můžeme vzít takové $\delta > 0$, že $c, c' \in u, |c - c'| < \delta \Rightarrow |f(c) - f(c')| < \varepsilon$. Konečně vezmeme tak velké $m \in \mathbb{N}$, že $\|d_m\| < \delta$, $L(f, d_m) < \frac{\beta+\alpha}{2}$ a $\|d_m\| < \min_{1 \leq i \leq k} |a_i - a_{i-1}|$ a uvážíme dělení $d_m \cup d$ úsečky u. Pak

$$L(f, d_m \cup d) \leq L(f, d_m) + (k-1)2\varepsilon < \beta$$

— lomená čára odpovídající $d_m \cup d$ obsahuje kromě (některých) úseček z lomené čáry odpovídající d_m už jen nanejvýš $2(k-1)$ nových úseček tvaru $f(b')f(a_i)$ a $f(a_i)f(b'')$, kde b', b'' jsou dva sousední body z d_m a a_i je bod z d ležící mezi nimi (který může být nejvýše jeden), a podle volby m jsou tyto kratší než ε. Což je spor, podle úvodní nerovnosti má být $L(f, d_m \cup d) \geq L(f, d) = \beta$. $\square$

Následující definice délky křivky je proto korektní.

Definice 3.1.8 (délka křivky). *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ je křivka v (komplexní) rovině. Její délkou $L(f)$ rozumíme hodnotu limity*

$$L(f) := \lim_{n \to \infty} L(f, p_n)$$

branou pro libovolnou posloupnost (p_n) dělení úsečky $[a, b]$ (kterou chápeme jako podmnožinu $\mathbb{C}$) s $\lim \|p_n\| = 0$. $L(f)$ je nezáporné reálné číslo nebo $+\infty$.

V oddílu 3.3 uvedeme nekonečně dlouhou křivku, alternativní definici délky a také paradox ukazující, že pro plochy a plošné obsahy přístup analogický této definici selhává. Než se vrátíme ke komplexní analýze, předložíme dvě úlohy o délkách křivek, které se nám budou později hodit.

Úloha 3.1.9 (aditivita délky). *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{C})$ je křivka a $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_k = b$ je dělení intervalu $[a, b]$. Pak*

$$L(f) = \sum_{i=1}^{k} L(f \mid [a_{i-1}, a_i]) .$$

Úloha 3.1.10. *Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C}$) je křivka s konečnou délkou a (I_n) je posloupnost uzavřených intervalů $I_n \subset [a,b]$ s $|I_n| \to 0$. Pak i*

$$\lim L(f \mid I_n) = 0 \ .$$

Druhá část věty níže představuje základní výsledek komplexní analýzy. Pro naše účely stačí obdélníková verze, obecnou uvádíme a dokážeme ve větě 3.4.2.

Věta 3.1.11 (Cauchyova pro obdélníky). *Nechť $R \subset \mathbb{C}$ je obdélník.*

1. *Když je funkce $f : \partial R \to \mathbb{C}$ lineární, pak $\int_{\partial R} f = 0$.*
2. *Když je funkce $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfní a $R \subset U$ (celý obdélník leží v U, ne jen jeho hranice), pak též $\int_{\partial R} f = 0$.*

Důkaz. 1. To plyne hned z tvrzení 3.1.5 a definice integrálu přes ∂R (a, b, c, d jsou kanonické vrcholy R a g je funkce uvedená v tvrzení 3.1.5):

$$\int_{\partial R} f = g(b) - g(a) + g(c) - g(b) + g(d) - g(c) + g(a) - g(d) = 0 \ .$$

2. Tento důkaz je moc hezký. Definujeme posloupnost obdélníků $R_0 = R \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots$, kde R_{i+1} vždy bude čtvrtka R_i. A, B, C, D buďte čtvrtky R. Podle části 3 věty 3.1.4 je

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial A} f + \int_{\partial B} f + \int_{\partial C} f + \int_{\partial D} f$$

(úloha 3.1.12) a podle trojúhelníkové nerovnosti je absolutní hodnota některého ze čtyř sčítanců alespoň $\frac{1}{4}|\int_{\partial R} f|$. Odpovídající čtvrtka pak je R_1. R_2 definujeme stejným způsobem, s R_1 v roli R, a stejně tak další R_i. Vzniklé obdélníky tak splňují, že

$$\left|\int_{\partial R_n} f\right| \geq \frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial R} f\right|, \ \mathrm{diam}(R_n) = \frac{\mathrm{diam}(R)}{2^n} \ \text{ a } \ |\partial R_n| = \frac{|\partial R|}{2^n} \ .$$

Podle věty 1.6.3 se protínají v jediném bodě, ležícím v U (teď potřebujeme, aby celý R ležel v U):

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n = \{z_0\}, \ z_0 \in U \ .$$

Rozepíšeme fakt, že $f'(z_0)$ existuje: pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že $B(z_0, \delta) \subset U$ a pro každé $z \in B(z_0, \delta)$ je $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \Delta(z)(z - z_0)$ s $|\Delta(z)| < \varepsilon$. Položíme $g(z) := f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ a $h(z) := \Delta(z)(z - z_0)$. Vezmeme $m \in \mathbb{N}$, že $R_m \subset B(z_0, \delta)$ a máme

$$\frac{1}{4^m}\left|\int_{\partial R} f\right| \leq \left|\int_{\partial R_m} f\right| = \left|\int_{\partial R_m} h\right| \leq |\partial R_m| \cdot \varepsilon \cdot \mathrm{diam}(R_m) \leq \frac{|\partial R|^2 \varepsilon}{4^m}$$

— první nerovnost opakuje nerovnost uvedenou výše, v druhé rovnosti jsme použili první část ($f = g + h$ a $\int_{\partial R_m} g = 0$), ve třetí nerovnosti jsme použili definici $h(z)$ a odhad části 2 věty 3.1.4 a v poslední nerovnosti jsme použili hořejší vzorec pro obvod R_n a nerovnost $\mathrm{diam}(R_m) \leq |\partial R_m|$. Tedy

$$\left| \int_{\partial R} f \right| \leq |\partial R|^2 \varepsilon$$

a nutně $\int_{\partial R} f = 0$. $\square$

Úloha 3.1.12. *Proč je integrál funkce přes hranici obdélníka roven součtu čtyř integrálů přes hranice jeho čtvrtek?*

3.2 Důkazy vět 3.0.5, 3.0.7 a 3.0.4

Funkcionál $\int$. Dva Cauchyho vzorce. Důkazy tří základních vět komplexní analýzy.

Jak nadepsáno, dokážeme věty 3.0.5, 3.0.7 a 3.0.4. Zavedeme komplexní funkcionál $\int$ (funkci na funkcích) pro funkce holomorfní na doplňcích kompaktů. Pro kompaktní množinu $A \subset \mathbb{C}$ položíme

$$H_A := \{f :\ \mathbb{C} \backslash A \to \mathbb{C} \mid f \text{ je holomorfní}\} \ \text{ a } \ H := \bigcup_{A \subset \mathbb{C} \text{ je kompaktní}} H_A \ .$$

Typicky (ale, jak uvidíme, ne vždy) je A konečná množina. Pro jednobodovou $A = \{a\}$ místo $H_{\{a\}}$ píšeme jednodušeji H_a. Definujeme

$$\int :\ H \to \mathbb{C},\ f \mapsto \int f := \int_{\partial R} f, \ \text{ kde } \ f \in H_A,\ A \subset \mathrm{int}(R) \ .$$

Je ovšem nutné ukázat, že $\int_{\partial R} f$ nezávisí na volbě obdélníka R.

Věta 3.2.1 (funkcionál $\int$). *Pro $f \in H_A$ a dva obdélníky R a S obsahující A ve svých vnitřcích je*

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial S} f \ .$$

Funkcionál $\int$ tak je korektně definován. Má následující vlastnosti.

1. *Linearita: pro $f, g \in H$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$. (Definičním oborem $\alpha f + \beta g$ je průnik definičních oborů f a g.)*

2. *Pokud $f \in H_a$ pro nějaký bod $a \in \mathbb{C}$ a f je omezená na nějakém okolí a, pak $\int f = 0$.*

3. *Pro každý bod $a \in \mathbb{C}$ je $\int 1/(z - a) = \rho \neq 0$ (konstanta z tvrzení 3.1.6).*

4. Když $f_n, f \in H_A$ pro $n \in \mathbb{N}$ a pro nějaký obdélník R s $A \subset \mathrm{int}(R)$ je

$$f_n \rightrightarrows f \quad \textit{na} \quad \partial R$$

(tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že $n > n_0, z \in \partial R \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$), potom $\lim \int f_n = \int f$.

Důkaz. Nechť nejprve $S \subset \mathrm{int}(R)$. Přímky prodlužující strany obdélníka S dělí R na S a osm dalších obdélníků $R_1, \ldots, R_8$, které leží v doplňku množiny A. Podle části 3 věty 3.1.4 a části 2 věty 3.1.11 tak ($\int_{\partial R_i} f = 0$)

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial R_1} f + \cdots + \int_{\partial R_8} f + \int_{\partial S} f = \int_{\partial S} f \ .$$

Pro obecné obdélníky R a S s $A \subset \mathrm{int}(R) \cap \mathrm{int}(S)$ uvážíme nepatrně zmenšený obdélník $R \cap S$ (průnik dvou obdélníků je zase obdélník, kdybychom pracovali třeba s kruhy, měli bychom problém), který označíme jako T. Patrně $A \subset \mathrm{int}(T)$ a $T \subset \mathrm{int}(R) \cap \mathrm{int}(S)$. Podle již vyřešeného případu

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial T} f = \int_{\partial S} f \ .$$

1. Plyne hned z části 1 věty 3.1.4. 2. Plyne z části 2 věty 3.1.4: pro R scvrkávající se k bodu a máme $|\partial R| \to 0$. 3. Plyne z tvrzení 3.1.6 jednoduchou změnou proměnné $t = z - a$. 4. Plyne opět z části 2 věty 3.1.4: nyní je R pevný, ale pro $n \to \infty$ máme $\max_{z \in \partial R} |f_n(z) - f(z)| \to 0$, takže $|\int (f_n - f)| \to 0$. □

Následující vzorce zachycují zvláštní a fascinující nelokálnost komplexní analýzy, která hodnotu $f(a)$ holomorfní funkce vyjadřuje hodnotami v bodech vzdálených od a.

Věta 3.2.2 (dva Cauchyho vzorce). *Funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ buď celá. Pro každý bod $a \in \mathbb{C}$ pak máme vzorce*

$$f(a) = \frac{1}{\rho} \int \frac{f(z)}{z-a} \quad a \quad f'(a) = \frac{1}{\rho} \int \frac{f(z)}{(z-a)^2}$$

(zde $\int$ je funkcionál z věty 3.2.1 a ρ je konstanta z tvrzení 3.1.6).

