MATEMATICKÁ ANALÝZA I

(Učební text — předběžná verze, leden 2019)

Martin Klazar

Věnováno památce
Jiřího Matouška (1963–2015)

Obsah

Předmluva

Tato učebnice bohatě pokrývá předmět *Matematická analýza I (NMAI054)*, který učím v Informatické sekci Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy od školního roku 2004/05. Text je proložen více než 400 úlohami, někdy zábavnými, a návody k řešení skoro všech naleznete na konci od strany 268. Představu o obsahu a stylu podávají Obsah, Úvod a závěrečný Rejstřík (od strany 304). Učebnice vychází z konkrétní přednášky v zimním semestru školního roku 2014/15, viz Obsah přednášek a zkouška. Nejprve jsem skutečně začal psát „skripta“ k přednášce, časem se ale mé ambice zvýšily a text přerostl do rozsáhlejší učebnice matematické analýzy, v níž, doufejme, najde něco zajímavého a nového každý. Věnuji ji památce Jiřího Matouška, mého kolegy z Katedry aplikované matematiky a kdysi i učitele, který se s velkým zaujetím a nadšením připravoval na přednášku z analýzy v zimním smestru školního roku 2014/15, ale osud rozhodl jinak. Snažil jsem se proto, aby byla důstojná jeho památky jako jednoho z našich největších soudobých matematiků a informatiků, a také abych se za ni nemusel stydět v silné konkurenci nejrůznějších učebnic analýzy v českém, slovenském, anglickém i jiném jazyce.

prosinec 2018 Martin Klazar

Obsah přednášek a zkouška

Učebnice obsahuje množství doplňujícího materiálu, o němž se nepředpokládá, že by kromě zmínek byl podrobně přednášen. Pro orientaci a zajímavost proto uvádím skutečný obsah přednášky v r. 2014, převzatý z

`http://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI14.html`.

`Zápisy z přednášek` jsou odkazy na texty, které byly studentům k dispozici a tvoří základ pro tuto učebnici.

1. přednáška 3. 10. 2014. Organizační poznámky. Úvod, opakování. Nekonečné sumy a paradoxy kolem nich. Co je to funkce? — prostá, na atd. Důkazy, dva příklady: Bernoulliova nerovnost (důkaz indukcí), iracionalita čísla $2^{1/2}$ (důkaz sporem nebo taky vlastně indukcí). O reálných číslech pořádně až příště. `Zápis z 1. přednášky.`

2. přednáška 10. 10. 2014. Reálná čísla. Reálná čísla jako nekonečné desetinné rozvoje. Supremum a infimum, věta o supremu v $\mathbb{R}$, neplatí ve $\mathbb{Q}$. Existence $2^{1/2}$ v $\mathbb{R}$ jako důsledek věty o supremu. `Zápis z 2. přednášky.`

3. přednáška 17. 10. 2014. Důsledek suprema: Cantorova věta o intervalech. Nespočetnost $\mathbb{R}$. Velmi stručně: Cantorova a Dedekindova konstrukce $\mathbb{R}$. **Limita nekonečné posloupnosti.** Definice vlastní i nevlastní limity, jednoznačnost limity. Příklad: $\lim n^{1/n} = 1$. `Zápis ze 3. přednášky.`

4. přednáška 24. 10. 2014. Věta o monotónní posloupnosti, důkaz. Podposloupnost, tvrzení o limitě podposloupnosti, důkaz jako úloha. Tvrzení o aritmetice limit, důkaz. Příklad s rekurentní posloupností $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n/2 + 1/a_n$. Tvrzení o limitě a uspořádání, důkaz. Věta o 2 policajtech, důkaz. `Zápis ze 4. přednášky.`

5. přednáška 31. 10. 2014. Dvě základní limity, $\lim n^a$ a $\lim q^n$. Věta o monotónní podposloupnosti, důkaz. Bolzanova - Weierstrassova věta, důkaz. Cauchyovské posloupnosti a Cauchyho podmínka, důkaz. Aritmetika nekonečen, neurčité výrazy, rozšířená aritmetika limit, bez důkazu. Limes inferior a limes superior posloupnosti, dvě ekvivalentní definice, na přednášce bez důkazu, ale v `zápisu z 5. přednášky` s důkazem.

6. přednáška 7. 11. 2014. Nekonečné řady. Základní definice. Poznámky o značení nekonečných řad. Příklady řad. Tvrzení o podmínkách konvergence řad, důkaz. Geometrická řada a $\zeta(s)$. Absolutní konvergence, implikuje obyčejnou, důkaz. Leibnizovo kritérium (neabsolutní) konvergence, důkaz. Lineární kombinace řad, necháno jako úloha. `Zápis ze 6. přednášky.`

7. přednáška 14. 11. 2014. Abelovo a Dirichletovo kritérium, bez důkazu. Důkaz, že $\zeta(s)$ pro $s > 1$ konverguje, zobecňuje ho Cauchyovo kondenzační kritérium. Srovnávací kritérium, důkaz. Srovnání s geometrickou řadou: odmocninové a podílové kritérium, důkazy. Přerovnání řad. Riemannova věta o přerovnání neabsolutně konvergentní řady, naznačení důkazu. Věta o přerovnání absolutně konvergentní řady, důkaz příště. `Zápis ze 7. přednášky.`

8. přednáška 21. 11. 2014. Důkaz věty o přerovnání absolutně konvergentní řady. Abs. konvergentní řady s libovolnou (spočetnou) množinou indexů. Násobení abs. konv. řad, bez důkazu. Exponenciální funkce. Exponenciála jako součet nekonečné řady. Tvrzení: $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$, důkaz. Tvrzení: $\lim\,(1 + x/n)^n = \exp(x)$, důkaz. Poznámka o logaritmu jako inverzní funkci k $\exp(x)$. Funkce $\sin x$ a $\cos x$ z exponenciály pomocí nekonečných řad. `Zápis z 8. přednášky.`

9. přednáška 28. 11. 2014. Limita funkce v bodě a spojitost funkce. Okolí bodu, prstencové, jednostranné. Limita funkce v bodě a je A, a a A mohou být i nekonečno. Poznámky a příklady k této definici. Jednostranná limita funkce v bodě. Spojitost funkce v bodě. Tvrzení o jednoznačnosti limity funkce, důkaz. Heineho definice limity funkce v bodě, důkaz. Tvrzení o aritmetice limit funkcí, bez důkazu. Tvrzení o limitě monotónní funkce, důkaz. `Zápis z 9. přednášky.`

10. přednáška 5. 12. 2014. Tvrzení o limitě funkce a uspořádání, bez důkazu. Tvrzení o limitě složené funkce, důkaz. Funkce spojité na intervalu. Darbouxova věta o mezihodnotách, důkaz. Princip maxima, důkaz. Tvrzení o spojitosti inverzní funkce, bez důkazu. Třídy spojitých funkcí: polynomy, racionální funce, exponenciála, goniometrické funkce, ... `Zápis z 10. přednášky.`

11. přednáška 12. 12. 2014. Poznámka o lipschitzovských funkcích (podtřída spojitých). **Derivace funkce.** Definice, poznámky, příklady. Geometrický význam derivace: určuje tečnu. Tvrzení: vlastní derivace implikuje spojitost, důkaz. Tvrzení o aritmetice derivací, důkaz pouze Leibnizovy formule. Tvrzení o derivaci složené funkce, bez důkazu. Stejně tak pro tvrzení o derivaci inverzní funkce. Přehled derivací elementárních funkcí: příště. Definice extrémů funkce. Tvrzení: v a s $df/dx(a) = 0$ není lokální extrém, důkaz. Příklady. Formulace vět o střední hodnotě: Rolleova a Lagrangeova, důkazy příště. `Zápis z 11. přednášky.`

12. přednáška 19. 12. 2014. Důkazy vět o střední hodnotě. L'Hospitalovo pravidlo pro výpočet limit neurčitých výrazů, bez důkazu. Tvrzení (jednostranná derivace jako jednostranná limita derivace), bez důkazu. Věta (derivace a monotonie), důkaz. Přehled derivací elementárních funkcí. Derivace vyšších řádů. Konvexní a konkávní funkce. Tvrzení (konv., konk. $\Rightarrow\ \exists\, f'_{\pm}$), bez důkazu. Důsledek: konv., konk. funkce je spojitá. Věta (konv., konk. a f''), bez důkazu. Inflexní bod. Tvrzení ($f'' \neq 0 \Rightarrow$ není inflexe), bez důkazu. Tvrzení (postačující podmínka inflexe), bez důkazu. `Zápis z 12. přednášky.`

13. přednáška 9. 1. 2015. Taylorův polynom, Věta (charakterizace T. polynomu), důkaz. Věta (obecný tvar zbytku T. polynomu) a Lagrangeův a Cauchův tvar zbytku, bez důkazu. Taylorova řada funkce. Taylorovy řady (se středem v 0) několika elementárních funkcí: $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(1+x)$, $\log(1-x)$, $\log(1-x)^{-1}$, $(1+x)^a$, $\arctan x$. Poznámka: koeficienty v T. řadě funkce $\tan(x)+\sec(x)$ počítají střídavé permutace (což jsou ty permutace $a_1, a_2, \ldots, a_n$ čísel $1, 2, \ldots, n$, že $a_1 < a_2 > a_3 < \ldots$). `Zápis ze 13. přednášky.`

Každá přednáška trvala 90 minut. Požadavky ke zkoušce byly následující, převzato z

`http://kam.mff.cuni.cz/~klazar/zkMAI14.txt`.

Informace o zkoušce z Matematické analýzy I (NMAI054), ZS 2014/15

Zkoušející: Martin Klazar

Termíny zkoušek: 16. 1., 23. 1., 30. 1. 9. 2. a 12. 2. (2015). Eventuální další termíny budou vyhlášeny později. Přihlašování na zkoušku v SISu.

Na tyto termíny se mohou zapisovat pouze studenti z mé paralelky I/1-I1X'P (kruhy 31–34). Výjimky jsou možné jen po domluvě.

Získání zápočtu je nutnou (a prakticky i postačující) podmínkou připuštění ke zkoušce. Bez uděleného zápočtu, zapsaného v SISu, nebude student ke zkoušce připuštěn. Zápočet uděluje cvičící. Typickou podmínkou pro udělení zápočtu může být účast v zápočtové písemce (+ zisk stanoveného minima bodů).

Zkouška se skládá ze dvou písemek: (i) 90 min. zápočtová písemka na cvičení v posledním týdnu semestru, popř. později, na prověření početní techniky, se 4 příklady (příklady okruhů: limita posloupnosti, limita funkce, nekonečná řada, určení spojitosti/výpočet derivace, průběh funkce), a (ii) 90 min. písemka na zkoušce se 4 příklady na prověření teorie.

U žádné z písemek není dovoleno používat ani písemné materiály (záznamy z přednášek, učebnice atd.) ani technické pomůcky (laptopy, mobily, kalkulačky atd.), pouze tužku, papír a vlastní hlavu. Výjimky v případě hendikepovaných studentů povoluje zkoušející.

Okruhy příkladů v písemce na zkoušce:

1. Početní příklad jako v zápočtové písemce (limita posloupnosti nebo limita funkce nebo nekonečná řada nebo určení spojitosti/výpočet derivace nebo průběh funkce).
2. Jedna až dvě otázky z okruhů A níže (základní pojmy a definice).
3. Jedna otázka z okruhů B níže (věty a výsledky bez důkazů).
4. Jedna otázka z okruhů C níže (věty s důkazy).

Příklady 2 a 3 budou obsahovat doplňující otázky ověřující porozumění danému pojmu či definici či větě.

Hodnocení zkoušky

Písemka na cvičení: maximálně 16 bodů (zpravidla 4 body za příklad).
Písemka na zkoušce: maximálně 24 bodů (zpravidla 6 bodů za příklad).
Celkem lze tedy získat z obou písemek maximálně 40 bodů.

0–19 bodů = „neprospěl(a)“
20–26 bodů = „dobře“
27–33 bodů = „velmi dobře“
34–40 bodů = „výborně“.

Výsledky budou oznámeny po opravení písemek, zpravidla týž den. V nerozhodných a sporných případech může zkoušející položit doplňující ústní otázky.

Okruhy otázek pro zkouškovou písemku

A — základní pojmy a definice

1. (shora, zdola) omezená množina (posloupnost, funkce), supremum a infimum množiny reálných čísel.
2. podposloupnost, (ne)rostoucí, (ne)klesající, monotonní, konstantní posloupnost.
3. (vlastní a nevlastní) limita posloupnosti, (prstencové, jednostranné) okolí bodu, cauchyovská posloupnost.
4. řada, (částečný) součet řady, konvergentní a divergentní řady, absolutní konvergence řad, Cauchyova podmínka pro řady.
5. (lokální, globální, ostré) maximum a minimum funkce na množině.

6. (jednostranná, nevlastní) limita funkce v bodě a (jednostranná) spojitost funkce v bodě, spojitost na intervalu.

7. (jednostranná) derivace funkce v bodě, derivace vyšších řádů.

8. (ryze) konvexní a (ryze) konkávní funkce, inflexní bod.

9. Taylorův polynom a Taylorova řada funkce.

B — věty, tvrzení a výsledky bez důkazů

1. Základní vlastnosti reálných čísel (nespočetnost, úplnost — existence suprema, vlastnost vnořených intervalů).

2. Základní vlastnosti limit posloupností (jednoznačnost l., l. a monotonie, podposloupnost a l., věta o monotónní podp., B.–W. věta, l. a cauchyovskost).

3. Vztahy mezi uspořádáním, resp. aritmetickými operacemi, a limitou posloupnosti: l. a uspořádání, věta o 2 policajtech, l. a aritmetické operace).

4. Kritéria konvergence řad (Leibnizovo kr., srovnávací kr., Cauchyovo odmocninové kr., d'Alembertovo podílové kr.).

5. Konvergence a součet dvou nejdůležitějších řad (geometrická řada a řada $1^s + 2^s + 3^s + \dots$).

6. Kritéria neabsolutní konvergence řad (Abelovo a Dirichletovo kr.).

7. Věty o přerovnání řad (rozdíl mezi přerovnáváním absolutně a neabsolutně konvergentní řady). Násobení abs. konv. řad (nekonečný distributivní zákon).

8. Exponenciální funkce (definice řadou, převádí součet na součin, def. sinu a cosinu řadou)

9. Základní vlastnosti limit funkcí (Heineho definice limity, l. funkce a aritmetické operace, l. funkce a uspořádání).

10. Výsledky o limitě a skládání, resp. monotonii, funkcí (l. funkce a skládání funkcí, l. funkce a monotonie funkce).

11. Vlastnosti funkcí spojitých na intervalu (Darbouxova věta o nabývání mezihodnot, princip maxima pro spojité funkce, spojitost inverzní funkce).

12. Základní výsledky o derivacích a jejich počítání (derivace a spojitost, aritmetika derivací, derivace a složené funkce, derivace a inverzní funkce, též přehled derivací elementárních funkcí).

13. Výsledky o souvislosti monotonie funkce a jejích extrémů s derivací (d. a lokální extrém funkce, d. a monotonie funkce).

14. Věty o střední hodnotě a jejich aplikace (Rolleova a Lagrangeova věta o střední hodnotě, l'Hospitalovo pravidlo).

15. Věty o derivaci a konvexitě/konkavitě (... ...).

16. Taylorův polynom (Věta charakterizující T. polynom a dva tvary zbytku Taylorova polynomu, Taylorovy řady základních elementárních funkcí a jejich konvergence).

C — věty s důkazy

Reálná čísla.
1. Cantorova věta o vnořených intervalech.
2. Nespočetnost množiny $\mathbb{R}$.
3. Dokažte, že odmocnina ze tří je iracionální číslo.

Posloupnosti.
4. Výsledky o limitě monotónní posloupnosti a o limitě podposloupnosti.
5 Věta o monotónní podposloupnosti.
6. Bolzanova–Weierstrassova věta.
7. Konvergence a cauchyovskost.

Řady.
8. Podmínka konvergence řady a vztah mezi absolutní konvergencí a konvergencí.
9. Leibnizovo kritérium konvergence.
10. Konvergence a součet geometrické řady.
11. Odmocninové kritérium konvergence.
12. Podílové kritérium konvergence.
13. Věta o přerovnání abs. konvergentní řady.

Limita funkce, spojité funkce.
13. Heineho definice limity.
14. Darbouxova věta (Věta 3.7) a
15. Princip maxima.

Derivace funkce.
16. Věty o střední hodnotě.
17. Věta o derivaci funkce a monotonii.
18. Charakterizace Taylorova polynomu.

Vzorová písemka na zkoušce

Odpovědi zdůvodněte!

1. Spočtěte limitu $\lim_{x\to+\infty} x^2(\log(1+1/x) - \sin(1/x))$.

2. Definujte pojmy: nekonečná řada, částečný součet řady, součet řady, konvergentní řada, divergentní řada, absolutně konvergentní řada, Cauchyova podmínka pro řady.

Rozhodněte zda platí ekvivalence: řada $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$ konverguje, právě když obě řady $a_1 + a_3 + a_5 + \dots$ a $a_2 + a_4 + a_6 + \dots$ konvergují. Pokud ne, rozhodněte, která z obou implikací platí (pokud vůbec nějaká platí).

3. Uveďte (a nedokazujte) výsledky o souvislost monotonie funkce a jejích extrémů s derivací (Tvrzení 4.5, Věta 4.11).

Aplikujte tyto výsledky na funkci definovanou jako $f(x) = 1 - \cos x$ pro x z $[-\pi/2, \pi/2]$ a x různé od 0 a $f(0) = 1/2$ a určete s jejich pomocí lokální a globální extrémy $f(x)$ na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$.

4. Dokažte, že množina reálných čísel je nespočetná.

(Číslování tvrzení a vět nesouhlasí s touto učebnicí.)

Úvod

Jak zopakujeme v příští kapitole, matematická analýza analyzuje nekonečné procesy a operace.[1] Je tak úzce propojena s cantorovskou teorií nekonečných množin a tím i s matematickou (i jinou) logikou. Jako základní pracovní doménou používá $\mathbb{R}$, tedy reálná čísla. Ale také i $\mathbb{C}$, komplexní čísla, ale těmi se tu nebudeme zabývat, přijdou na řadu v učebnici Matematická analýza III. Co je vlastně $\mathbb{R}$? Reálná osa, nekonečně hustá přímka? Tato intuitivní představa dlouho matematikům stačila, ale nakonec v poslední třetině 19. století během zpřesňování matematických a logických konceptů neobstála. Přesná definice $\mathbb{R}$ tak přestavuje nevyhnutelnou — lze ji jen ignorovat či přeskočit — součást matematické analýzy, viz J. Stillwell [133]. Algebraicky je $\mathbb{R}$ úplné uspořádané těleso, a tak se i v analýze musíme naučit používat algebru. Reálná čísla se budují ze zlomků $\mathbb{Q}$, dvojic $\frac{a}{b}$ celých čísel a, b s nenulovým jmenovatelem b. Celá čísla $\mathbb{Z}$ jsou jen oznaménkovaná přirozená čísla $\mathbb{N}_0$ s nulou. Pro přesnou definici $\mathbb{R}$ bychom tedy měli umět i přesně zavést přirozená čísla a jejich princip indukce. Navracíme se tak k matematické logice, nyní už k celkem jemným otázkám o prvo- či druhořádové definici vlastnosti přirozeného čísla. Geometrie a analýza? Přesné zavedení klasických funkcí sinus a kosinus v trigonometrii není možné bez matematické analýzy, jakkoli se nás středoškolská matematika snaží přesvědčit o opaku. Už jen přesná definice vzdálenosti dvou bodů v rovině vyžaduje zdůvodnit existenci druhé odmocniny z nezáporného čísla a dostáváme se k základnímu problému definice $\mathbb{R}$.

Pár slov o vztahu matematické analýzy a fyziky, jakkoli autor jako čistý matematik téměř není kompetentní se k tomu vyjadřovat. Analýza a moderní fyzika se zrodily současně v díle I. Newtona, který vytvořil matematické nástroje pro přesné uchopení zákonů pohybu těles v reálném světě. Druhý z otců analýzy G. Leibniz byl motivován více filozoficky. Po Newtonovi je fyzika bez diferenciálních rovnic a analýzy nemyslitelná. Proto v páté kapitole uvedeme jako ukázku použití derivací ve fyzice odvození popisu chování systému vzájemně se odpuzujících bodových nábojů.

K informatice se matematická analýza vztahuje přinejmenším dvěma způsoby. Je mocným nástrojem pro odvozování asymptotických odhadů diskrétních veličin, s nimiž informatika pracuje, například různých druhů složitosti algo-

[1] Za tuto charakterizaci matematické analýzy vděčím RNDr. Naděždě Krylové, CSc. Jiná definice matematické analýzy, od R. Penrose, je uvedena v oddílu 1.8.

ritmů. Můžeme se ale také podívat na výsledky v samotné matematické analýze očima informatika, třeba znovu vidět funkce „po staru“ jako pravidla či postupy přeměňující prvky definičního oboru ve funkční hodnoty, a ptát se, jaké jsou jejich vyčíslitelné či efektivní verze. To vede k takzvané rekurzivní či vyčíslitelné matematické analýze, kterou na následujících stránkách také zmíníme.