Důkaz. Skutečně, podle částí 1, 2 a 3 věty 3.2.1 máme rovnost

$$\int \frac{f(z)}{z-a} = \int \frac{f(z) - f(a)}{z-a} + \int \frac{f(a)}{z-a} = 0 + f(a)\rho \ ,$$

z níž hned plyne první Cauchyho vzorec. Odečtením prvních Cauchyho vzorců pro dva různé body $a, b_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, dostáváme vyjádření

$$\frac{f(a) - f(b_n)}{a - b_n} = \frac{1}{\rho} \int \frac{f(z)}{(z-a)(z-b_n)} \ .$$

Vezmeme posloupnost bodů $(b_n) \subset \mathbb{C}$ jdoucí k a s $b_n \neq a$. Pro $n \to \infty$ pak levá strana jde zřejmě k $f'(a)$, ale jaká je limita pravé strany? (No, taky $f'(a)$, ale to nám k ničemu není.) Uvážíme libovolný obdélník R obsahující body $A = \{a\} \cup \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ve svém vnitřku (je to kompaktní množina!). Z rovnosti

$$\frac{f(z)}{(z-a)(z-b_n)} - \frac{f(z)}{(z-a)^2} = \frac{f(z)(b_n - a)}{(z-a)^2(z-b_n)}$$

vidíme ($b_n \to a$, spojitá $|f(z)|$ je na kompaktu ∂R omezená a množina A má kladnou vzdálenost od ∂R), že

$$f_n(z) := \frac{f(z)}{(z-a)(z-b_n)} \rightrightarrows \frac{f(z)}{(z-a)^2} \ \text{ na } \ \partial R\,.$$

Podle části 4 věty 3.2.1 tak hořejší pravá strana pro $n \to \infty$ jde k

$$\frac{1}{\rho}\int \frac{f(z)}{(z-a)^2}$$

a druhý Cauchyho vzorec je dokázán. □

Důkaz věty 3.0.5. Nechť $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celá funkce, pro níž $|f(z)| \leq c$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ s nějakou reálnou konstantou $c > 0$, a $a, b \in \mathbb{C}$ jsou dva různé body. Pro každý čtverec S obsahující oba body ve svém vnitřku podle hořejší varianty prvního Cauchyho vzorce máme

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{1}{\rho}\int \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{\rho}\int_{\partial S} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\ .$$

Je-li $s > 0$ délka strany S, můžeme zřejmě S vzít tak, že $s \to +\infty$ a $|z - a|, |z - b| \geq s/3$ pro každé $z \in \partial S$ (úloha 3.2.3). Podle odhadu v části 2 věty 3.1.4 pak máme ($|\partial S| = 4s$)

$$\left|\frac{f(a) - f(b)}{a - b}\right| \leq \frac{|\partial S|c}{|\rho|(s/3)^2} = \frac{36c}{|\rho|s} \to 0,\ s \to +\infty\ .$$

Nutně $f(a) = f(b)$ a $f(z)$ je konstantní funkce. □

Úloha 3.2.3. *Jak zvolíme čtverec S, aby dva body uvnitř měly od hranice vzdálenost alespoň třetinu strany? Dala by se dosáhnout polovina?*

Důkaz věty 3.0.7. Spojitost komplexní derivace vyplývá z druhého Cauchyho vzorce stejným způsobem, jakým jsme ho odvodili. Nechť $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celá funkce, $a \in \mathbb{C}$ je libovolný bod a $(a_n) \subset \mathbb{C}$ je libovolná posloupnost jdoucí k a. Vezmeme libovolný obdélník R obsahující ve svém vnitřku kompakt $A = \{a\} \cup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Z rovnosti

$$\frac{f(z)}{(z-a_n)^2} - \frac{f(z)}{(z-a)^2} = \frac{f(z)(a_n + a - 2z)(a - a_n)}{(z-a_n)^2(z-a)^2}$$

opět vidíme (úloha 3.2.4), že

$$f_n(z) := \frac{f(z)}{(z-a_n)^2} \rightrightarrows \frac{f(z)}{(z-a)^2} \quad \text{na} \quad \partial R\,.$$

Podle druhého Cauchyho vzorce a části 4 věty 3.2.1 tak

$$\lim f'(a_n) = \lim \frac{1}{\rho}\int \frac{f(z)}{(z-a_n)^2} = \frac{1}{\rho}\int \frac{f(z)}{(z-a)^2} = f'(a)$$

a $f'(z)$ je v bodě a spojitá (podle Heineho definice spojitosti). □

Úloha 3.2.4. *Dokažte podrobně, že opět $f_n(z)$ konvergují na ∂R stejnoměrně k uvedené funkci.*

Důkaz věty 3.0.4. Celou funkci $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ rozvineme do mocninné řady se středem v počátku. Nechť $a \in \mathbb{C}$ je libovolný bod a pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$f_n(z) := f(z)\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{z^{k+1}}\,.$$

Položíme $A = \{0, a\}$ a vezmeme obdélník R obsahující A ve svém vnitřku, ale teď už ne úplně libovolný, ale dostatečně velký, aby ∂R měla od počátku vzdálenost větší než $|a|$. Pro $z \in \partial R$ pak máme

$$\left|f_n(z) - \frac{f(z)}{z-a}\right| = |f(z)| \cdot \left|\frac{1}{z}\frac{(a/z)^{n+1}-1}{a/z-1} - \frac{1}{z-a}\right| = |f(z)| \cdot \frac{(|a|/|z|)^{n+1}}{|a-z|}\,.$$

Na ∂R je faktor $|f(z)|$ omezený, $|a-z|$ je zdola odseknutý od 0 a $|a|/|z|$ je podle volby R shora odseknutý od 1, takže

$$f_n(z) \rightrightarrows \frac{f(z)}{z-a} \quad \text{na} \quad \partial R\,.$$

Podle prvního Cauchyho vzorce a částí 1 a 4 věty 3.2.1 tak platí rovnosti

$$f(a) = \int \frac{f(z)}{z-a} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\int \frac{f(z)}{z^{k+1}}\right) a^k$$

a tedy

$$f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k a^k, \quad \text{kde} \quad a_k := \int \frac{f(z)}{z^{k+1}} \in \mathbb{C}\,.$$

Koeficienty a_k jsou samozřejmě konstanty nezávislé na a. □

Tím jsou všechny tři věty 3.0.5, 3.0.7 a 3.0.4 dokázány. Stojí za to poznamenat, že zatímco ve druhém a třetím důkazu (a i v důkazu druhého Cauchyho vzorce) jsme integrovali přes pevný obdélník R a do nekonečna šlo n, první důkaz používá jiný argument, kdy do nekonečna běží samotný integrační čtverec S (podobně se mění integrační obdélník v důkazu části 2 věty 3.2.1).

3.3 Délky křivek, křivkový integrál a paradox plochy

Délka oblouku a nekonečně dlouhý oblouk. Lebesgueova definice délky křivky. Vzorec pro délku křivky. Cantorovy schody. Zobecněný Newtonův integrál. Křivkový integrál. Myslíte si, že umíte spočítat plochu povrchu válce?

Definice integrálu přes úsečku Cauchyho sumou $C(f,p)$ nás v oddílu 3.1 podnítila k příbuzné definici délky křivky sumou $L(f,p)$. V odbočce teď budeme nějakou dobu pokračovat a odvodíme několik základních výsledků o délkách křivek. Křivky jsou přirozenou součástí komplexní analýzy a tak velká odbočka to proto není. Pak zavedeme křivkový komplexní integrál a dokážeme několik souvisejících výsledků. Oddíl ukončíme paradoxem objevujícím se při definování plošných obsahů pomocí vepsaných trojúhelníků.

Dokážeme, že délka oblouku, což je prostá křivka, závisí jen na jeho obrazu a ne na samotném zobrazení.

Tvrzení 3.3.1 (délka obrazu oblouku). *Dva oblouky (pracujeme v $\mathbb{C}$)*

$$f:\ [a,b]\to\mathbb{C}\ \ \text{a}\ \ g:\ [c,d]\to\mathbb{C}$$

se shodnými obrazy $O := f([a,b]) = g([c,d])$ mají i shodné délky

$$L(f) = L(g)\ .$$

Důkaz. Zřejmě to platí pro speciální případ $[c,d] = [a,b]$ a $g(t) = f(a+b-t)$, kdy g vznikne z f pouze obrácením směru, kterým f obraz O probíhá (úloha 3.3.2). Můžeme tak předpokládat, že f a g probíhají O stejným směrem a homeomorfismus

$$h := g^{-1}(f):\ [a,b]\to[c,d]$$

je tak rostoucí funkce, která převádí každé dělení p intervalu $[a,b]$ na dělení $h(p)$ intervalu $[c,d]$. Nechť $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ splňují $\alpha < L(f)$ a $\beta < L(g)$. Podle věty 3.1.7 vezmeme $\varepsilon > 0$, že pro každé dělení p intervalu $[a,b]$ (resp. $[c,d]$) s $\|p\| < \varepsilon$ je $\alpha < L(f,p) \le L(f)$ (resp. $\beta < L(g,p) \le L(g)$). Protože h je stejnoměrně spojitá funkce (tvrzení 1.3.27), můžeme vzít takové dělení p intervalu $[a,b]$, že $\|p\| < \varepsilon$ i $\|h(p)\| < \varepsilon$. Ale podle definice h a délkové sumy $L(\cdot,\cdot)$ je

$$c := L(f,p) = L(g,h(p))\ .$$

Tedy $\alpha < c \le L(f)$ i $\beta < c \le L(g)$ a nutně $L(f) = L(g)$. □

Úloha 3.3.2. *Dokažte, že obrácením směru oblouku se jeho délka nezmění.*

Křivka se nazývá *rektifikovatelnou*, má-li konečnou délku. Nerektifikovatelnou křivku s nekonečnou délkou jsme už sestrojili ve větě 2.2.7 (úloha 3.3.3), ale teď uvedeme mnohem jednodušší příklad.

Úloha 3.3.3. *Ukažte, že Peanova křivka z věty 2.2.7 má nekonečnou délku.*

Tvrzení 3.3.4 (nekonečně dlouhý lomený oblouk). *Existuje, povolíme-li nekonečně mnoho úseček. Pro $n \in \mathbb{N}$ vezmeme (pracujeme pro změnu v $\mathbb{R}^2$) úsečky $u_n = (\frac{1}{n}, 0)(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ a $v_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})(\frac{1}{n+1}, 0)$ a uzávěr jejich sjednocení*

$$O := \{(0,0)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} u_n \cup v_n \subset \mathbb{R}^2 \ .$$

Pak existuje po (nekonečně mnoha) částech lineární oblouk $\ell : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ s obrazem O, který probíhá O od konce $(1,0)$ do konce $(0,0)$ a má délku $L(\ell) = +\infty$. Oblouk ℓ tak není rektifikovatelný.