Uvedeme stručný přehled obsahu učebnice a pak se k jednotlivým kapitolám a zajímavým výsledkům v nich podrobněji vrátíme. V kapitole 1 poznáme zvláštní chování nekonečných součtů, zavedeme funkce jako speciální případ binárních relací a přejdeme od přirozených čísel přes celá čísla a zlomky k číslům reálným. Kapitola 2 se zabývá limitami nekonečných posloupností reálných čísel. Kapitola 3 je věnována nekonečným řadám, které přenášejí sčítání z konečných součtů na nekonečné množiny čísel. V kapitole 4 přicházejí na scénu reálné funkce, jejich limity a spojitost. Derivace funkcí následují v kapitole 5. Poslední kapitola 6 se vrací na začátek k $\mathbb{R}$ a buduje reálná čísla jako nekonečné desetinné rozvoje.

Zajímavé a důležité výsledky a koncepty v kapitole 1: definice suprema a infima podmnožiny lineárního uspořádání; dobré uspořádání libovolné množiny pomocí axiomu výběru; odvození z axiomu výběru nemožnosti změřit délku každé podmnožiny kružnice; jednoznačnost druhořádových Peanových přirozených čísel; různé důkazy Cantorovy–Bernsteinovy věty v naivní teorii množin; iracionalita čísla $\sqrt{2}$; příklad nearchimédovského uspořádaného tělesa; náčrt konstrukce $\mathbb{R}$ desetinnými rozvoji; jednoznačnost, až na izomorfismus, úplného uspořádaného tělesa; nástiny Cantorovy i Dedekindovy konstrukce $\mathbb{R}$; úplnost $\mathbb{R}$, tedy existence suprem a infim; Cantorova věta o vnořených intervalech; Cantorův důkaz nespočetnosti $\mathbb{R}$ diagonální metodou; na nespočetnosti $\mathbb{R}$ založený důkaz existence transcendentních, což znamená nealgebraických, reálných čísel.

Kapitola 2: definice limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ nekonečné posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$; aritmetika vlastních limit; výsledky o vztahu limity a uspořádání (ano, i v této promrskané partii analýzy si lze povšimnout něčeho zajímavého, viz tvrzení 2.1.25); Hardyho věta o limitě a uspořádání (věta 2.1.30); konečná i nekonečná věta o existenci monotónní podposloupnosti; Bolzanova–Weierstrassova věta; Cauchyova podmínka; Feketeho lemma; Stolzova–Cesàrova věta; zavedení reálné mocniny a^b pro $a, b \in \mathbb{R}$ s $a > 0$; limes inferior a limes uperior posloupnosti; pojem hromadného bodu a teorie zobecněných limit — Šalátova–Tomova věta.

Kapitola 3: definice nekonečné řady $\sum a_n$ a jejího součtu; geometrická řada a zeta funkce $\zeta(s)$; Leibnizovo kritérium; rozšíření definičního oboru $\zeta(s)$ pomocí Leibnizova kritéria (věta 3.1.24); podílové kritérium a odmocninové kritérium; výsledky o absolutně a neabsolutně konvergentních řadách: přerovnání, asociativita, distributivita; Abelovo kritérium a Dirichletovo kritérium neabsolutní konvergence řad; zavedení exponenciální funkce e^x řadou; geometrické zavedení funkcí sinus a kosinus a jejich vztah k řadám; problém osamělého běžce (Problém 3.4.28), věta o třech mezerách (věta 3.4.30), řešení Basilejského problému: $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; různé příklady použití nekonečných řad v enumerativní kombinatorice v oddílu 3.6, se závěrečným už pouze algebraickým odvozením vzorce pro

Fibonacciova čísla.

Kapitola 4: různé druhy okolí bodu; definice limity $\lim_{x \to a} f(x)$ funkce v (případně nevlastním) bodě a pro funkci s obecným definičním oborem: $f\colon M \to \mathbb{R}$ a a je limitní bod množiny M; spojitost funkce v bodě; Heineho definice limity funkce v bodě; limita složené a limita inverzní funkce, vlastnosti funkcí spojitých na množině (nabývání mezihodnot a extrémů), spojitá funkce s všude nespojitým inverzem, věta o spojitosti inverzní funkce, paradox běžkyně (lze běžet současně pomalu i rychle) a paradox věštce (axiom výběru vylučuje svobodnou vůli při konstrukci reálné funkce), stejnoměrná spojitost a (kvazi)stejnoměrná konvergence a konečně vyčíslitelná reálná čísla a vyčíslitelné reálné funkce: Speckerova věta (existuje posloupnost zlomků generovaná algoritmem, ale s nevyčíslitelnou limitou) a Borelova věta (každá vyčíslitelná reálná funkce je nutně spojitá).

Kapitola 5: definice derivace $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$ funkce $f(x)$ v bodě a (kde a může být libovolný bilimitní bod definičního oboru), tvrzení o tečně, vztah mezi $f'(a)$ a lokálními extrémy funkce, aritmetika a kalkul derivací, zejména derivace složené a inverzní funkce, derivace mocninné řady, geometrické odvození derivací sinu a kosinu, derivace elementárních funkcí, různé věty o střední hodnotě (Rolleova, Lagrangeova, Cauchyova, Schwarzova) a jejich důsledky (posloupnost $(\log n)$ hodnot logaritmu na $\mathbb{N}$ není P-rekurentní, číslo $0.11000100\dots$ není algebraické, l'Hospitalovo pravidlo, derivace určují tvar grafu funkce),

Kapitola 6:

V Rejstříku na konci učebnice jsou **základní pojmy** vyznačeny tučným fontem a definice či vysvětlení pojmu *číslem strany* v kurzívě. Rejstřík odkazuje před sebe, na sebe ne — sebevztažnými hofstadterovskými hrami (viz [68]), kdy se položka v rejstříku nachází proto, protože se v něm nachází, se nezabýváme (opravdu?). Neuvádíme zdaleka všechny výskyty klíčových slov, většinou jen definiční a pár dalších. Na druhé straně jsme se snažili zachytit všechna zmíněná místa a zeměpisné celky a pro podtržení lidské dimenze matematiky i všechny explicitně zmíněné osoby, ať skutečné či fiktivní, živé či z říše AI ([40]). Podiví-li se někdo, že rejstřík obsahuje jména přinejmenším dvou mytologických postav, a i fiktivní místa, stačí se zamyslet nad tím, jak moc se to liší od přítomnosti pojmů jako je limita, reálné číslo a podobně.

Kapitola 1

Od paradoxů k reálným číslům

Opakování a oživení množinového a logického značení.

První oddíl začneme příklady paradoxního chování součtů s nekonečně mnoha sčítanci, které je v rozporu s obvyklou komutativitou a asociativitou sčítání. Pak zavedeme různé binární relace a v jejich rámci funkce, které představují základní pojem analýzy i celé matematiky. Dále zmíníme axiom výběru a pomocí něj sestrojíme neměřitelnou množinu. Podíváme se na přirozená čísla a uvedeme dva příklady důkazů matematických tvrzení. Pak si zopakujeme číselné obory z algebraického pohledu. V předposledním oddílu se zaměříme na základní pracovní doménu analýzy, reálná čísla. Načrtneme jejich zavedení pomocí desetinných rozvojů, podrobně to provedeme v kapitole 6. Dokážeme jejich dvě základní vlastnosti, úplnost (existence suprem) a nespočetnost (neexistence bijekce s přirozenými čísly), a uvedeme důsledky (existence odmocnin a transcendentních a jiných čísel).

Nyní připomeneme množinové a logické značení používané v této učebnici. Dovolíme si předpokládat, že ho čtenářka beztak ovládá, ale pár zajímavostí neuškodí. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ jsou *přirozená čísla*, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}$ jsou *celá čísla* (přirozená čísla, nula a záporná celá čísla), $\mathbb{Q}$ označuje *zlomky* a $\mathbb{R}$ *reálná čísla*, to jest reálnou osu. Těmto množinám se blíže věnujeme v oddílech 1.4, 1.6 a 1.7. Pomocí $a \in A$ značíme, že *a je prvkem množiny A*. Množiny zapisujeme jako

$$A = \{x \mid x \text{ má vlastnost } P\} \ \text{ nebo } \ A = \{x \in X \mid x \text{ má vlastnost } P\}$$

— A je množina všech prvků s vlastností P nebo A je množina právě těch (a jenom těch) prvků x množiny X, které mají vlastnost P. V prvním případě ovšem předpokládáme, že je implicitně dáno odkud, z jakého univerza, prvky x bereme. Nebo množiny zapisujeme výčtem prvků, například

$$B = \{1,\ \{b,\ \{b\}\},\ 2,\ a\}$$

— B je množina s prvky 1, množina s prvky b a množina s jediným prvkem b, 2 a a. Přehledněji: B má prvky 1, (množina s prvky b a (množina s jediným prvkem b)), 2 a a.

Úloha 1.0.1. *Kolik má množina B vzájemně různých prvků? Pět? Čtyři? Tři? Dva? Jeden? Žádný?*

Čtenáře může napadnout, zda tento příklad zadání množiny výčtem prvků není zbytečně uměle složitý. Je ale jen realistický. Naopak, právě tradičně uváděné školské příklady jako $B = \{1, 2, 5\}$ a podobně jsou simplicistní, neupozorňující na možnou komplikovanost pojmu „být prvkem“ v teorii množin. Viz též úlohu 1.8.1.

Úloha 1.0.2. *N. Weaver v práci [151], jež poukazuje na problematičnost množin jako základu matematiky, píše ([151, str. 1 a 2]):*

> *One philosophically important way in which numbers and sets, as they are naively understood, differ is that numbers are physically instantiated in a way that sets are not. Five apples are an instance of the number 5 and a pair of shoes is an instance of the number 2, but there is nothing obvious that we can analogously point to as an instance of, say, the set $\{\{\emptyset\}\}$.*

Oponujte mu a ukažte na nějakou fyzickou instanci množiny $\{\{\emptyset\}\}$.

$A \subset B$ označuje relaci *podmnožiny*, každý prvek v A je i prvkem v B, a

$$\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subset M\}$$

je *potence (potenční množina)* množiny M, množina skládající se ze všech podmnožin množiny M.

Úloha 1.0.3. *Kolik prvků má $\mathcal{P}(M)$ pro konečnou množinu M?*

Pro počet prvků konečné množiny X užíváme symboly $|X|$ a $\#X$. Co je konečná množina je intuitivně jasné a přesnou definici zmíníme později.

Úloha 1.0.4. *Dokažte co nejjednodušeji, bez použití binomických koeficientů, že pro každou konečnou množinu M s alespoň jedním prvkem platí*

$$|\{A \in \mathcal{P}(M) \mid \#A \text{ je lichý}\}| = |\{A \in \mathcal{P}(M) \mid \#A \text{ je sudý}\}| \,.$$

Úloha 1.0.5. *A když M nemá ani jeden prvek?*

Binomické koeficienty a konečnou binomickou větu si můžete připomenout v úlohách 1.8.3 a 1.8.5.

Symbol $A \cup B$ označuje *sjednocení* dvou množin A a B, množinu prvků ležících v A nebo v B. Symbol $\bigcup$ označuje sjednocení více množin. Symbol $A \cap B$ označuje *průnik* dvou množin A a B, množinu prvků ležících současně v

A i v B (podobně $\bigcap$). Symbol $A \backslash B$ značí *množinový rozdíl*, což jsou prvky z A, které nejsou v B. Konečně (a, b) označuje *uspořádanou dvojici* s první složkou a a druhou složkou b. Dá se zapsat jako množina

$$(a,\, b) := \{\{a\},\, \{a,\, b\}\}\ .$$

Úloha 1.0.6. *Ověřte, že takové množiny mají vlastnost uspořádané dvojice: $(a, b) = (c, d)$, právě když $a = c$ i $b = d$. Co se stane, když $a = b$?*

Podle Wikipedie ([159]) toto množinové pojetí uspořádaných dvojic vymyslel v r. 1921 polský matematik *Kazimierz Kuratowski (1896–1980)* (narodil se ve Varšavě v Ruské říši a zemřel ve Varšavě v Polské lidové republice (všechno zaniklé státní formace, „Z PLR do MLR jel jsem přes ČSSR …“), je dobře známý svou větou z teorie grafů: abstraktní graf $G = (V, E)$ je rovinný, lze ho znázornit v rovině bez křížení hran, právě když G neobsahuje jako podgraf ani dělení grafu K_5 ani dělení grafu $K_{3,3}$). Uspořádanou trojici (a, b, c) zachytíme jako uspořádanou dvojici $(a, (b, c))$ a podobně pro další uspořádané n-tice s $n \geq 3$.

Připomeneme logické značení. *Implikace* $P \Rightarrow Q$ neplatí, právě když výrok P platí, ale výrok Q neplatí, ve všech třech ostatních případech implikace platí. *Ekvivalence* $P \Leftrightarrow Q$ neplatí, právě když výroky P a Q mají různé pravdivostní hodnoty, mají-li je stejné, pak ekvivalence platí. *Konjunkce* $P \,\&\, Q$ platí tehdy a jen tehdy, platí-li P i Q. Značení

$$a,\, b \in A$$

a podobně zkracuje $(a \in A) \,\&\, (b \in A)$. Pomocí $P \vee Q$ označujeme *disjunkci* dvou výroků — platí, právě když platí P nebo Q (nebo oba výroky zároveň). *Negace* $\neg P$ platí, právě když P neplatí. *Existenční kvantifikátor* $\exists\, a\colon P$ říká, že existuje prvek a, pro nějž tvrzení P platí. *Obecný kvantifikátor* $\forall\, a\colon P$ říká, že pro každý prvek a je tvrzení P pravdivé. Zápis

$$\forall\, a \in A\colon P$$

(pro každý prvek a z množiny A je P pravda) zkracuje $\forall\, a :\ ((a \in A) \Rightarrow P)$. Ale

$$\exists\, a \in A\colon P$$

(v A leží prvek a, pro nějž P platí) zkracuje $\exists\, a\colon ((a \in A) \,\&\, P)$. Například formule

$$M = N \iff \forall x\colon (x \in M \Leftrightarrow x \in N)$$

vyjadřuje — přesněji psáno, postuluje, je to jeden z množinových axiomů — tzv. *extenzionalitu množin*: dvě množiny se rovnají, právě když mají stejné prvky. Obecný kvantifikátor je často vynecháván a rozumí se implicitně, například komutativita binární operace $+$ na množině A se zapíše stručně jako $a + b = b + a$, pod čímž rozumíme, že $\forall a, b \in A :\ a + b = b + a$. Vypustili jsme ho vlastně i v axiomu extenzionality. Budeme hodně používat zápisy typu

$$\forall\, \varepsilon > 0\colon P$$

zkracující $\forall\,\varepsilon \in (0, +\infty)\colon P$ (pro každé kladné reálné číslo ε je P pravda).

Prázdná množina nemá žádné prvky:

$$M \text{ je prázdná množina} \iff \neg\exists x:\ x \in M\ .$$

Úloha 1.0.7. *Dokažte, že neexistují dvě různé prázdné množiny.*

Existence prázdné množiny se někdy postuluje jako samostatný množinový axiom, ale většinou plyne z ostatních axiomů. Značíme ji symbolem $\emptyset$. S dalším množinovým axiomem se setkáme v definici 1.4.1. Dvě množiny A a B jsou *disjunktní*, pokud $A \cap B = \emptyset$, nemají žádný společný prvek. Podobně se o více množinách řekne, že jsou disjunktní, jsou-li po dvou disjunktní. Prvky prázdné množiny mají jakoukoli vlastnost, například jsou papežem: formule

$$\forall\, x \in \emptyset:\ x \textit{ je papež}$$

je pravdivá. Znamená totiž formuli

$$\forall\, x:\ (x \in \emptyset\ \Rightarrow\ x \textit{ je papež})\ ,$$

jež tvrdí pravdu, neboť implikace s nepravdivým předpokladem je pravdivá. Ale žádného papeže z $\emptyset$ nelze ukázat či předvést, protože

$$\exists\, x \in \emptyset:\ x \textit{ je papež}$$

znamená nepravdivou formuli

$$\exists\, x:\ (x \in \emptyset\ \&\ x \textit{ je papež})\ .$$

Úloha 1.0.8. *Připomeňte si pravidla negování:*

1. $\neg(P \Rightarrow Q)$ *je totéž jako* $P \,\&\, \neg Q$,
2. $\neg(P \Leftrightarrow Q)$ *je totéž jako* $(P \,\&\, \neg Q) \vee (\neg P \,\&\, Q)$,
3. $\neg(P \,\&\, Q)$ *je totéž jako* $\neg P \vee \neg Q$,
4. $\neg(P \vee Q)$ *je totéž jako* $\neg P \,\&\, \neg Q$,
5. $\neg(\neg P)$ *je totéž jako* P,
6. $\neg(\exists a\colon P)$ *je totéž jako* $\forall a\colon \neg P$,
7. $\neg(\forall a\colon P)$ *je totéž jako* $\exists a\colon \neg P$.

K závorkám v logických zápisech zde pouze uvedeme, že je lze vypouštět tak, aby se původní uzávorkování dalo jednoznačně rekonstruovat, podle tohoto pořadí kvantifikátorů a logických spojek ve směru klesající síly vazby:

$$\neg,\ \text{kvantifikátory},\ \&,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \iff\ .$$

Například v části 2 předchozí úlohy lze závorky na pravé straně pominout beze změny smyslu formule. Na levé straně částí 1–4 je ale není možné vypustit. Podobně nelze (beze změny smyslu formule) vypustit závorky ve dvou předchozích kvantifikovaných tvrzeních o papeži.

Úloha 1.0.9. *Dobře, ale když je přesto vypustíme, dostaneme pravdivá nebo nepravdivá tvrzení?*

Úloha 1.0.10. *Negujte formuli vyjadřující stejnoměrnou spojitost funkce f definované na množině $M \subset \mathbb{R}$:*

$$\neg(\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, a, b \in M:\ |a - b| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon) \iff ?$$

Matematické značení často používá řeckou abecedu, kterou je proto nutné se naučit. Méně často i hebrejskou, například písmena $\aleph$ (alef) a $\gimel$ (gimel) v teorii množin. Lze se setkat i s cyrilicí: Ш (Š, symbol pro tzv. Šafarevičovu grupu). Nebo i s gotickým písmem, přesněji švabachem: $\mathfrak{c}$ (mohutnost kontinua), $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ (např. ideály v algebraické teorii čísel, často ve starší literatuře).

Úloha 1.0.11. *Dokážete pojmenovat a rukou napsat následující řecká písmena?*

$$\alpha,\ \beta,\ \Gamma,\ \gamma,\ \Delta,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta,\ \Theta,\ \theta,\ \iota,\ \kappa,\ \Lambda,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \Xi,\ \xi,\ o,\ \Pi,\ \pi,\ \rho,\ \Sigma,\ \sigma,$$

$$\tau,\ \Upsilon,\ \upsilon,\ \Phi,\ \phi,\ \chi,\ \Psi,\ \psi,\ \Omega,\ \omega\ .$$

1.1 Paradoxy nekonečna

Sčítání nekonečných řad. Nekonečné součty někdy vedou k paradoxům.

Co analyzuje matematická analýza? Nekonečné procesy a operace. Třeba nekonečné součty, tak zvané *nekonečné řady*. Například

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2$$

a

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n} + \cdots = 1$$

nebo

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

a tudíž i

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}\ .$$

Úloha 1.1.1. *Dokažte první dvě rovnosti. Ukažte, jak ze třetí rovnosti (jejíž důkaz je složitější) odvodit čtvrtou a naopak.*

Třetí rovnost dokážeme později v oddílu 3.5 rigorózně ve větě 3.5.8 a nerigorózně (ale krátce) v závěru onoho oddílu. Budeme se ale zabývat i nekonečnými řadami

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty$$

a

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots = ??\ .$$

Úloha 1.1.2. *Na kterého matematika narážíme názvem oddílu 1.1?*

Ale jak vlastně těch nekonečně mnoho čísel v uvedených příkladech sečteme? Řadu čteme v daném pořadí zleva doprava, spočteme posloupnost částečných součtů, což jsou obyčejné konečné součty, například ve čtvrtém příkladu to je posloupnost

$$(1,\ 1-\tfrac{1}{4},\ 1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9},\ 1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{16},\ \dots) = (1,\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{31}{36},\ \tfrac{115}{144},\ \dots)\ ,$$

a když se členy této posloupnosti neomezeně přibližují k nějakému číslu α, ve čtvrtém příkladu to nastává pro $\alpha = \pi^2/12$, definujeme součet dané nekonečné řady jako toto α. Čtyři uvedené příklady jsou hezké v tom, že v nich vlastně na pořadí členů řady vůbec nezáleží. Dá se totiž dokázat, a dokážeme to ve větě 3.2.20, že

> v uvedených čtyřech a jim podobných nekonečných řadách žádné zpřeházení sčítanců nezmění součet.