Důkaz. Oblouk ℓ definujeme jako zobrazení posílající lineárně $[0, \frac{1}{2}]$ na u_1 (v této orientaci obou úseček), $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ na v_1, $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$ na u_2 a tak dále, a položíme též $\ell(1) = (0,0)$. Zobrazení ℓ je zjevně prosté a spojité a má obraz O, který probíhá směrem od $(1,0)$ do $(0,0)$. Pro dělení $p_n = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2n-1}{2n}, 1)$ intervalu $[0,1]$ máme

$$L(\ell, p_n) > |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \to +\infty,\ n \to \infty \ ,$$

takže $L(\ell) = +\infty$. □

H. Lebesgue radil měřit délku křivky následovně.

Věta 3.3.5 (délka křivky podle Lebesguea). *Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je křivka a*

$$M = \left\{ \lim_{n\to\infty} L(\gamma_n) \mid \gamma_n : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \text{ jsou lomené čáry s } \gamma_n \to f \text{ na } [a,b] \right\}$$

je množina limitních hodnot délek lomených čar bodově konvergujících k f. Pak M má minimum (pro $M = \{+\infty\}$ ho definujeme jako $+\infty$) a to je rovné délce křivky,

$$\min(M) = L(f) \ .$$

Důkaz. Každá posloupnost (p_n) dělení intervalu $[a,b]$ s $\|p_n\| \to 0$ určuje posloupnost (γ_n) lomených čar $\gamma_n : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ (vepsaných f) konvergujících, dokonce stejnoměrně, k f a podle věty 3.1.7 tak $L(f) \in M$. Pro spor předpokládejme, že existuje posloupnost (γ_n) lomených čar $\gamma_n : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ bodově konvergujících k f, že

$$M \ni \alpha := \lim_{n\to\infty} L(\gamma_n) < L(f) \ .$$

Vezmeme lomenou čáru $\ell : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ vepsanou f, která splňuje $\alpha < \beta := L(\ell) \le L(f)$ a odpovídá dělení $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_k = b$. Protože délka úsečky je spojitou funkcí jejích konců a $\gamma_n \to f$ na $[a,b]$, můžeme vzít n_0, že pro každé $n > n_0$ a každé $i = 1, 2, \ldots, k$ je $L(\gamma_n) < \frac{\alpha+\beta}{2}$ a

$$\big| |f(a_{i-1})f(a_i)| - |\gamma_n(a_{i-1})\gamma_n(a_i)| \big| < \frac{\beta-\alpha}{2k} \ .$$

Označíme-li úsek lomené čáry γ_n mezi body $\gamma_n(a_{i-1})$ a $\gamma_n(a_i)$ jako $\lambda_{n,i}$ (je to též lomená čára), podle úlohy 3.1.2 máme

$$L(\gamma_n) = \sum_{i=1}^{k} L(\lambda_{n,i}) \geq \sum_{i=1}^{k} |\gamma_n(a_{i-1})\gamma_n(a_i)| \ .$$

Tedy $L(\gamma_n)$ pro $n > n_0$ je alespoň

$$\sum_{i=1}^{k} |\gamma_n(a_{i-1})\gamma_n(a_i)| > \sum_{i=1}^{k} |f(a_{i-1})f(a_i)| - k\frac{\beta-\alpha}{2k} = \beta - \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

a dostali jsme spor. □

Věty 3.3.5 a 3.1.7 tak podávají minimaxovou či přesněji minisupremovou definici délky křivky:

> *Délka křivky je nejmenší limitní hodnota délek lomených čar ke křivce bodově konvergujících a také to je supremum délek lomených čar křivce vepsaných.*

Délku křivky $k : [a,b] \to \mathbb{C}$ a křivkový integrál funkce $f : U \to \mathbb{C}$ přes křivku $\gamma : [a,b] \to U$ lze počítat známými vzorci

$$\int_a^b |k'(t)| \, dt \quad \text{a} \quad \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \ ,$$

ale to nastoluje dvě otázky. Jednak, jaký druh integrálu pro reálnou funkci reálné proměnné použijeme (komplexní integrand v druhém integrálu se vyjádří jako lineární kombinace dvou reálných funkcí). Dále, i když $k(t)$ a $\gamma(t)$ jsou všude na $[a,b]$ definované, pro jejich derivace to nemusí neplatit. Musíme tedy nějak definovat integrál i pro funkce nedefinované v některých bodech $x \in [a,b]$. V případě délky křivky budeme pracovat s Riemannovým integrálem, probíraným v Matematické analýze II. Ten se jednoduše rozšíří na funkce nedefinované jen v konečně mnoha bodech (úloha 3.3.6).

Na straně čtenářky předpokládáme znalost teorie Riemannova integrálu, ale připomeneme *Lebesgueovu větu* (množina riemannovsky integrovatelných funkcí z $[a,b]$ do $\mathbb{R}$ se označuje jako $\mathcal{R}[a,b]$):

> *Funkce $f \in \mathcal{R}[a,b]$, právě když je f na $[a,b]$ omezená a skoro všude spojitá — množina jejích bodů nespojitosti má míru* 0.

Množina $X \subset \mathbb{R}$ má *míru* 0, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje posloupnost intervalů (I_n), že $X \subset I_1 \cup I_2 \cup \ldots$ a $|I_1| + |I_2| + \cdots < \varepsilon$.

Úloha 3.3.6. *Připomeňte si základní výsledky o Riemannově integrálu a ukažte: jsou-li $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ takové funkce, že $f(x) \neq g(x)$ pouze pro konečně mnoho $x \in [a, b]$, pak*

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff g \in \mathcal{R}[a, b] \quad a \quad \int_a^b f = \int_a^b g \ \textit{(existují-li)}\,.$$

Pro libovolnou funkci $f: [a, b] \backslash X \to \mathbb{R}$, kde $X \subset [a, b]$ je konečná, tak definujeme $f \in \mathcal{R}[a, b] \iff f_0 \in \mathcal{R}[a, b]$ pro libovolné rozšíření f_0 funkce f na celý interval $[a, b]$. Rozšířený Riemannův integrál funkce f přes $[a, b]$ pak je

$$\int_a^b f := \int_a^b f_0 \ \ \text{(existuje-li)}\,.$$

Podle úlohy 3.3.6 buď všechny integrály vpravo existují a mají stejnou hodnotu nebo žádný z nich neexistuje a pak ani $\int_a^b f$ není definovaný. Po těchto definicích uvedeme vzorec pro délku křivky vyjadřující ji integrálem normy derivace. Později ho rozšíříme na širší třídu křivek a ukážeme i hranice jeho platnosti.

Věta 3.3.7 (integrální vzorec pro délku křivky). *Nechť*

$$f = (f_1, f_2): [a, b] \to \mathbb{R}^2 \ (\mathbb{C})$$

je taková křivka, že derivace souřadnicových funkcí f_1 a f_2 jsou definované s možnou výjimkou konečně mnoha bodů a $f_1', f_2' \in \mathcal{R}[a, b]$. Pak je křivka f rektifikovatelná a má délku

$$L(f) = \int_a^b |f'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2}\, dt \ \ \textit{(rozšířený Riemannův $\textstyle\int$)}\,.$$

Důkaz. Vzorec dokážeme nejprve pro všude definované f_1' a f_2' a pak ho přeneseme i na případ ne všude definovaných derivací. Nechť $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_k = b$ je dělení intervalu $[a, b]$, pro $i = 1, 2, \ldots, k$ jsou $m_i, M_i, n_i, N_i \in \mathbb{R}$ po řadě infima a suprema hodnot funkcí f_1' a f_2' na intervalu $[a_{i-1}, a_i]$ a γ je lomená čára s body zlomu $f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_k)$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě máme, s označením $\delta_i := f_1(a_i) - f_1(a_{i-1})$ a $\Delta_i := f_2(a_i) - f_2(a_{i-1})$,

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^k \sqrt{\delta_i^2 + \Delta_i^2} = \sum_{i=1}^k (a_i - a_{i-1})\sqrt{f_1'(b_i)^2 + f_2'(c_i)^2},\ b_i, c_i \in (a_{i-1}, a_i)$$

(zde potřebujeme, aby f_1' a f_2' byly všude definované). Protože $|\sqrt{u^2+v^2} - \sqrt{w^2+x^2}| \leq |u-w| + |v-x|$ pro každé $u, v, w, x \in \mathbb{R}$ (úloha 3.3.8), máme odtud

$$\begin{aligned}\left|L(\gamma) - \sum_{i=1}^k (a_i - a_{i-1})|f'(a_i)|\right| \ \ &\leq \ \ \sum_{i=1}^k (M_i - m_i)(a_i - a_{i-1}) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^k (N_i - n_i)(a_i - a_{i-1})\,.\end{aligned}$$

Z $f_1', f_2' \in \mathcal{R}[a,b]$ plyne (podle Darbouxovy definice R. integrálu), že vhodná dělení učiní dvě sumy vpravo libovolně malými. Riemannova suma vlevo tedy jde k $L(\gamma)$ a

$$\int_a^b |f'(t)|\, dt = L(\gamma)\ .$$

Předpokládejme nyní, že f_1' a f_2' jsou definované s možnou výjimkou bodů $a \le b_1 < b_2 < \cdots < b_r \le b$. Pro každé dělení d intervalu $[a,b] = I_1 I_2 \ldots I_k$ (na uzavřené intervaly I_i s neprázdnými a disjunktními vnitřky) podle úlohy 3.1.9 máme vyjádření

$$L(f) = \sum_{i=1}^{k} L(f \,|\, I_i) = \sum_{I_i,\, b_j \in I_i} L(f \,|\, I_i) + \sum_{I_i,\, b_j \notin I_i} L(f \,|\, I_i) =: S_1 + S_2\ .$$

Podobně teorie R. integrálu dává

$$\int_a^b |f'(t)|\, dt = \sum_{I_i,\, b_j \in I_i} \int_{I_i} |f'(t)|\, dt + \sum_{I_i,\, b_j \notin I_i} \int_{I_i} |f'(t)|\, dt =: T_1 + T_2\ .$$

Podle první části důkazu $S_2 = T_2$. Zvolíme nyní posloupnost dělení d tak, že maximum délek intervalů I_i obsahujících některý bod b_j jde k 0. Pak $S_1 \to 0$ i $T_1 \to 0$ (obě sumy mají nejvýše $2r$ sčítanců a každý jde k 0), první podle úlohy 3.1.10 a druhé podle teorie R. integrálu. Tedy se levé strany rovnají a máme výše uvedený vzorec. $\square$

Úloha 3.3.8. *Dokažte nerovnost použitou v důkazu.*

Speciálním případem integrálního vzorce je vzorec pro délku grafu spojité funkce f z $[a,b]$ do $\mathbb{R}$, tedy obrazu oblouku $t \mapsto (t, f(t))$:

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt \quad \text{(rozšířený Riemannův } \textstyle\int)\ ,$$

pakliže $f' \in \mathcal{R}[a,b]$ (kde f' může neexistovat v konečně mnoha bodech). Jako příklad spočteme délku oblouku tvořeného horní jednotkovou polokružnicí $f(t) = \sqrt{1-t^2}$, $-1 \le t \le 1$:

$$L(f) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi\ .$$

Tento elegantní výpočet má ale malý problém: $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \notin \mathcal{R}[-1,1]$ vzhledem k neomezenosti (nedefinovanost integrandu v koncích -1 a 1 nevadí).

Úloha 3.3.9. *Opravte předchozí výpočet, aby stále používal integrální vzorec pro délku křivky a byl současně formálně správně.*

Následující úloha ukazuje, že se Riemannův integrál nedá rozšířit na funkce nedefinované ve spočetně mnoha bodech. (Brzy to ale dialekticky popřeme a rozšíření Riemannova integrálu na některé takové funkce zavedeme.)