Můžeme prozradit už teď že tyto „podobné řady“ jsou absolutně konvergentní řady. Znamená to tak, například, že když vezmeme jakoukoli nekonečnou posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, jejíž členy a_k nějak probíhají převrácené čtverce (tj. každý člen je tvaru $a_k = \frac{1}{n^2}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a každé číslo $\frac{1}{n^2}$ se v posloupnosti objeví právě jednou), pak se posloupnost částečných součtů

$$(a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \dots)$$

neomezeně přibližuje vždy k jednomu a témuž číslu $\pi^2/6$.

Může ale někdy zpřeházení sčítanců součet nekonečné řady změnit? Může, nastává to třeba pro

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots = \log 2$$

nebo pro

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\cdots = \frac{\pi}{4}\ .$$

Tyto dva součty odvodíme na konci semestru v důsledcích 5.5.7 a 5.5.8. Jak ukázal německý matematik *Bernhard Riemann (1826–1866)* (narodil se ve vesnici Breselenz v Hannoverském království a zemřel na tuberkulózu v Itálii u jezera Lago Maggiore, odhalil souvislost součtů nekonečné řady $\zeta(s)$, definované v tvrzení 3.1.10, s rozložením prvočísel mezi přirozenými čísly), těmto dvěma a jim podobným řadám lze součet zpřeházením sčítanců libovolně změnit. Ukážeme to ale na jednodušším příkladu, kdy řadu

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\cdots = 0+0+0+\cdots+0+\cdots = 0$$

zpřeházíme tak, aby vždy po dvou kladných sčítancích následoval jeden záporný:

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}+\dots\\ &=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\cdots+\frac{1}{2n(2n-1)}+\dots\end{aligned}$$

a součet už není nula, ale jistě nějaké kladné číslo.

Úloha 1.1.3. *Vysvětlete, proč a v jakém smyslu platí jednotlivé rovnosti v obou předchozích výpočtech. Jaký je rozdíl mezi první rovností v prvním výpočtu a první rovností v*

$$1-1+1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots=0+0+0+\cdots+0+\cdots=0\,?$$

(Hned řekněme, že rovnost $1-1+1-1+1-1+\cdots=0$ *neplatí.)*

Riemannův výsledek dokážeme ve větě 3.2.15. Úvodní čtyři řady tedy splňují komutativní zákon, ale sedmá, osmá a devátá ho porušují. Jak to s ním u nekonečných řad je se dozvíme v oddílu 3.2 ve zmíněných větách.

A distributivní zákon? Zahrnuje nezávislost součtu na pořadí sčítanců, a tak ho pro obecné nekonečné řady ani nemá smysl uvažovat. Ale pro „hezké“ nekonečné řady distributivní zákon platí, viz věta 3.2.23.

Podívejme se, jak nekonečné řady porušují asociativitu sčítání. Když v libovolné obdélníkové tabulce čísel sečteme každý řádek a výsledky sečteme a pak totéž provedeme se sloupci, dostaneme v obou případech stejné číslo, výsledek je prostě součet všech položek v celé tabulce. Například v následující 3×3 tabulce jsou řádkové součty -2, 6 a 2, sečteno dává 6, totéž jako součet sloupcových součtů 3, 12 a -9:

1	5	-8	-2
2	4	0	6
0	3	-1	2
3	12	-9	$6 \setminus 6$

Uvážíme teď nekonečnou tabulku, jejíž řádky i sloupce jsou očíslovány přirozenými čísly $1, 2, \ldots$, která má na hlavní diagonále číslo 1, na diagonále nad ní -1 a všude jinde nuly:

1	-1	0	0	0	$\ldots$	0
0	1	-1	0	0	$\ldots$	0
0	0	1	-1	0	$\ldots$	0
0	0	0	1	-1	$\ldots$	0
0	0	0	0	1	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
1	0	0	0	0	$\ldots$	$1 \setminus 0$

— ?? Zde je každý řádkový součet nula a jejich součet je rovněž 0, první sloupcový součet ale je 1, a protože všechny další jsou nulové, součet sloupcových součtů se rovná 1. Sčítání přes řádky tak u nekonečných tabulek může dát jiný výsledek než sčítání přes sloupce, $0 \neq 1$. Navíc jsou všechny uvažované součty fakticky konečné, kromě nul vždy sčítáme nejvýš dva nenulové sčítance, což činí tento tabulkový paradox dosti znepokojivým. Asociativní zákon proto obecně pro nekonečné součty neplatí — po přeskupení sčítanců se součet může změnit, což se u konečných součtů nikdy nestane. K tomuto paradoxu se vrátíme v kapitole 3 větou 3.2.26.

1.2 Grafy, ekvivalence, uspořádání, suprema a funkce

Binární relace. Grafy a multigrafy, ekvivalence, rozklad podle ekvivalence. Uspořádání. Supremum. Dvě definice pojmu funkce. Spojitá funkce.

Co je to funkce? Matematická, nikoli politická! Zopakujme si to, jde o základní pojem matematické analýzy a celé matematiky. Je to jistý druh binární relace. Jsou-li M a N nějaké konečné nebo nekonečné množiny, jejich *kartézský součin* $M \times N$ je další množina

$$M \times N := \{(a,\, b) \mid a \in M,\, b \in N\}$$

všech těch uspořádaných dvojic (a, b), že první složka a je z M a druhá složka b z N. Přívlastek *kartézský* odkazuje na francouzského filosofa, matematika a vojáka *Reného Descarta (1596–1650)* (s latinským tvarem příjmení Cartesius, založil tzv. analytickou geometrii, což je *algebraické* pojetí geometrie, viz jeho spis *Geometrie* [37]). *Binární relace R mezi množinami M a N* je každá podmnožina jejich kartézského součinu,

$$R \subset M \times N\ .$$

Podobně se definují kartézské součiny více množin a relace s vyšší aritou, ternární, kvaternární, …, mezi více než dvěma množinami. Místo $(a, b) \in R$ se užívá značení aRb. V matematice hrají důležitou roli čtyři druhy binárních relací:

• grafy • ekvivalence • uspořádání • funkce.

Grafy (a multigrafy)

Graf

$$G = (V,\, E)$$

na množině V, přesněji *obyčejný graf*, je binární relace $E \subset V \times V$, jež je *symetrická* (když aEb, pak i bEa) a *ireflexivní* (pro žádné $a \in V$ není aEa). Prvkům množiny V se říká *vrcholy grafu G*. Graf G se ale často chápe jako množina E některých dvouprvkových podmnožin V, kterým se říká *hrany*, tedy $E \subset \{\{a, b\} \mid a, b \in V, a \neq b\}$. *Multigraf* G je struktura zobecňující graf, v níž dva vrcholy mohou být spojeny několika hranami a vrchol může být spojen sám se sebou několika smyčkami. Formálně, $G = (V, m)$, kde V je množina vrcholů a

$$m\colon V \times V \to \mathbb{N}_0$$

je symetrické zobrazení (ano, zobrazení a funkce definujeme až za chvíli), tedy $m(x, y) = m(y, x)$ pro každé $x, y \in V$. Hodnota $m(x, y) \in \mathbb{N}_0$ udává násobnost hrany $\{x, y\}$ v multigrafu G, pro $x = y$ jde o smyčku. Například v $G = (\{1, 2\}, m)$, kde $m(1, 1) = 4$, $m(2, 2) = 0$ a $m(1, 2) = m(2, 1) = 3$, je vrchol 1 spojen sám se sebou čtyřmi smyčkami, vrchol 2 nemá žádnou smyčku a vrcholy 1 a 2 jsou spojené třemi hranami.

Úloha 1.2.1. *Spočítejte, kolik je na konečné množině V grafů a kolik multigrafů.*

Úloha 1.2.2. *Spočítejte, kolik je na dané dvouprvkové množině multigrafů, v nichž má každá hrana i smyčka násobnost nejvýše* 2.

Ekvivalence

Ekvivalence na množině M je binární relace $R \subset M \times M$, jež je *reflexivní* (pro každé $a \in M$ je aRa), symetrická a *tranzitivní* (když aRb a bRc, pak aRc). Například

$$\{(\alpha,\, \alpha),\ (\alpha,\, \circ),\ (\circ,\, \alpha),\ (3,\, 3),\ (\circ,\, \circ)\}\ \text{ je ekvivalence na množině }\ \{\alpha,\, 3,\, \circ\}\,.$$

Definice 1.2.3 (rozklad množiny). *Množina P je rozkladem množiny M, jsou-li prvky množiny P neprázdné disjunktní podmnožiny množiny M a jejich sjednocení je množina M. Prvkům množiny P říkáme* bloky *rozkladu.*

Například

$$\{\{3\},\ \{\alpha,\, \circ\}\}\ \text{ je rozklad množiny }\ \{\alpha,\, 3,\, \circ\}\,.$$

Oba příklady spolu souvisejí následujícím způsobem.

Úloha 1.2.4. *Dokažte, že když R je ekvivalence na množině M, pak existuje právě jeden rozklad P množiny M, který značíme $P = M/R$, že*

$$aRb \iff a, b \in X \ \textit{pro nějakou (jednoznačně určenou) množinu}\ X \in P\,.$$

Dokažte, že naopak pro každý rozklad P množiny M existuje právě jedna ekvivalence R na M, že $P = M/R$.

Definice 1.2.5 (rozklad podle ekvivalence). *Je-li $\sim$ relace ekvivalence na množině M, rozklad $M/\!\sim$ množiny M popsaný v předchozí úloze nazveme rozkladem M podle $\sim$ a jeho prvky (to jest podmnožiny M) nazveme bloky ekvivalence $\sim$ (popř. rozkladu $M/\!\sim$).*

Úloha 1.2.6 (komponenta grafu). *G buď graf (V, E) či multigraf (V, m). Pro vrcholy $u, v \in V$ definujeme relaci $u \sim v$, právě když existuje taková konečná posloupnost*

$$u = u_0,\, u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_{n-1},\, u_n = v,\ \ n \in \mathbb{N}_0,$$

vrcholů z V, že $\{u_{i-1}, u_i\} \in E$ či $m(u_{i-1}, u_i) \geq 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Takové posloupnosti se říká sled v grafu. Dokažte, že $\sim$ je ekvivalence na V. Její bloky jsou tzv. komponenty souvislosti (multi)grafu G.

Komponenta souvislosti grafu či multigrafu je tedy taková množina $M \subset V$ jeho vrcholů, že každé dva vrcholy $u, v \in M$ lze v G spojit sledem a M je vzhledem k inkluzi maximální s touto vlastností, žádný vrchol $v \in V \backslash M$ už v G nelze spojit sledem se žádným vrcholem v M.

Úloha 1.2.7. *Ukažte, že když v předchozí úloze navíc požadujeme, aby všechny vrcholy u_i byly různé (sled nahradí cesta), dostaneme tutéž ekvivalenci. Jednodušeji řečeno: dva vrcholy v grafu či multigrafu lze spojit sledem, právě když je lze spojit cestou.*

Úloha 1.2.8. *Dokažte, že v grafu či multigrafu lze každé dva vrcholy spojit cestou (tj. mají jedinou komponentu), právě když jeho vrcholy nelze rozložit na dva bloky tak, že mezi nimi nevede hrana.*

Grafům či multigrafům s touto vlastností se říká *souvislé*.

Úloha 1.2.9. *Kolik je ekvivalencí na prázdné, jednoprvkové, dvouprvkové, tříprvkové a čtyřprvkové množině?*

A obecně na n-prvkové množině? Odpověď úzce souvisí s exponenciální funkcí, jejímž zadáním nekonečnou řadou se zabýváme v oddíle 3.3, viz tvrzení 3.6.6.

Uspořádání

Uspořádání (na množině M), obšírněji *neostré částečné uspořádání*, je binární relace

$$R \subset M \times M \ ,$$

jež je reflexivní, tranzitivní a *slabě antisymetrická* (když aRb a bRa, pak $b = a$). Používáme pro ně symboly $\leq$, $\leq_R$, $\preceq$ a podobně. *Ostré (částečné) uspořádání na M* je binární relace $R \subset M \times M$, jež je tranzitivní a *antisymetrická* (když aRb, pak není bRa). Tedy je ireflexivní. Používáme pro ně symboly $<$, $<_R$, $\prec$ a podobně. Neostré uspořádání se od ostrého odlišuje jen přidáním všech diagonálních dvojic (a, a). Například relace podmnožiny je reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrická, takže

$$\{(A,\, B) \mid A \subset B \subset M\}$$

představuje uspořádání na potenci $\mathcal{P}(M)$ množiny M. Uspořádání $\leq$ na M nazveme *lineárním*, když každé dva prvky jsou v něm porovnatelné, tedy $a, b \in M \Rightarrow (a \leq b \vee b \leq a)$. V „ostré“ verzi to znamená tzv. *trichotomii:* $a, b \in M \Rightarrow (a = b \vee a < b \vee b < a)$ a vždy nastává právě jedna z těchto tří možností.

Úloha 1.2.10. *Nechť* $|$ *je relace dělitelnosti na množině celých čísel*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\},\ a \,|\, b \iff \exists c \in \mathbb{Z} :\ b = ac \ .$$

Je to uspořádání? Ostré či neostré? Je lineární? Změní se odpovědi, když $\mathbb{Z}$ nahradí přirozená čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$?

Supremum a infimum

Supremum a infimum množiny reálných čísel jsou základní pojmy matematické analýzy. Proto je zavedeme už teď pro obecná lineární uspořádání. Necht $(X, \leq)$ je lineární uspořádání a $Y \subset X$ jeho podmnožina. Prvek $a \in Y$ je *nejmenší prvek množiny Y (též minimum Y)*, když pro každé $b \in Y$ je $a \leq b$. Tento nejmenší prvek, když existuje, označíme jako $\min(Y)$. Prvek $a \in X$ je *horní mez množiny Y*, když pro každé $b \in Y$ je $a \geq b$. Nechť

$$H(Y) = \{a \in X \mid a \text{ je horní mez } Y\}\ .$$

Má-li množina Y horní mez, $H(Y) \neq \emptyset$, je *shora omezená*. Analogicky definujeme největší prvek $\max(Y)$ (maximum) množiny Y, její dolní mez a jejich množinu $D(Y)$ a omezenost množiny Y zdola.

Definice 1.2.11 (supremum a infimum). *Supremum a infimum podmnožiny $Y \subset X$ v lineárně uspořádané množině $(X, \leq)$ jsou prvky*

$$\sup(Y) := \min(H(Y)) \in X \quad a \quad \inf(Y) := \max(D(Y)) \in X,$$

nejmenší horní a největší dolní mez množiny Y (když existují).

Supremum množiny Y nemusí existovat. Stane se to, když $H(Y) = \emptyset$, kdy Y nemá žádnou horní mez — pak řekneme, že Y je *shora neomezená*. Nebo když sice $H(Y) \neq \emptyset$, ale $H(Y)$ nemá nejmenší prvek. Když $\sup(Y)$ existuje, je to jakýsi „největší prvek množiny Y“, ale jen v uvozovkách, protože nemusí ležet v Y. Obdobný komentář platí pro infimum.

Pro příklady si vezmeme

$$(X, \leq) = (\mathbb{Q}, \leq)\ ,$$

tedy zlomky s obvyklým lineárním uspořádáním. Pak $\sup(\mathbb{N})$ neexistuje, protože podmnožina $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ je shora neomezená, a ani $\sup(\emptyset)$ neexistuje, protože $H(\emptyset) = \mathbb{Q}$ a tato množina nemá nejmenší prvek. Ovšem $\inf(\mathbb{N}) = \min(\mathbb{N}) = 1$. Dále $\sup(\{1 - n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}) = 1$ i $\sup(\{\alpha \in \mathbb{Q} \mid 0 < \alpha \leq 1\}) = 1$, i když v prvním případě číslo 1 v dané množině neleží. Infimem obou předchozích množin je 0, ale jen pro první jde současně i o minimum. Jak uvidíme později, ale jak je jasné už teď, $\sup(\{\alpha \in \mathbb{Q} \mid 0 < \alpha < \sqrt{2}\})$ neexistuje, protože množina horních mezí

$$H(\{\alpha \in \mathbb{Q} \mid 0 < \alpha < \sqrt{2}\}) = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha > \sqrt{2}\}$$

nemá nejmenší prvek. Ovšem $\inf(\{\alpha \in \mathbb{Q} \mid 0 < \alpha < \sqrt{2}\}) = 0$.

Úloha 1.2.12. *Je pravda, že každá neprázdná a shora omezená podmnožina celých čísel $\mathbb{Z}$ (s obvyklým lineárním uspořádáním) má supremum?*

Tvrzení 1.2.13 (podobná definice suprema). *Prvek $a \in X$ je supremem podmnožiny $Y \subset X$ v lineárním uspořádání $(X, \leq)$, právě když (i) $a \geq b$ pro každé $b \in Y$ a (ii) pro každé $c \in X$ s $c < a$ existuje $d \in Y$, že $c < d \leq a$.*

Důkaz. Nechť $a = \sup(Y) \in X$ podle definice 1.2.11, takže $a = \min(H(Y))$. Pak jistě $a \in H(Y)$ a a splňuje (i). Když $c \in X$ a $c < a$, pak $c \notin H(Y)$ a existuje $d \in Y$, že $c \geq d$ neplatí. Tedy $c < d$, a $d \leq a$ platí vždy.

Nechť naopak má prvek $a \in X$ obě vlastnosti (i) a (ii). Podle (i) je $a \in H(Y)$. Podle (ii) žádný prvek z X menší než a není horní mezí množiny Y. Tedy je každá horní mez množiny Y větší nebo rovna a a proto $a = \min(H(Y))$ a a je supremem Y podle definice 1.2.11. □

Vlastnosti (ii) se říká *aproximační vlastnost suprema* — prvky množiny Y aproximují zdola libovolně těsně $\sup(Y)$.

Úloha 1.2.14. *Vyslovte a dokažte předchozí tvrzení pro infimum.*

Supremum a infimum jsme pro jednoduchost zavedli pro lineárně uspořádané množiny, protože je v této učebnici používáme většinou pro standardní lineární uspořádání reálných čísel $(\mathbb{R}, \leq)$. Obecně se ale zavádějí pro jakékoli uspořádání, i s neporovnatelnými prvky. Definice se ve srovnání s definicí 1.2.11 (a její obdobou pro infimum) nemění:

Definice 1.2.15 (obecné supremum a infimum). *Supremum podmnožiny $Y \subset X$ v uspořádané množině $(X, \leq)$ je (jednoznačně určený, pokud existuje) prvek $a = \sup(Y) \in X$ daný konjukcí*

$$(\forall\, b \in Y:\ b \leq a)\,\&\,((c \in X\,\&\,(\forall\, b \in Y:\ b \leq c)) \Rightarrow a \leq c)\ .$$

To jest opět nejmenší horní mez množiny Y, existuje-li. Infimum je definováno obdobně, nahrazením všech tří srovnání $\leq$ srovnáními $\geq$.

Pozor ale na to, že pro obecné (nelineární) uspořádání tvrzení 1.2.13 neplatí.

Úloha 1.2.16. *Vysvětlete, proč pro částečně uspořádanou $(X, \leq)$ obecně neplatí ekvivalence v tvrzení 1.2.13.*

Úloha 1.2.17. *Dokažte, že supremum podmnožiny částečného uspořádání je určené jednoznačně.*

Funkce

Znovu, co je to funkce? Uvedeme dvě definice.

Definice 1.2.18 (funkce jako množina). *Funkce je množina f, jejíž každý prvek je uspořádaná dvojice a která splňuje*

$$(a,\, b),\ (a,\, c) \in f \Rightarrow b = c\ .$$

Definice 1.2.19 (funkce jako relace). *Funkce f z množiny M do množiny N je uspořádaná trojice (M, N, f), kde $f \subset M \times N$ je taková binární relace, že*

$$(\forall\, a \in M\ \exists\, b \in N:\ (a,\, b) \in f)\,\&\,((a,\, b),\ (a,\, c) \in f \Rightarrow b = c)$$

— pro každý prvek a z M existuje právě jeden prvek b z N, že afb.

Synonymem termínu *funkce* je *zobrazení*. Většinou budeme používat relační pojetí funkce. V závěrečných poznámkách ke kapitole 1 pro zajímavost citujeme z literatury další způsoby zavedení pojmu funkce. Funkce značíme písmeny $f, g, h, \dots$ a místo $f \subset M \times N$ a $(a, b) \in f$ či afb používáme běžné značení

$$f \colon M \to N \ \text{ a } \ f(a) = b, \ \text{ též } \ a \mapsto b \ .$$

Prvek a je *vzor* prvku b v zobrazení f a naopak b je *obraz* a či *hodnota* f *na* a. Množině M se říká *definiční obor funkce* f, N je její *obor hodnot* a množina

$$\begin{aligned} f(M) \ &:= \ \{y \in N \mid \exists\, x \in M : \ f(x) = y\} \\ &= \ \{f(x) \mid x \in M\} \subset N \end{aligned}$$

je *obraz funkce* f či podrobněji *obraz množiny* M *funkcí* f. Podobně pro libovolnou podmnožinu $A \subset M$ označujeme jako $f(A)$ množinu

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset N \ ,$$

obraz množiny A *funkcí* f. Je to trochu dvojznačné značení. Abychom věděli, co je $f(A)$, potřebujeme z kontextu vědět, zda je A podmnožinou nebo prvkem množiny M. A v situacích jako $A = \{\emptyset\}$ a $M = \{\emptyset, \ \{\emptyset\}\}$ nastává obojí. Proto se pro obraz množiny funkcí někdy používá značení $f[A]$, odlišující obě možnosti, ale my tak důslední nebudeme.