Úloha 3.3.10. *Nechť $f \equiv 0: [0,1] \to \mathbb{R}$ je identicky nulová funkce. Nalezněte funkce $g, h: [0,1] \to \mathbb{R}$, které se hodnotami od f liší jen ve spočetně mnoha bodech a přitom (i) g je neomezená a se spočetnou množinou bodů nespojitosti a (ii) h je omezená a s množinou bodů nespojitosti rovnou $[0,1]$. Pak, podle Lebesgueovy věty (a úlohy 3.3.14), $g, h \notin \mathcal{R}[0,1]$, i když $f \in \mathcal{R}[0,1]$.*

Jako další příklad nalezneme délku oblouku $s: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ probíhajícího od konce $(0,1)$ do konce $(1,0)$ po částech lineárně schodiště (sestupující dolů z levého horního rohu jednotkového čtverce do pravého dolního)

$$S := \{(1,0)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} u_n \cup v_n \subset \mathbb{R}^2 ,$$

kde nyní $u_n = (\frac{2^n-2}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}})(\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}})$ a $v_n = (\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}})(\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{1}{2^n})$ jsou vodorovné a svislé na sebe navazující úsečky s délkou $\frac{1}{2^n}$. Narozdíl od tvrzení 3.3.4 je podle definice 3.1.8 oblouk s rektifikovatelný a úloha 3.3.11 dává

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = 2 .$$

Úloha 3.3.11. *Dokažte podle definice 3.1.8, že schodiště S, jež je obrazem oblouku s, má délku 2.*

Pokusíme se spočítat $L(s)$ integrálním vzorcem. Upřesněme souřadnicové funkce $s = (s_1, s_2): [0,1] \to [0,1]^2$. Interval $[0,1]$ rozdělíme na uzavřené intervaly $I_1 \le I_2 \le \dots$ s délkami po řadě $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \dots$ a popíšeme hodnoty funkcí $s_1, s_2: [0,1] \to [0,1]$ na nich. Funkce

$$s_1(x) = 2x - \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \;\text{ pro } x \in I_{2n-1} \text{ a } \; s_1(x) = \frac{2^n-1}{2^n} \text{ pro } x \in I_{2n}$$

a funkce

$$s_2(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \;\text{ pro } x \in I_{2n-1} \text{ a } \; s_2(x) = \frac{2^{n+1}-1}{2^n} - 2x \text{ pro } x \in I_{2n} .$$

Zde jsou podstatné pouze koeficienty 2 a -2 u x. Takže

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_0^1 \sqrt{s_1'(x)^2 + s_2'(x)^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{I_{2n-1}} \cdots\, dx + \int_{I_{2n}} \cdots\, dx \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{I_{2n-1}} \sqrt{2^2+0^2}\,dx + \int_{I_{2n}} \sqrt{0^2+(-2)^2}\,dx \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\,(|I_{2n-1}| + |I_{2n}|) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^{n+1}} = 2 \end{aligned}$$

— souhlasí!

Ale i tento výpočet délky křivky podle integrálního vzorce má své problémy. Ve druhé rovnosti jsme použili nekonečnou aditivitu vzhledem k integračnímu intervalu, která nepatří do úplně základního arzenálu Riemannova integrálu. Není ji však těžké dokázat.

Úloha 3.3.12. *Dokažte následující. Jsou-li $a < b$ reálná čísla, $f \in \mathcal{R}[a, b]$ a $a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots$ je rostoucí posloupnost s $\lim a_n = b$, potom pro každé $i = 1, 2, \ldots$ je $f(= f \mid [a_{i-1}, a_i]) \in \mathcal{R}[a_{i-1}, a_i]$ a*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f \ .$$

Závažnější problém ale představuje, že s_1' i s_2' jsou nedefinované ve spočetně mnoha bodech a podle úlohy 3.3.10 tak nemůžeme získat Riemannův integrál z $\sqrt{(s_1')^2 + (s_2')^2}$ jejich úplně libovolným dodefinováním, neomezenost funkce brání riemannovské integrovatelnosti.

Tvrzení 3.3.13 (rozšiřování Riemannova $\int$). *Funkce $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($a < b$ jsou reálná čísla) buďte omezené a množina*

$$X = \{x \in [a, b] \mid f(x) \neq g(x)\}$$

měj uzávěr $\overline{X} \subset [a, b]$ s mírou 0. Pak

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff g \in \mathcal{R}[a, b] \ \text{ a } \ \int_a^b f = \int_a^b g \ \text{(existují-li)} \ .$$

Důkaz. Nechť $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Podle Lebesgueovy věty má množina A bodů nespojitosti funkce f míru 0 (omezenost již předpokládáme). Je-li B množina bodů nespojitosti funkce g, je zřejmě $B \subset A \cup \overline{X}$ (každý bod $x \in [a, b]$ mimo toto sjednocení má okolí, na němž se g rovná f a je tedy spojitá v x, protože tam je spojitá f). Tedy i B má míru 0 a $g \in \mathcal{R}[a, b]$ podle Lebesgueovy věty. Stejný argument dokazuje i opačnou implikaci. Předpokládejme, že $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ a mějme posloupnost (p_n) dělení intervalu $[a, b]$, kde p_n má $k_n \in \mathbb{N}$ intervalků $I_{n,1}, I_{n,2}, \ldots, I_{n,k_n}$ a $\|p_n\| \to 0$. Protože X (dokonce $\overline{X}$) má míru 0, můžeme pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $j = 1, 2, \ldots, k_n$ vzít k_n-tici bodů $b_{n,j} \in I_{n,j}$, že vždy $b_{n,j} \notin X$ (množina míry 0 neobsahuje žádný interval s kladnou délkou — úloha 3.3.14). Riemannova suma pro f odpovídající $(p_n, b_{n,j})$ je tedy shodná se sumou pro g a podle vlastností Riemannova integrálu máme

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(b_j)|I_{n,j}| = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} g(b_j)|I_{n,j}| = \int_a^b g \ .$$

□

Úloha 3.3.14. *Ověřte, že žádný interval $[a, b]$ s $a < b$ nemá míru 0.*

Definice 3.3.15 (rozšířený Riemannův integrál). *Nechť $X \subset [a,b]$ ($a < b$ jsou reálná čísla) je uzavřená množina s mírou 0 a $f: [a,b]\backslash X \to \mathbb{R}$ je (omezená) funkce. Pak rozšířený Riemannův integrál f přes $[a,b]$ definujeme pomocí*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff f_0 \in \mathcal{R}[a,b] \quad a \quad \int_a^b f := \int_a^b f_0 \text{ (existuje-li)}\,,$$

kde $f_0: [a,b] \to \mathbb{R}$ je rozšíření f hodnotami $f_0(x) = 0$ pro $x \in X$.

Definice 3.3.16 (absolutní spojitost). *Funkce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a < b$ jsou reálná čísla) je absolutně spojitá, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro každý konečný systém po dvou disjunktních intervalů $[a_i, b_i] \subset [a,b]$, $1 \le i \le k$,*

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i - b_i| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} |f(a_i) - f(b_i)| < \varepsilon\,.$$

Věta 3.3.17 (obecný integrální vzorec pro délku křivky). *Nechť*

$$f = (f_1, f_2): [a,b] \to \mathbb{R}^2\ (\mathbb{C})$$

je absolutně spojitá křivka, derivace souřadnicových funkcí f_1 a f_2 jsou definované až na uzavřenou množinu míry nula a $f_1', f_2' \in \mathcal{R}[a,b]$. Pak je f rektifikovatelná a má délku

$$L(f) = \int_a^b |f'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2}\,dt \quad \text{(rozšířený Riemannův } \textstyle\int)\,.$$

Důkaz.

□

Předvedeme to na pozoruhodné funkci $f_C: [0,1] \to [0,1]$ *Cantorových schodů.*

Věta 3.3.18 (Cantorovy schody). *Funkce $f_C: [0,1] \to [0,1]$ Cantorových schodů je neklesající, spojitá, $f_C(0) = 0$, $f_C(1) = 1$ a*

$$L(f_C) = 2 > \int_0^1 \sqrt{1 + f_C'(t)^2}\,dt = 1 \quad \text{(zobecněný Riemannův } \textstyle\int)\,.$$

Důkaz.

□

Zdálo by se, že graf každé neklesající spojité funkce z $[0,1]$ do $[0,1]$ musí mít délku menší než 2 (je lehké dostat délky $2 - \varepsilon$, i pomocí jen lomených čar). Cantorovy schody ale mají délku 2, ovšem za cenu rozchodu délky křivky s hodnotou vypočtenou integrálním vzorcem.

Přejdeme konečně k definici křivkového komplexního integrálu.

Definice 3.3.19 (zobecněný Newtonův $\int$). *Nechť $X \subset (a,b)$ je konečná množina a $f:\ (a,b)\backslash X \to \mathbb{R}$ je funkce, která je vzhledem k nějakému dělení $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ intervalu $[a,b]$, kde $\{a_0, a_1, \ldots, a_k\} \supset X$, po částech spojitá (viz definice 2.4.1). Zobecněný Newtonův integrál funkce f přes $[a,b]$ pak definujeme vztahem*

$$\int_a^b f := \sum_{i=1}^{k} (g_i(a_i) - g_i(a_{i-1})\ ,$$

kde $g_i:\ [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$ je funkce primitivní ke spojitému rozšíření funkce f na $f:\ [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$.

Nyní popíšeme širokou a v praxi se hojně vyskytující třídu rektifikovatelných křivek. Připomeňte si definici 2.4.1 po částech hladké funkce. Rozšíříme ji na křivky.

Definice 3.3.20 (po částech hladká křivka). *Křivka*

$$f = (f_1, f_2):\ [a,b] \to \mathbb{R}^2$$

je po částech hladká, když existuje dělení $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ definičního intervalu, vzhledem k němuž jsou funkce f_1 i f_2 po částech hladké. Na komplexní křivky $f:\ [a,b] \to \mathbb{C}$ definici přeneseme tak, že klademe

$$f_1 = \mathrm{Re}(f) \quad a \quad f_2 = \mathrm{Im}(f)\ .$$

Protože křivka je spojité zobrazení, funkce f_1 i f_2 jsou navíc spojité (a vlastní limity $f(a+0)$, $f(b-0)$ a $f(a_i \pm 0)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k-1$ existují triviálně). Například každá lomená čára v $\mathbb{R}^2$ nebo v $\mathbb{C}$ je po částech hladká křivka.

Definice 3.3.21 (křivkový integrál). *Zobrazení ($a < b$ jsou reálná čísla)*

$$\gamma:\ [a,b] \to \mathbb{C} \quad a \quad f:\ \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$$

buďte po částech hladká křivka γ a spojitá funkce f. Integrál f přes γ definujeme jako

$$\begin{aligned} \int_\gamma f &:= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt \\ &:= \int_a^b \mathrm{Re}\left[f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\right]\ dt + i \int_a^b \mathrm{Im}[f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)]\ dt \end{aligned}$$

(zobecněné Newtonovy integrály).

Tvrzení 3.3.22 (konstanta $\rho = 2\pi i$). *Nechť S je čtverec s vrcholy $\pm 1 \pm i$. Pak*

$$\rho = \int_{\partial S} \frac{1}{z} = 2\pi i\ .$$

Důkaz. Pro $a = -1 - i$, $b = 1 - i$ a parametrizaci úsečky ab pomocí $\varphi(t) = (b - a)t + a$ máme

$$\begin{aligned}
\int_{ab} \frac{1}{z} &= \int_0^1 \frac{\varphi'(t)\,dt}{\varphi(t)} = 2\int_0^1 \frac{dt}{2t-1-i} = 2\int_0^1 \frac{2t-1+i}{(2t-1)^2+1}\,dt \\
&= 2\int_0^1 \frac{2t-1}{(2t-1)^2+1}\,dt + 2i\int_0^1 \frac{dt}{(2t-1)^2+1} = 2\cdot 0 + 2i\frac{\pi}{4} = \frac{\pi i}{2}\,.
\end{aligned}$$

Předposlední integrál se totiž anuluje, neboť graf integrandu je středově souměrný podle bodu $(\frac{1}{2}, 0)$, a poslední integrál je po substituci $t = \frac{u+1}{2}$ roven arcustangentovému integrálu

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{du}{u^2+1} = \frac{\arctan(1) - \arctan(-1)}{2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Z důkazu tvrzení 3.1.6 víme, že integrály přes ostatní tři strany S jsou stejné, takže $\int_{\partial S} \frac{1}{z} = 4\frac{\pi i}{2} = 2\pi i$. $\square$

Věta 3.3.23 (Schwarzův paradox plochy). *Uvažme výše popsanou válcovou plochu $V = V(r, h)$ a do ní vepsané trojúhelníkové plochy $P_{l,m}$. Pro každé reálné číslo $c \geq 2\pi rh$ i $c = +\infty$ existují takové posloupnosti $(l_n), (m_n) \subset \mathbb{N}$, že*

$$\lim l_n = \lim m_n = +\infty \quad a \quad \lim A(P_{l_n,m_n}) = c\,.$$

Obě posloupnosti lze volit i tak, že poslední limita neexistuje.

Důkaz.

3.4 Více o holomorfních funkcích

Bla

Věta 3.4.1 (komplexní primitivní funkce). *Nechť $U \subset \mathbb{C}$ je neprázdná, otevřená a omezená množina se souvislým doplňkem $\mathbb{C}\backslash U$ a $f : U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce. Pak existuje holomorfní funkce $g : U \to \mathbb{C}$, tak zvaná primitivní funkce k f, že na U platí*

$$g' = f\,.$$

Důkaz. Množinu U rozložíme na komponenty. Pak můžeme předpokládat, že U je navíc souvislá: primitivní funkce na jednotlivých komponentách tvoří celkovou primitivní funkci k f. Zvolíme pevně bod $z_0 \in U$ a $g(z)$ definujeme pro $z \in U$ jako

$$g(z) := \int_\gamma f\,,$$

kde $\gamma : [a,b] \to U$ je libovolná pravoúhlá lomená čára v U spojující bod z_0 s bodem z. Jako vždy je nejtěžší dokázat korektnost definice, nezávislost hodnoty $g(z)$ na volbě γ. Odložíme to na moment a spočteme pro pevnou γ derivaci $g'(z)$. Nechť $u \in U$ je poblíž z a pravoúhlá lomená čára $\zeta : [a,b'] \to U$, $b < b'$, vznikne prodloužením γ do u pomocí pravoúhlé lomené čáry $\eta : [b,b'] \to U$ s nejvýše dvěma úsečkami. Nechť $\theta : [b,b'] \to \mathbb{C}$ je primitivní funkce k η zajištěná tvrzením **??**. Pak

$$\frac{g(u)-g(z)}{u-z} = \frac{1}{u-z}\int_\eta f = \frac{1}{u-z}\int_b^{b'} f(\eta)\cdot\theta'(t)\,dt$$

□

Věta 3.4.2 (Cauchy, 1814). *Nechť $U \subset \mathbb{C}$ je neprázdná, otevřená a omezená množina se souvislým doplňkem $\mathbb{C}\backslash U$ a $f : U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce. Pak pro každou uzavřenou po částech hladkou křivku $\gamma : [a,b] \to U$ se integrál f přes γ anuluje,*

$$\int_\gamma f = 0\,.$$

Důkaz. Podle předchozí věty 3.4.1 má f na U primitivní funkci $g : U \to \mathbb{C}$. Tedy $f = g'$ na U a

$$\int_\gamma f = \int_a^b g'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (g(\gamma(t)))'\,dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = 0\,.$$

První rovnost plyne z definice křivkového integrálu a primitivnosti g, druhá z derivace složené funkce, třetí z definice křivkového integrálu pomocí Newtonova v oddílu 3.3 a poslední čtvtá z uzavřenosti γ. □

Pro neprázdnou otevřenou množinu $U \subset \mathbb{C}$ a její bod $a \in U$ vezmeme supremum

$$r = \sup(\{r' > 0 \mid B(a,r') \subset U\})\,.$$

Patrně je r kladné reálné číslo nebo $+\infty$. Otevřený kruh $B(a,r)$, s konvencí $B(a,+\infty) = \mathbb{C}$, nazveme *maximálním otevřeným kruhem (vzhledem k bodu a a množině U)*. Je to zřejmě otevřený kruh se středem a a největším možným poloměrem, který je ještě obsažený v U.

Úloha 3.4.3. *Dokažte to.*

Věta 3.4.4 (obecná analytičnost). *Funkce $f : U \to \mathbb{C}$ buď holomorfní. Pak pro každý maximální otevřený kruh $B(a,r) \subset U$ existuje taková posloupnost komplexních čísel $(a_0, a_1, \dots) \subset \mathbb{C}$, že pro každé $z \in B(a,r)$ je*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n\,.$$

Důkaz.

□

Důsledek 3.4.5 (princip maxima modulu). *Nechť $f : U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce. Pro každý bod $a \in U$ a každé $\delta > 0$ existuje bod $b \in U$, že*

$$0 < |a - b| < \delta \ \& \ |f(b)| \geq |f(a)|$$

— $|f|$ nemá žádné ostré lokální maximum.

Důkaz. Pro dané $a \in U$ a $\delta > 0$ rozvineme funkci v nějakém kruhu $B(a, r) \subset U$ do mocninné řady se středem a:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \quad \text{na} \quad B(a, r) .$$

Pokud jsou všechny koeficienty $a_1, a_2, \ldots$ nulové, je f na $B(a, r)$ (fakticky na celé komponentě množiny U obsahující a) konstantní a tvrzení zřejmě platí. Jinak si vzpomeneme na důkaz věty 1.3.29 a f na $B(a, r)$ napíšeme jako

$$f(z) = a_0 + a_k (z - a)^k + g(z) ,$$

kde $k \geq 1$, $a_k \neq 0$ a $g(z)$ je holomorfní funkce omezená poblíž a odhadem $g(z) = O((z - a)^{k+1})$. Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$ je nějaká k-tá odmocnina z a_0/a_k. Pro $b = a + \varepsilon\alpha$ s tak malým reálným $\varepsilon > 0$, že $b \in B(a, r)$, $0 < |a - b| < \delta$ a $|g(b)| < \varepsilon^k |f(a)|/2$ máme skutečně

$$\begin{aligned} |f(b)| &= |a_0 + a_0 \varepsilon^k + g(b)| = |f(a)(1 + \varepsilon^k) + g(b)| \\ &\geq |f(a)|(1 + \varepsilon^k) - |g(b)| \geq |f(a)| + |f(a)|\varepsilon^k/2 \\ &\geq |f(a)| . \end{aligned}$$

□

Definice 3.4.6 (singularita). *Mějme holomorfní funkci*

$$f : U \to \mathbb{C} \quad \textit{a bod} \quad s \in \partial U$$

na hranici definičního oboru. Bod s nazveme singularitou funkce f, když se f nedá holomorfně rozšířit na okolí bodu s: neexistuje taková holomorfní funkce $g : U' \to C$, $U' \supset U$, že g rozšiřuje f a $s \in U'$.

Věta 3.4.7 (dominantní singularita). *Předpokládejme, že mocninná řada s komplexními koeficienty*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ a_n \in \mathbb{C} ,$$

má kladný a konečný poloměr konvergence $R \in (0, +\infty)$. *Pak holomorfní funkce*

$$f:\ B(0,R) \to \mathbb{C}\ ,$$

daná jejím součtem, má na konvergenční kružnici $C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ *singularitu.*

Důkaz.

□

Obdobná věta platí i pro mocninné řady s obecným středem. Singularitě na konvergenční kružnici, která je tak ze všech singularit funkce f nejbližší k počátku, se říká *dominantní singularita (mocninné řady* $f(z)$*).* Dominantních singularit může být na C_R více (úloha 3.4.8), může se dokonce stát, že každý bod C_R je singularitou funkce f (C_R se pak nazývá *přirozenou hranicí funkce* f) — nemáme bohužel čas se více pouštět do jemných krás komplexní analýzy a mocninných řad.

Úloha 3.4.8. *Uveďte příklad mocninné řady s přesně* 100 *dominantními singularitami.*

Nicméně se do jedné takové jemnosti pustíme. Následující věta sice vypadá jako už dost speciální věc z teorie mocninných řad, ale pro aplikace komplexní analýzy v enumerativní kombinatorice se jedná o základní výsledek, který je nutné znát.

Věta 3.4.9 (Pringsheim, 1913). *Předpokládejme, že mocninná řada s nezápornými reálnými koeficienty*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ \ a_n \in [0, +\infty)\ ,$$

má kladný a konečný poloměr konvergence $R \in (0, +\infty)$. *Pak pro holomorfní funkci*

$$f:\ B(0,R) \to \mathbb{C}\ ,$$

danou jejím součtem, je sám poloměr konvergence $R \in C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ *singularitou.*

Důkaz.

□

Tato věta se nazývá většinou po německo-židovském matematikovi, hudebníkovi, mecenáši a sběrateli umění *Alfredu Pringsheimovi (1850–1941)* (narodil se v Ohlau v Pruském Slezsku, nynější Oławě v Polsku, v bohaté obchodnické rodině, zabýval se komplexní analýzou a působil na Mnichovské univerzitě, byl tchánem Thomase Manna, který ho ztvárnil v jedné z postav svého druhého románu *Königliche Hoheit*, dopisoval si s Richardem Wagnerem, jehož i finančně podporoval, žil nešťastně dlouho — v závěru života byl pronásledován a oloupen nacisty, dožil v emigraci v Curychu).

Důsledek 3.4.10 (log-der integrál). *Nechť $\gamma:\ [a,b]\to U$ je po částech hladký uzavřený oblouk, $U\subset\mathbb{C}$ je otevřená množina obsahující vnitřek $V:=\mathrm{int}(\gamma([a,b]))$ obrazu oblouku γ a $f:\ U\backslash M\to\mathbb{C}$ je meromorfní funkce, kde konečná množina $M\subset U$ je disjunktní s $\gamma([a,b])$. Pak platí pozoruhodná identita*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}=\sum_{a\in V,\, f(a)=0} n(a)-\sum_{a\in M} n(a)\in\mathbb{Z}\ ,$$

kde na pravé straně $n(a)\in\mathbb{N}_0$ v první sumě označují násobnosti nulových bodů a ve druhé násobnosti pólů.

Důkaz.

□

3.5 Algoritmická Základní věta algebry I: Weylův algoritmus

Formulace konstruktivní ZVA (s orákulem pro koeficienty). Její důkaz pomocí log-der integrálu. H. Weyl a L. J. E. Brouwer. Weylův algoritmus jako racionální algebraický program.