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Pro posloupnost f místo argumentu píšeme index, $f_n := f(n)$, a posloupnost zapisujeme jako

$$(f_n) = (f_1, \ f_2, \ \dots) \ .$$

Konečná posloupnost nebo též *slovo* je funkce f s definičním oborem $[k] := \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}_0$ ($k = 0$ dává prázdné slovo $f = \emptyset$), kterou zapisujeme jako $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ nebo i jako $f_1 f_2 \dots f_k$. Když $f_i \in A$ pro $i = 1, 2, \dots, k$, mluvíme o *slově nad abecedou* A. Množinu všech slov nad A označujeme A^*,

$$A^* = \{f \mid f \colon [k] \to A, \ k \in \mathbb{N}_0\} \ .$$

Úloha 1.2.20. *Popište formálně operaci zřetězení dvou slov f a g, kdy je napíšeme za sebe jako fg — jak je výsledné slovo fg složeno ze slov f a g?*

Operace na množině M, obšírněji *binární operace*, je funkce typu

$$f \colon M \times M \to M \ .$$

Místo $f((a, b)) = c$ je obvyklé značení $a\, f\, b = c$, například $1 + 1 = 2$.

Funkce se v množinovém pojetí rovná svému grafu: je to množina jako každá jiná, omezená pouze tím, že její každý prvek je uspořádaná dvojice. (V relačním pojetí je funkce uspořádaná trojice, což je vlastně také množina jako každá jiná, jen s jinou strukturou.) Například funkce kosinus je množina

$$\cos = \{(x, \, \cos x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ .$$

Co je ale přesně hodnota $\cos x$? Geometricky: poměr délky odvěsny pravoúhlého trojúhelníka přilehlé k úhlu velikosti x a délky jeho přepony. Ale co je to velikost úhlu? Viz oddíl 3.4. Analyticky: součet nekonečné řady $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$, viz věta 3.4.23.

V analýze se funkce obvykle zadává vzorcem či formulí. Někdy je třeba určit definiční obor, neboť někde vzorec nemusí být definován, třeba pro nulu ve jmenovateli či záporný argument logaritmu. Například

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

není správný zápis funce, i když s trochou dobré vůle ho lze přijmout, neboť hodnoty $f(\sqrt{3})$ a $f(-\sqrt{3})$ jsou nedefinované kvůli dělení nulou. Správný je zápis

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3} \colon \mathbb{R} \backslash \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\} \to \mathbb{R} \; .$$

Funkce $f \colon M \to N$ je *prostá* neboli *injektivní (injekce)*, když

$$x_1, \, x_2 \in M, \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \; .$$

Jinými slovy, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Česky, f nikdy neposílá dva různé prvky na týž prvek. Ještě čtvrtá formulace: prosté zobrazení je taková množina f, že každý prvek v f je uspořádaná dvojice a každá množina a je první nebo druhou složkou v nejvýše jednom prvku v f. Řekneme, že $f \colon M \to N$ je *zobrazení na* neboli *surjektivní (surjekce)*, když

$$\forall \, y \in N \; \exists \, x \in M : \; f(x) = y \; ,$$

jinými slovy, každý prvek v N má v f alespoň jeden vzor. Tedy obraz f se rovná oboru hodnot f. *Bijektivní* neboli *vzájemně jednoznačné* zobrazení, krátce *bijekce*, je to, jež má obě vlastnosti, je prosté i na. Bijekce páruje prvky v M s prvky v N tak, že každý prvek M se vyskytuje v právě jednom páru v f jako první složka a každý prvek N se vyskytuje v právě jednom páru v f jako druhá složka.

Úloha 1.2.21 (faktoriál). *Pro číslo $n \in \mathbb{N}_0$ a libovolnou n-prvkovou množinu A definujeme*

$$n! := \#\{f \colon A \to A \mid f \text{ je bijekce}\} \; (\text{„en faktoriál“}) \; .$$

Proč tato veličina závisí jen na počtu prvků A a ne na A samotné? Dokažte, že

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

(prázdný součin pro $n = 0$ se definuje jako 1, takže $0! = 1$).

Bijekci (i nekonečné) množiny M na sebe se říká *permutace množiny* M. Konečné permutace jsou vlastní kombinatorice a diskrétní matematice (a nakonec i algebře a teorii pravděpodobnosti) a o nekonečných jsme mluvili v souvislosti se zpřeházením členů nekonečné řady. Množina s n prvky tedy má $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ permutací.

Podíváme se na operace s funkcemi, později je využijeme. Když

$$f,\, g\colon M \to \mathbb{R}$$

jsou dvě funkce, odvozená *součtová funkce* $f+g$ a *součinová funkce* fg se definují jednoduše:

$$(f+g)(a) := f(a) + g(a) \ \text{ a } \ (fg)(a) := f(a)g(a),\ a \in M\ .$$

Podobně se definují další operace s funkcemi, třeba podíl nebo mocnina. Pro zobrazení je typická operace *skládání*. Pro dvě zobrazení

$$f\colon M \to N \ \text{ a } \ g\colon N \to P$$

je jejich *složenina* (či *složené zobrazení*)

$$h = g(f) = g \circ f\colon M \to P$$

definovaná hodnotami $h(a) = g(f(a)),\ a \in M$.

Úloha 1.2.22. *Nechť $f\colon M \to N$ a $g\colon N \to P$ jsou zobrazení. Zjistěte, jaký je vztah mezi injektivitou, resp. surjektivitou, f a g a složeného zobrazení $h = g(f)$. Kolik tu je možných úloh?*

Injektivní funkce f má *inverzní funkci* f^{-1}, jež v množinovém pojetí f vznikne prostou výměnou složek v uspořádaných dvojicích v f,

$$f^{-1} = \{(b,\, a) \mid (a,\, b) \in f\}\ .$$

A v relačním pojetí funkce? Je-li $f\colon M \to N$ prosté zobrazení, definujeme

$$f^{-1}\colon f(M) \to M$$

pomocí $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$. Patrně $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$ a $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(M)}$, kde $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ je *identické zobrazení* $\mathrm{id}_M(x) = x$.

Úloha 1.2.23. *Nechť f je prostá funkce. Ukažte, že pak i f^{-1} je prostá funkce a že v množinovém pojetí je $(f^{-1})^{-1} = f$. Ukažte, že v relačním pojetí někdy $(f^{-1})^{-1} \neq f$, ale vždy $((f^{-1})^{-1})^{-1} = f^{-1}$.*

Úloha 1.2.24. *Nechť $f\colon M \to N$ je funkce. Ukažte, že f je bijekce, právě když existuje zobrazení $g\colon N \to M$, že $f \circ g = \mathrm{id}_N$ a $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Takže $g = f^{-1}$ a $f = g^{-1}$. Řekneme, že f a g jsou vzájemně inverzní zobrazení.*

Úloha 1.2.25. *Ukažte, že dvě zobrazení popsaná v úloze 1.2.4, z množiny $E(M)$ všech ekvivalencí na množině M do množiny $R(M)$ všech rozkladů množiny M a opačně, jsou vzájemně inverzní a dávají tedy bijekci mezi $E(M)$ a $R(M)$.*

Závěrem oddílu o funkcích zavedeme spojité reálné funkce. Sice tím předbíháme, jde však o základní vlastnost, již budeme potřebovat dlouho před tím, než dospějeme do kapitoly o spojitých funkcích.

Definice 1.2.26 (spojitost funkce). *Fukce $f\colon M \to \mathbb{R}$ definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbb{R}$ je spojitá (na množině M), pokud ($\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$)*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall a \in M \, \exists \delta > 0 : \ b \in M \,\&\, |a - b| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon \, .$$

Zhruba řečeno, malá změna argumentu funkce f způsobí jen malou změnu funkční hodnoty.

Úloha 1.2.27. *Vezměme $M = \mathbb{N}$, funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pak je posloupnost. Které posloupnosti jsou spojité?*

1.3 Axiom výběru a jeho důsledky

Axiom výběru. Věta o dobrém uspořádání. Zmínka o Banachově–Tarského paradoxu. Existence neměřitelné množiny.

Probereme důležitý množinový axiom, tak zvaný *axiomu výběru*. Podle anglického „axiom of choice“ je označovaný zkratkou AC. Ve větě 1.3.5 jím každou množinu lineárně uspořádáme tak, aby se nedalo nekonečně dlouho klesat (viz úloha 1.3.4). Odtud později ve větě 4.3.6 odvodíme následující paradox věštce.

> Existuje věštec
>
> $$V\colon \{f\colon (-\infty,\, a) \to \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R} \, ,$$
>
> tedy reálné zobrazení V definované na množině reálných funkcí s definičními obory rovnými reálným intervalům $(-\infty, a)$ (viz str. 49 pro značení intervalů), s tou vlastností, že pro *každou* funkci f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ rovnost
>
> $$V(f \mid (-\infty,\, a)) = f(a)$$
>
> (vlevo je hodnota V na zúžení f na interval $(-\infty, a)$) platí pro každé $a \in \mathbb{R}$, kromě nejvýše spočetně mnoha výjimek a. Věštec tak pro každou reálnou funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a skoro každý argument $a \in \mathbb{R}$ z hodnot $f(x)$ pro $x < a$ správně uhodne hodnotu $f(a)$, zmýlí se jen pro nejvýše spočetně mnoho a (spočetnost množiny je zavedená v definici 1.7.48).

Jak uvidíme v oddílu 1.7, množina $\mathbb{R}$ není spočetná, a tak výjimečné argumenty $a \in \mathbb{R}$ s omyly věštce představují pouhou kapku v oceánu $\mathbb{R}$. Druhý a též svým způsobem paradoxní důsledek axiomu výběru dokážeme zde v důsledku 1.3.10: nelze rozumně změřit velikost úplně každé podmnožiny jednotkové kružnice.

Množinovým systémem $(A_i \mid i \in I)$, kde I a každá A_i jsou množiny, se rozumí množina uspořádaných dvojic $\{(i, A_i) \mid i \in I\}$.

Axiom 1.3.1 (axiom výběru, AC). *Pro každý množinový systém*

$$(A_i \mid i \in I)$$

neprázdných množin A_i existuje taková funkce

$$f\colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i\ ,$$

že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in A_i$. Funkci f se říká výběrová funkce či selektor (daného množinového sytému).