Dvakrát jsme dokázali ZVA (důsledky 1.3.31 a 3.0.6), že každý nekonstantní komplexní polynom (zde zjednodušený na monický) má kořen: ($d\in\mathbb{N}$)

$$\forall\, a_0,a_1,\dots,a_{d-1}\in\mathbb{C}\;\exists\,\alpha\in\mathbb{C}:\ \alpha^d+a_{d-1}\alpha^{d-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0=0\ .$$

Informatika, jímž autor trochu je, by měla napadnout otázka, zda se dá ZVA dokázat efektivně. Zde efektivní ZVA čtenáři předkládáme a pak ji vysvětlíme a dokážeme.

Věta 3.5.1 (Brouwer–de Loor–Weyl, 1924). *Nechť $d\in\mathbb{N}$ a monický komplexní polynom $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{d-1}z^{d-1}+z^d\in\mathbb{C}[z]$ stupně d je dán orákulem (algoritmem)*

$$\mathcal{A}:\ \mathbb{N}\to\mathbb{Q}[i]^d,\ \mathcal{A}(n)=(a_{0,n},\,a_{1,n},\,\dots,\,a_{d-1,n})\ ,$$

kde pro každé $n\in\mathbb{N}$ a $j=0,1,\dots,d-1$ je $|a_{j,n}-a_j|<\frac{1}{n}$. Pak lze vždy $\mathcal{A}$ efektivně předělat na algoritmus

$$\mathcal{B}:\ \mathbb{N}\to\mathbb{Q}[i],\ \mathcal{B}(n)=\alpha_n\ ,$$

aproximující nějaký kořen polynomu $p(z)$: existuje $\alpha\in\mathbb{C}$, že $p(\alpha)=0$ a pro každé $n\in\mathbb{N}$ je $|\alpha_n-\alpha|<\frac{1}{n}$.

Vševědoucí orákulum $\mathcal{A}$ (které je samo obvykle počítáno nějakým algoritmem) na požádání pro jakékoli $n \in \mathbb{N}$ poskytne koeficienty polynomu $p(z)$ s přesností $1/n$. Úkolem je na základě toho vymyslet algoritmus $\mathcal{B}$ (jenž chceme efektivně mít, ne jen vědět, že existuje), který podobně pro $n = 1, 2, \ldots$ počítá hodnoty přibližující se s přesností $1/n$ nějakému pevnému kořenu polynomu $p(z)$. Německý matematik, teoretický fyzik a filozof *Hermann Weyl (1885–1955)* (narodil se v Elmshornu poblíž Hamburku a zemřel v Curychu, působil v Göttingen a v IAS v Princetonu v USA, zabýval se základy matematiky, kalibračními teoriemi ve fyzice, teorií čísel (rovnoměrné rozložení), topologickými grupami (Peterova–Weylova věta) a mnohým jiným) o tom v [41, str. 143] napsal:

> Die Aufgabe ist: wenn die Koeffizienten der Gleichung
>
> $$y = f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$
>
> approximativ gegeben sind, die Wurzeln angenährt zu bestimmen – in solcher Weise, daß die Genauigkeit der Wurzelbestimmung mit unbegrenzt wachsender Genauigkeit der Koeffizienten gleichfalls schließlich jeden Grad überschreitet.[1]

Weylovi šlo o určení všech kořenů (Wurzeln), my se spokojíme s jedním. Všechny hodnoty zpracovávané $\mathcal{B}$ a $\mathcal{A}$ leží pochopitelně v oboru *zlomkových komplexních čísel* $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, neboť algoritmy mohou pracovat jen s konečnými objekty, a to obecné prvky $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ nejsou. Slovo „efektivně“ zde znamená „vypočítatelně, rekurzivně“. O efektivním hledání kořenů ve smyslu polynomiálních algoritmů se zmíníme v závěrečných poznámkách.

Idea algoritmu $\mathcal{B}$, inspirovaného Weylem [41], je tato. Pro aproximativně daný polynom $p(z)$ určíme obdélník $R \subset \mathbb{C}$ obsahující ve svém vnitřku všechny kořeny. Pak R rozdělíme svislou úsečkou u a vodorovnou úsečkou u' zhruba na čtvrtky a pomocí log–der integrálu (důsledek 3.4.10) mezi nimi nalezneme čtvrtku obsahující alespoň jeden kořen. Toto čtvrcení opakujeme a tím vytváříme posloupnost aproximací nějakého kořene. V dalším $p = p(z)$ označuje zadaný polynom a $q = q(z)$ jeho aproximace poskytované orákulem $\mathcal{A}$. Podívejme se na podrobnosti.

Důkaz věty 3.5.1 pomocí log–der integrálu $\int_\gamma p'/p$

První obtíž, kterou musíme překonat, je, že pokud některá ze čtvrtících úseček u a u' vede blízko nějakého kořene, nejsme schopni vzhledem k $p(z)$ ve jmenovateli přesně odhadnout log–der integrál. Potřebujeme úsečku, kde modul $|p(z)|$ není nikdy příliš malý.

Tvrzení 3.5.2 (odražení $p(z)$ od nuly). *Nechť $R \subset \mathbb{C}$ je obdélník s kanonickými vrcholy a, b, c, d, šířkou $s > 0$ a výškou $v > 0$ a $p \in \mathbb{C}[z]$ je monický*

[1] Úloha zní: jsou-li dány koeficienty rovnice $y = f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ přibližně, požaduje se přibližně určit kořeny — takovým způsobem, že přesnost určení kořenů s neomezeně vzrůstající přesností koeficientů taktéž nakonec překročí každou mez.

polynom stupně $n \in \mathbb{N}$. Uvažme v R $n+1$ svislých úseček

$$u_j := ad + \frac{s}{2(n+1)} + \frac{js}{n+1},\ j = 0, 1, \ldots, n$$

— dolní stranu ab obdélníka R rozdělíme na $n+1$ stejných částí a uprostřed každé z nich vztyčíme kolmici u_j vedoucí až k horní straně cd. Pak existuje $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, že pro každé $z \in u_j$ máme odhad

$$|p(z)| \ge \left(\frac{s}{2(n+1)}\right)^n .$$

Analogický odhad platí pro vodorovné úsečky u_j (v definici u_j místo ad píšeme ab a místo s píšeme iv a v odhadu se s nahradí v).

Důkaz. Jako $P_j \subset \mathbb{C}$ označíme svislý pás šířky $\frac{s}{n+1}$, jehož osou je prodloužení úsečky u_j, a kořeny $p(z)$ označíme jako $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (opakujeme je podle násobností). Hledané $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ je to, že uvnitř P_j neleží žádný kořen α_i (takové j existuje, protože pásů je víc než kořenů a jejich vnitřky jsou disjunktní). Pak pro každé $z \in u_j$ skutečně máme

$$|p(z)| = \prod_{k=1}^{n} |z - \alpha_k| \ge \prod_{k=1}^{n} s/2(n+1) = (s/2(n+1))^n .$$

Podobně pro pro vodorovné úsečky u_j. □

Máme tak úsečku, na níž modul $|p(z)|$ není nikdy příliš malý. Ale je třeba ji umět efektivně poznat. Jak, to ukazuje následující tvrzení. Pro libovolný polynom $q \in \mathbb{C}[z]$ označíme jako $\|q\|$ — *norma polynomu* — maximum z absolutních hodnot jeho koeficientů. Pro reálné $r > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ si zavedeme veličinu

$$m_{q,n,r} := (n+1)\|q\| \max(1, r^n) .$$

Vyskytuje se v tomto jednoduchém ale důležitém odhadu: když $z \in \mathbb{C}$ s $|z| \le r$ a $q \in \mathbb{C}[z]$ má stupeň nejvýše n, tak

$$|q(z)| \le m_{q,n,r} .$$

Úloha 3.5.3. *Proč toto platí?*

Patrně $m_{q,n,r} \ge 0$, pro pevné r, n z $\|q\| \to 0$ plyne $m_{q,n,r} \to 0$ a $m_{q,n,r}$ je neklesající v n.

Tvrzení 3.5.4 (rozpoznání dobré úsečky). *Nechť $u \subset B(0, r)$ je komplexní úsečka obsažená v kruhu s poloměrem $r > 0$ a středem v počátku, $c > 0$ je reálné číslo, $p, q \in \mathbb{C}[z]$ jsou dva polynomy stupně $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ je číslo a $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ je k-ekvidělení úsečky u. Pak*

$$(\forall\, z \in u: \ |p(z)| \ge c) \Rightarrow (\forall\, z \in u: \ |q(z)| \ge c - m_{p-q,n,r})$$

a, opačným směrem, $(\forall\, j = 0, 1, \ldots, k:\ |q(a_j)| \geq c)$ *implikuje*

$$\forall\, z \in u:\ |p(z)| \geq c - \frac{n|u|m_{q,n,r}}{k} - m_{p-q,n,r}\ .$$

Důkaz. První implikace plyne z trojúhelníkové nerovnosti $c \leq |p(z)| \leq |q(z)| + |p(z) - q(z)|$ $(z \in u)$ a odhadu v úloze 3.5.3. Druhá plyne z trojúhelníkové nerovnosti

$$c \leq |q(a_j)| \leq |q(a_j) - q(z)| + |q(z) - p(z)| + |p(z)|$$

s $z, a_j \in u$ splňujícími $|z - a_j| \leq \frac{|u|}{k}$. Druhou absolutní hodnotu vpravo odhadneme shora jako dříve. Pro odhad první si napíšeme

$$q(a_j) - q(z) = \sum_{i=0}^{n} b_i(a_j^i - z^i) = (a_j - z)\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{k=0}^{i-1} a_j^k z^{i-k-1}\ .$$

Tedy $|q(a_j) - q(z)| \leq \frac{|u|}{k} n m_{q,n,r}$ a druhá implikace je dokázána. □

Nakonec odhadneme rozdíl mezi log-der integrály polynomů $p(z)$ a $q(z)$, kde druhý integrál pochopitelně pouze aproximujeme Cauchyho sumou $C(q'/q, d)$. Pro zjednodušení odhadů si od čtenářky necháme jeden pomocný odvodit.

Lemma 3.5.5. *Nechť* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ *s* $|\alpha - \gamma| < a$, $|\beta - \delta| < b$ *a* $|\beta|, |\delta| > c$, *kde* $a, b, c > 0$ *jsou reálná čísla. Pak*

$$\left|\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta}\right| \leq \frac{|\alpha| \cdot b + |\beta| \cdot a}{c^2}\ .$$

Úloha 3.5.6. *Dokažte předchozí nerovnost.*

Tvrzení 3.5.7 (aproximace log-der integrálu). *Nechť* $u \subset B(0, r)$ *je komplexní úsečka obsažená v kruhu s poloměrem* $r > 0$ *a středem v počátku,* $c > 0$ *je reálné číslo,* $p, q \in \mathbb{C}[z]$ *jsou polynomy stupně* $n \in \mathbb{N}$, *přičemž* $|p(z)|, |q(z)| > c$ *pro každé* $z \in u$, $k \in \mathbb{N}$ *je číslo a* $d = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ *je* k*-ekvidělení úsečky* u. *Pak*

$$\left|\int_u \frac{p'(z)}{p(z)} - C(q'/q, d)\right| < \frac{(n+1)^3|u|}{c^2}\left(m_{p,n,r}m_{p-q,n,r} + \frac{m_{q,n,r}^2|u|}{k}\right)\ .$$

Důkaz. Podle trojúhelníkové nerovnosti a definice $C(q'/q, d)$ je absolutní hodnota vlevo nejvýše

$$\left|\int_u \left(\frac{p'(z)}{p(z)} - \frac{q'(z)}{q(z)}\right)\right| + \sum_{j=1}^{k}\left|\int_{a_{j-1}a_j} \frac{q'(z)}{q(z)} - \frac{q'(a_j)}{q(a_j)}(a_j - a_{j-1})\right|\ .$$

Pro $z \in u$ je $|p'(z)-q'(z)| \le n m_{p-q,n,r}$, $|p(z)-q(z)| \le m_{p-q,n,r}$, $|p(z)|, |q(z)| > c$ a $|p'(z)|, |p(z)| \le (n+1) m_{p,n,r}$. Podle lemmatu 3.5.5 a M-L odhadu integrálu tak první absolutní hodnota je nejvýše

$$\frac{(n+1)^2 m_{p,n,r} m_{p-q,n,r}}{c^2} |u| \; .$$

Pro odhad sumy přes j položíme $f(z) := \frac{q'(z)}{q(z)}$, j-tý sčítanec odhadneme jako

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_{j-1}a_j} f - f(a_j)(a_j - a_{j-1}) \right| &= \left| \int_{a_{j-1}a_j} (f - f(a_j)) \right| \\ &\le \max_{z \in a_{j-1}a_j} |f(z) - f(a_j)| \cdot |u|/k \end{aligned}$$

a odhadneme $|f(z) - f(a_j)|$. Protože $|z - a_j| \le \frac{|u|}{k}$, podle závěru důkazu tvrzení 3.5.4 máme $|q'(z) - q'(a_j)| \le \frac{|u|}{k} n^2 m_{q,n,r}$ a $|q(z) - q(a_j)| \le \frac{|u|}{k} n m_{q,n,r}$. Jako výše máme $|q(z)|, |q(a_j)| > c$ a $|q'(z)|, |q(z)| \le (n+1) m_{q,n,r}$. Podle lemmatu 3.5.5 a definice $f(z)$ tak

$$|f(z) - f(a_j)| \le \frac{(n+1)^3 m_{q,n,r}^2}{kc^2} |u| \; .$$

Po vynásobení členy $|u|/k$ a k a sečtení s prvním odhadem dostáváme výsledný odhad. □

Pustíme se do vlastního důkazu věty 3.5.1, popisu algoritmu $\mathcal{B}$ a důkazu jeho správnosti. Jsou dány monický polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ stupně $d \in \mathbb{N}$, jehož kořen chceme efektivně aproximovat, a orákulum $\mathcal{A}$ vydávající aproximace koeficientů $p(z)$. Efektivně sestrojíme indukcí kladné konstanty $r \in \mathbb{Q}$ a $(c_0, c_1, \dots) \subset \mathbb{Q}$ a do sebe zařazené obdélníky $R_0 \supset R_1 \supset \dots$ s vrcholy v $\mathbb{Q}[i]$ a s $R_0 \subset B(0,r)$, že (i) vždy $|p(z)| \ge c_m$ pro každé $z \in \partial R_m$, (ii) uvnitř každého R_m leží alespoň jeden kořen polynomu $p(z)$ a (iii) $|\partial R_m| \le \frac{2}{3} |\partial R_{m-1}|$ pro každé $m \in \mathbb{N}$. Tento postup poskytuje hledaný algoritmus $\mathcal{B}$: pro dané $n \in \mathbb{N}$ vezmeme tak velké $m \in \mathbb{N}$, že $|\partial R_m| < \frac{1}{n}$ a hodnotu $\mathcal{B}(n) = \alpha_n$ položíme rovnou třeba levému dolnímu rohu R_m. Pak číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ dané v

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} R_m = \{\alpha\}$$

(věta 1.6.3) splňuje, že $|\alpha_n - \alpha| < \frac{1}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a že je kořenem $p(z)$, protože je limitou posloupnosti kořenů a $p(z)$ je spojitá funkce.

Postup inicializujeme pro $m = 0$. Požádáme orákulum o $q = q(z) := \mathcal{A}(1)$, položíme $a := d(\|q\| + 1) + 1 \ge 3$, $r := 2a$ a R_0 bude čtverec s vcholy $\pm a \pm ai$. Patrně R_0 a všechny následující obdélníky a úsečky v nich jsou obsažené v $B(0,r)$. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ s $|\mathrm{Re}(z)| \ge a$ nebo $|\mathrm{Im}(z)| \ge a$ je ($\|q\| > \|p\| - 1$)

$$|p(z)| \ge |z|^d - d\|p\| \cdot |z|^{d-1} \ge a^{d-1}(a - d\|p\|) > a^{d-1} \ge 3^{d-1} \; .$$

Položíme tedy $c_0 := 3^{d-1}$. Podmínky (i) a (ii) tak jsou v tomto inicializačním kroku splněny, R_0 dokonce ve svém vnitřku obsahuje všechny kořeny $p(z)$ (a alespoň jeden podle ZVA existuje).

Předpokládejme, že jsme již udělali krok $m \in \mathbb{N}_0$. Ukážeme, jak přejít na úroveň $m+1$. Nechť $s, v > 0$ jsou šířka a výška obdélníka R_m ($s, v \in \mathbb{Q}$). R_m rozdělíme svisle na tři stejně široké obdélníky a prostřední z nich označíme jako R. Na R a polynom $p(z)$ použijeme tvrzení 3.5.2. Mezi $d+1$ tam popsanými úsečkami $u_1, u_2, \ldots, u_{d+1}$ se nalézá úsečka u_j, pro níž platí

$$z \in u_j \Rightarrow |p(z)| \geq \left(\frac{s/3}{2(d+1)}\right)^d =: r_1 \ .$$

Podle první implikace v tvrzení 3.5.4 pro libovolný jiný polynom $q \in \mathbb{C}[z]$ stupně d platí

$$z \in u_j \Rightarrow |q(z)| \geq r_1 - m_{p-q,d,r} \ .$$

Veličina $m_{\ldots}$ je explicitně definovaná výše a spolu s první proměnnou jde k 0. Můžeme tedy efektivně najít tak velké $n \in \mathbb{N}$, že pro orákulem poskytnutý polynom $q = q(z) := \mathcal{A}(n)$ je $m_{p-q,d,r} \leq r_1/3$ a odhad přejde na $|q(z)| \geq 2r_1/3$. Pro tento polynom q a jakoukoli úsečku $u \in \{u_1, u_2, \ldots, u_{d+1}\}$ (a daný polynom p) použijeme druhou implikaci v tvrzení 3.5.4 a dostaneme, že

$$z \in u \Rightarrow |p(z)| \geq 2r_1/3 - \frac{d|u|m_{q,d,r}}{k} - m_{p-q,d,r} \geq r_1/3 - \frac{2drm_{q,d,r}}{k} \ ,$$

pakliže $|q(b)| \geq 2r_1/3$ pro každý bod b z k-ekvidělení úsečky u. Fixujeme efektivně tak velké $k \in \mathbb{N}$, že dolní odhad přejde na $|p(z)| \geq r_1/4$.

Nyní efektivně nalezneme mezi úsečkami $u_1, u_2, \ldots, u_{d+1}$ úsečku $u_{j'}$, na níž $|p(z)| \geq r_1/4$. Pro zvolené k každou z úseček u_i rozdělíme k-evidělením d_i (jejich body leží v $\mathbb{Q}[i]$) a v každém z $(k+1)(d+1)$ bodů $b \in d_i$ otestujeme, zda $|q(b)| \geq 2r_1/3$ (kde $q = \mathcal{A}(n)$). Pak $u_{j'}$ bude ta u_i, že $|q(b)| \geq 2r_1/3$ pro každý bod $b \in d_i$. Podle úvahy výše taková u_i existuje (a můžeme ji tak nalézt) a podle další úvahy výše a volby k pro každé $z \in u_i = u_{j'}$ pak je $|p(z)| \geq r_1/4$. (Nemáme zaručeno, že $j' = j$, a nemůžeme tak dedukovat silnější odhad $|p(z)| \geq r_1$, ale to nám nevadí.) Efektivně jsme tak nalezli svislou čtvrtící úsečku $u := u_{j'}$, na níž $|p(z)| \geq r_1/4$. Tato úsečka leží v prostřední svislé třetině obdélníka R_m.

Úplně podobně efektivně nalezneme vodorovnou čtvrtící úsečku u', ležící v prostřední vodorovné třetině obdélníka R_m, na níž $|p(z)| \geq r_1'/4$, kde r_1' vznikne z r_1 výměnou s za v. Položíme

$$c_{m+1} := \min(c_m,\, r_1/4,\, r_1'/4) \ .$$

Nechť C je libovolná ze čtyř čtvrtek, na něž u a u' dělí R_m. Patrně $|p(z)| \geq c_{m+1}$ na každé straně obdélníka C. Spočteme přibližně $I_C := \int_{\partial C} p'/p$. Pro to zvolíme efektivně tak veliká $k_1 \in \mathbb{N}$ a $n_1 \in \mathbb{N}$, že za prvé podle první implikace v tvrzení 3.5.4 pro $q = \mathcal{A}(n_1)$ na každé straně obdélníka C máme $|q(z)| \geq c_{m+1}/2$ a za druhé s $q = \mathcal{A}(n_1)$, $k = k_1$ a $c = c_{m+1}/2$ je odhad na pravé straně nerovnosti v tvrzení 3.5.7 (tam je u libovolná ze stran C, d její k_1-ekvidělení a n stupeň polynomů p a q) menší než, řekněme, $\frac{1}{12}$. Integrál I_C aproximujeme součtem $S \in \mathbb{Q}[i]$ čtyř Cauchyho sum odpovídajících funkci q'/q a k_1-ekvidělením čtyř stran čtvrtky C. Vzniklá chyba je menší než $4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ a z S tak poznáme, zda číslo $I_C \in \mathbb{N}_0$, rovnající se podle důsledku 3.4.10 počtu kořenů (vzatých s násobnostmi) polynomu $p(z)$ uvnitř C, je 0 nebo ne. Položíme

$$R_{m+1} := C, \ \text{ když } |S| \ge \tfrac{2}{3} \ (\iff I_C \ge 1)\ .$$

Požadavky (i)–(iii) našeho postupu jsou těmito volbami c_{m+1} a R_{m+1} zjevně splněny. Tím je tedy konstruktivní Základní věta algebry dokázána. □

Jedním z jejích autorů je holandský matematik a filozof *Luitzen E. J. Brouwer (1881–1966)* (zakladatel intuicionismu, narodil se poblíž Rotterdamu, zemřel před svým domem sražen automobilem, zabýval se topologií (věta 1.5.14), teorií míry a komplexní analýzou).

3.6 Algoritmická Základní věta algebry II: Túránův algoritmus

*Algebraický program (racionální operace plus odmocniny).*eroh@uwosh.edu

3.7 Použití komplexní analýzy

3.8 Poznámky a další úlohy

Oddíl 3.1.

Oddíl 3.2.

Oddíl 3.3. Za náhled, že pro definici křivkového komplexního integrálu plně postačuje Newtonův integrál, který je koncepčně mnohem jednodušší než Riemannův či Lebesgueův, na něž se většina učebnic komplexní analýzy mechanicky odvolává, vděčím skriptům Veselého [40]. Další definice křivkových integrálů lze nalézt v Kopáčkovi [17].

Oddíl 3.4.

Oddíl 3.5. O díle a životě L. E. J. Brouwera napsali Kreisel a Newman v [20]. Obsáhlou biografii [9] sepsal van Dalen.

Oddíl 3.6.

Oddíl 3.7.

Návody k řešení skoro všech úloh

Úloha 1.1.2.

Úloha 1.1.11. Plyne z tr. nerovnosti pro absolutní hodnotu v $\mathbb{R}^1$.

Úloha 1.1.12. Nejprve pro tři různé kolineární body ukážeme (krajní posuneme do počátku), že tr. nerovnost platí jako rovnost. Pak pro tři různé nekolineární body A, B, C v trojúhelníku ABC spustíme výšku z vrcholu na protilehlou stranu a uvážíme dva vzniklé pravoúhlé trojúhelníky, v nichž tr. nerovnost platí díky Pythagorově větě. Z toho odvodíme tr. nerovnost pro ABC. Současně plyne, že tr. nerovnost platí jako rovnost, právě když jsou dané tři body kolineární.

Úloha 1.1.20. Když $f \equiv 0$ na $[0, 1]$ a $g \equiv 0$ na $(0, 1]$ a $g(0) = 1$, pak $d_p(f, g) = 0$, i když $f \neq g$.

Úloha 1.3.6. Stačí si uvědomit, že $B_B(f(a), \varepsilon) = B_N(f(a), \varepsilon) \cap B$.

Úloha 1.1.9. Třeba: $X \subset M$ je omezená, právě když $X = \emptyset$ nebo existuje $a \in X$ a $r > 0$, že $X \subset B_X(a, r)$.

Úloha 1.4.3. S_2 je kompaktní, ale $[a, b)$ ne.

Úloha 1.4.18. S_2 je spojitý obraz intervalu.

Úloha 1.4.19. Prostor $S_2 \backslash \{a\}$ je souvislý pro každé $a \in S_2$.

Úloha 1.4.20. Nehomeomorfnost intervalů různých typů dokažte podobným obratem jako v předchozí úloze. Homeomorfismy pro intervaly stejného typu lze snadno volit lineární.

Úloha 1.4.21. Nezáporné reálné číslo má každou odmocninu, záporné má pouze liché.

Úloha 1.5.2. Když $u = ab$ a b je konec O, pak existuje takový trojúhelník Δ s vrcholem v a, že $u \backslash \{a\} \subset \mathrm{int}(\Delta)$ a $\Delta \cap O = u$. Obchůzka jde po $\partial\Delta$.

Úloha 1.5.4. Selže, právě když ℓ_a prochází právě jedním ze dvou konců O. V a pak f není lokálně konstantní.

Úloha 1.5.5. Předně, $\ell_{a'}$ neprotíná úsečku O, kterou by už neprotínala ℓ_a. Pro transverzální b je $k^{-1}(b)$ průsečík $\ell_{a'}$ s úsečkou O obsahující b. Pro netransverzální b je(jsou) $k^{-1}(b)$ průsečík(y) $\ell_{a'}$ s dvěma sousedními úsečkami O obsahujícími b.

Úloha 1.5.6. Jako a vezměte bod nad O ve směru s. Jako a' vezměte vhodný bod poblíž s-nejvyššího bodu O.

Úloha 1.5.7. Každá uzavřená lomená křivka obsahuje uzavřený lomený oblouk.

Úloha 1.5.13. Součet stupňů je dvakrát počet hran. Ve skupině lidí si pár dvojic podá ruce a .... Platí to i pro multigrafy, přispívá-li každá smyčka ke stupni dvěma body.

Úloha 3.0.3. Protože funkce vyjádřená součtem mocniné řady má derivace všech řádů.

Úloha 3.0.8. Opět, funkce vyjádřená součtem mocniné řady má derivace všech řádů.

Úloha 3.1.9. Uvažte společná zjemnění lomených čar vepsaných f a vepsaných křivkám $f \mid [a_{i-1}, a_i]$.

Úloha 3.1.10. Lomenou čáru vepsanou f, s dosti krátkými úsečkami a délkou zdola dosti těsně aproximující $L(f)$, zkombinujte s lomenými čarami vepsanými $f \mid I_n$, $n \to \infty$, a s délkami $\geq c > 0$. Vyrobte tak lomenou čáru vepsanou f s délkou $> L(f)$ — spor.

Úloha 3.3.9. Místo na $[-1, 1]$ pracujeme na intervalech $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ a pak $\varepsilon > 0$ pošleme k 0.

Úloha 3.3.10. Například $g(1/n) = n$ a jinak $g(x) = 0$, $h(x) = 1$ pro racionální x a jinak $h(x) = 0$.

Úloha 3.4.3. Pro každé $z \in B(a, r)$ existuje poloměr $s < r$, že $z \in B(a, s)$.

Literatura

[1] A. Blake, A Boolean derivation of the Moore-Osgood theorem, *J. Symb. Logic* **11** (1946), 65–70.

[2] V. Blåsjö, The isoperimetric problem, *Amer. Math. Monthly* **112** (2005), 526–566.

[3] L. E. J. Brouwer, Intuitionistische Ergänzung des Fundamentalsatzes der Algebra, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proc.* **27** (1924), 631–634.

[4] L. E. J. Brouwer und B. de Loor, Intuitionistischer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proc.* **27** (1924), 186–188.

[5] R. B. Burckel, Fubinito (immediately) implies FTA, *Amer. Math. Monthly* **113** (2006), 344–347.

[6] A. L. Cauchy, Mémoire sur les intégrales définies, 1814; publikováno v *Mémoires présentés par divers savans à l'Académie Royale des Sciences* **1** (1827), 601–799.

[7] P. Čechová, *Základní věta algebry a její důkazy*, diplomová práce, Masarykova univerzita, Brno, 2013.

[8] I. Černý, *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.

[9] D. van Dalen, *L. E. J. Brouwer—topologist, intuitionist, philosopher. How mathematics is rooted in life*, Springer, London, 2013.

[10] B. Dejon and P. Henrici (editoři), *Constructive aspects of the fundamental theorem of algebra: proceedings of a symposium conducted at the IBM Research Laboratory, Zürich-Rüschlikon, Switzerland, June 5–7, 1967*, Wiley-Interscience, London, 1969.

[11] O. Dovgoshey, O. Martio, V. Ryazanov and M. Vuorinen, The Cantor function, *Expo. Math.* **24** (2006), 1–37.

[12] K. Gödel, Über die metrische Einbettbarkeit der Quadrupel des R_3 in Kugelflächen, *Ergeb. math. Kolloq. Wien* **4** (1933), 16–17.

[13] J. Jost, *Postmodern Analysis*, Springer, Berlin, 2005.

[14] H. Kneser, Der Fundamentalsatz der Algebra und der Intuitionismus, *Math. Z.* **46** (1940), 287–302.

[15] M. Kneser, Ergänzung zu einer Arbeit von Hellmuth Kneser über den Fundamentalsatz der Algebra, *Math. Z.* **177** (1981), 285–287.

[16] N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, Springer, New York, 1996.

[17] J. Kopáček, *Integrály*, MATFYZPRESS, Praha, 2008.

[18] J. Kopáček, *Matematická analýza nejen pro fyziky (IV)*, MATFYZPRESS, Praha, 2010.

[19] L. Koudela, *O pojetí křivky*, OPS, Kanina, 2013.

[20] G. Kreisel and M. H. A. Newman, Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966), *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* **15** (1969), 39–68.

[21] G. Kuba, Counting metric spaces, *Archivum Mathematicum (Basel)* **97** (2011), 569–578.

[22] P. D. Lax and L. Zalcman, *Complex proofs of real theorems*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[23] L. Liberti and C. Lavor, Six mathematical gems from the history of distance geometry, *Intl. Trans. in Op. Res.* **23** (2016), 897–920.

[24] L. Lomtatidze, *Historický vývoj pojmu křivka*, vydaly Nadace Universitas v Brně, Akademické nakladatelství CERM v Brně a Česká matematická společnost, Brno, 2006.

[25] S. Marcus, *Matematická analýza čtená podruhé*, Academia, Praha, 1976. Z rumunského originálu „Noţiuni de analiză matematică, originea, evoluţia si semnificaţia lor“ vydaného nakladatelstvím Editura ştiintifică, Bucureşti 1965 přeložil RNDr. Bohdan Zelinka, CSc.

[26] T. Needham, *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press, Oxford, 1997.

[27] I. Netuka, *Základy moderní analýzy*, MATFYZPRESS, Praha, 2014.

[28] Ch. Ch. Pugh, *Real Mathematical Analysis*, Springer, Berlin, 2002.

[29] A. Pultr, *Podprostory euklidovských prostorů*, SNTL — Nakladatelství technické literatury, n. p., Praha, 1986.

[30] T. Radó, The isoperimetric inequality and the Lebesgue definition of surface area, *Trans. Amer. Math. Soc.* **61** (1947), 530–555.

[31] P. L., Robinson, The sphere is not flat, *Amer. Math. Monthly* **113** (2006), 171–173.

[32] P. C. Rosenbloom, An elementary constructive proof of the fundamental theorem of algebra, *Amer. Math. Monthly* **52** (1945), 562–570.

[33] W. Rudin, *Analýza v reálném a komplexní oboru*, Academia, Praha, 2003. Z třetího anglického vydání *Real and Complex Analysis* přeložili prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc., a doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc.

[34] S. L. Segal, *Nine introductions in complex analysis*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2008 (druhé revidované vydání prvního vydání z r. 1981).

[35] Š. Schwabik, *Integrace v $\mathbb{R}$ (Kurzweilova teorie)*, Univerzita Karlova v Praze[1] – nakladatelství Karolinum, Praha, 1999.

[36] S. Smale, The fundamental theorem of algebra and complexity theory, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **4** (1981), 1–36.

[37] F. Smithies, *Cauchy and the Creation of Complex Function Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.

[38] E. Specker, The fundamental theorem of algebra in recursive analysis, 321–329. V [10].

[39] P. Turán, Power sum method and the approximative solution of algebraic equations, *Math. Comp.* **29** (1975), 311–318.

[40] J. Veselý, *Komplexní analýza pro učitele*, Univerzita Karlova v Praze[2] – nakladatelství Karolinum, Praha, 2000.

[41] H. Weyl, Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik, *Math. Zeitschrift* **20** (1924), 131–150.

[42] F. Zames, Surface area and the cylinder area paradox, *Coll. Math. Jour.* **8** (1977), 207–211.

[43] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis II*, Springer, Berlin, 2004.

[2] Již jen historický název, uvedený ve statutu UK schváleném Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy v dubnu 1999. Nový status UK, platný od 1. 1. 2017, zavedl kratší název„Univerzita Karlova“.

V následujícím rejstříku jsou **základní pojmy** tohoto kurzu analýzy vyznačeny tučným fontem a definice či vysvětlení pojmu *číslem strany* v kurzívě. Většinou neuvádíme všechny výskyty klíčových slov, jen definiční a pár dalších. Vynasnažili jsme se ale zaznamenat všechna zmíněná místa a zeměpisné celky a, pro podtržení lidské dimenze matematiky, i všechny explicitně zmíněné osoby, ať skutečné či fiktivní.

Rejstřík