Z každé množiny A_i tak f vybírá reprezentanta („předsedu $f(i) \in A_i$ i-tého spolku A_i“). Už podle názvu se jedná o axiom, který se v teorii množin nedokazuje. Naopak bylo dokázáno, že AC nemůžeme ani dokázat ani vyvrátit pomocí ostatních axiomů. Zkoumá se tak teorie množin s AC (která je nejběžnější a nejvíce používaná), bez AC a s negací AC (například tak zvaný axiom determinovanosti je v rozporu s AC). Že se AC nedá vyvrátit pomocí ostatních axiomů teorie množin dokázal v r. 1937 sestrojením modelu teorie množin s platným AC brněnský rodák a rakouský logik a matematik *Kurt Gödel (1906–1978)* (v r. 1930 pohřbil tzv. Hilbertův program, když dokázal, že aritmetika obsahuje nerozhodnutelná tvrzení a neumí dokázat svou bezespornost). Kdo naopak sestrojil model teorie množin, v němž AC neplatí, čímž dokázal, že se AC nedá z ostatních axiomů teorie množin odvodit, si řekneme později.

Úloha 1.3.2. *Dokažte, že s axiomem výběru je ekvivalentní následující. Pro každé zobrazení $f\colon A \to B$ existuje takové zobrazení $g\colon f(A) \to A$, že složenina $f \circ g$ je identita $\mathrm{id}_{f(A)}$ na obrazu f.*

Úloha 1.3.3 (výběr z jedné množiny). *V matematické literatuře čteme obraty jako „Množina X je neprázdná, tedy v ní zvolíme libovolně prvek a.“ nebo „Z urny obsahující $n \in \mathbb{N}$ míčů jeden náhodně vyjmeme.“ a podobně. Potřebujeme k takovým výběrům AC? Formalizováno, jsou formule jako*

$$\forall X:\ (X \neq \emptyset \Rightarrow (\exists\, a:\ a \in X)) \ \text{ či } \ \forall X:\ (X \neq \emptyset \Rightarrow (\exists\, Y:\ |Y| = 1 \,\&\, Y \subset X))$$

větami teorie množin bez AC? Lze je v ní dokázat bez použití AC? První formule vybírá prvek a z X a druhá ho navíc „zabaluje“ jako $Y = \{a\}$.

Dobré uspořádání je lineární uspořádání $(X, \leq)$, v němž každá neprázdná podmnožina $A \subset X$ má nejmenší prvek. Podmnožina $A \subset X$ v uspořádání $(X, \leq)$ je *řetězec (v X)*, je-li zúžené uspořádání $(A, \leq)$ lineární.

Úloha 1.3.4. *Ukažte s pomocí AC, že lineární uspořádání* $(X, \leq)$ *je dobré, právě když v něm neexistuje nekonečný ostře klesající řetězec* $x_1 > x_2 > \dots$.

Věta o dobrém uspořádání představuje další ekvivalentní formulaci AC.

Věta 1.3.5 (o dobrém uspořádání). *S axiomem výběru je ekvivalentní, že na každé množině* X *existuje dobré uspořádání.*

Důkaz. Nechť lze každou množinu dobře uspořádat a je dán množinový systém $(A_i \mid i \in I)$ neprázdných množin. Dobře uspořádáme $\bigcup_{i \in I} A_i$ pomocí $\leq$ a výběrovou funkci f z I do tohoto sjednocení definujeme jako

$$f(i) = \min_{\leq}(A_i) \ ,$$

indexu i přiřadíme nejmenší prvek množiny A_i.

Ukážeme, jak naopak pomocí AC dobře uspořádat libovolnou, řekněme neprázdnou, množinu. Buď dána množina $X \neq \emptyset$ a výběrová funkce f na jejích neprázdných podmnožinách. (Výběrové funkce jsme sice výše formálně definovali jen pro množinové systémy, ale podle úlohy 1.3.6 to nevadí.) Vezmeme množinu

$$L = \{R \mid R \subset D(R) \times D(R),\ D(R) \subset X,\ \ R \text{ je lin. uspořádání na } D(R)\}$$

všech lineárních uspořádání R na podmnožinách $D(R)$ množiny X. Pro $R \in L$ definujeme

$$D_R = \{A \subset D(R) \mid x, y \in D(R),\ y \in A,\ xRy \Rightarrow x \in A\}$$

— D_R je množina všech tzv. *dolních množin* v lineárním uspořádání R. Nechť dále

$$C = \{R \in L \mid A \in D_R,\ A \neq D(R) \Rightarrow f(X \backslash A) = \min_{R}(D(R) \backslash A)\}$$

jsou ta lineární uspořádání R na podmnožinách množiny X, pro něž f z doplňku (do X) každé vlastní dolní množiny A v R vybere prvek, jenž je současně nejmenším prvkem doplňku A do nosné množiny uspořádání R. Ukážeme, že C obsahuje dobré uspořádání celé X. (Je ale C vůbec neprázdná? Viz úloha 1.3.7.)

Zaprvé ukážeme, že každé $R \in C$ je dobré uspořádání množiny $D(R)$. Nechť $R \in C$. Pro neprázdnou $B \subset D(R)$ položíme

$$A = \{y \in D(R) \backslash B \mid x \in B \Rightarrow yRx\} \ .$$

Množina $D(R) \backslash A$ obsahuje B a je tedy neprázdná. Patrně A je dolní množina v R. Takže

$$y := f(X \backslash A) = \min_{R}(D(R) \backslash A) \ .$$

Z faktů, že $D(R) \backslash A \supset B$ a y je nejmenší prvek v $D(R) \backslash A$, dostáváme, že yRx pro každé $x \in B$. Kdyby $y \notin B$, bylo by $y \in A$ podle její definice, což je nemožné. Tedy y je v B a je to nejmenší prvek B, dokonce nadmnožiny $D(R) \backslash A$.

Zadruhé dokážeme, že pro každá dvě lineární uspořádání $R, S \in C$ jedno z nich prodlužuje druhé: $D(R) \in D_S$ & $R \subset S$ nebo $D(S) \in D_R$ & $S \subset R$. Nechť

$$A = \{x \in D(R) \cap D(S) \mid Rx = Sx \;\&\; R \cap (Rx \times Rx) = S \cap (Sx \times Sx)\}$$

(zde $Rx = \{y \in D(R) \mid yRx\}$ a podobně Sx). Jsou to právě prvky určující tutéž dolní množinu v R a v S, která je navíc v R a v S stejně uspořádaná. Tvrdíme, že $A \in D_R \cap D_S$ (A je dolní množina v R i v S). Nechť

$$z, y, x \in X \;\text{ s }\; x \in A \;\text{ a }\; yRx\ .$$

Pak ySx, protože $Rx = Sx$, a když zRy, tak zSy i naopak (v obou případech $y, z \in Rx = Sx$ a tato množina je uspořádána stejně v R i v S). Tedy $Ry = Sy$. Tato množina je obsažena v $Rx = Sx$, a tak je stejně uspořádána v R i v S. Tedy $y \in A$ a A je dolní množina v R. Stejně se dokáže, že A je dolní množina v S. Nyní jsou-li $D(R)\backslash A$ a $D(S)\backslash A$ neprázdné, je $y = f(X\backslash A)$ nejmenším prvkem v $D(R)\backslash A$ vzhledem k R a také nejmenším prvkem v $D(S)\backslash A$ vzhledem k S, a tak $Ry = A \cup \{y\} = Sy$. Je také jasné, že R a S uspořádávají $A \cup \{y\}$ stejně (přidávají nový prvek y na konec), a tak $y \in A$, což je spor. Tedy třeba $A = D(R)$, $R \subset S$ a S prodlužuje R.

Zatřetí ukážeme, že

$$T := \bigcup C \in C\ ,$$

takže C má vzhledem k inkluzi (jednoznačný) největší prvek. Podle předešlého odstavce je T lineární uspořádání na $D(T) = \bigcup_{R \in C} D(R)$ a pro $x, y \in D(T)$ máme xTy, právě když xRy pro nějaké $R \in C$ s $x, y \in D(R)$. Ověříme, že T má vlastnost definující C. Nechť $A \subset D(T)$ je vlastní dolní množina v T a prvek $b \in D(T)\backslash A$ je libovolný. Tedy $b \in D(R)$ pro nějaké $R \in C$. Ukážeme, že $A \subset D(R)$. Je-li $a \in A$ libovolný, je $a \in D(S)$ pro nějaké $S \in C$. Když $D(S) \in D_R$, pak $a \in D(R)$. Když $D(R) \in D_S$ a aSb, pak opět $a \in D(R)$. Případ bSa nenastává (pak by bylo $b \in A$). Takže $A \subset D(R)$ a $D(R)\backslash A \neq \emptyset$. Tedy prvek $y = f(X\backslash A)$ je nejmenší prvek v $D(R)\backslash A$ a yRb. Protože b byl libovolný, je y nejmenší prvek v $D(T)\backslash A$ a opravdu $T \in C$.

Závěrem ukážeme, že $D(T) = X$ a T je tedy hledané dobré uspořádání X. Když $D(T) \neq X$, pak můžeme pomocí $x = f(X\backslash D(T))$ rozšířit T na R: $D(R) := D(T) \cup \{x\}$ a položíme yRx pro každé $y \in D(R)$ (přidáme tedy k T nový největší prvek). Je jasné, že $R \in C$ (úloha 1.3.8). Protože R ostře rozšiřuje T, dostali jsme spor s tím, že T je největší prvek v C vzhledem k inkluzi. □

Úloha 1.3.6. *Odůvodněte další ekvivalentní formulaci AC: pro každou množinu M s $\emptyset \notin M$ existuje takové zobrazení $f\colon M \to \bigcup M$, že pro každý prvek $A \in M$ je $f(A) \in A$.*

Úloha 1.3.7. *Dokažte, že množina C definovaná v důkazu je neprázdná.*

Úloha 1.3.8. *Proč v závěru důkazu platí, že $R \in C$?*

V oddílu 4.3 pomocí věty 1.3.5 dobře uspořádáme množinu

$$X = \{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

všech všude definovaných reálných funkcí.

Na axiomu výběru je založený i známý *Banachův–Tarského paradox:*

> Koule o poloměru 1 v trojrozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$ se dá rozložit na pět množin $A_1, \dots, A_5$, které lze vhodnými posunutími a otočeními beze změny tvaru přemístit do pozic, kde rozkládají kouli o poloměru 1000000.

Vypadá to jako nesmysl, neboť obě koule mají dosti odlišné objemy a objem se při této manipulaci musí zachovat ... nebo ne? Zachová se, pokud mají množiny A_i objem vůbec definovaný a jsou tzv. měřitelné. Vtip paradoxu spočívá v tom, že ne všechny $A_1, \dots, A_5$ jsou měřitelné. Z AC existence neměřitelných množin právě plyne. Dokážeme to na příkladu.

Jako $C \subset \mathbb{R}^2$ označíme *jednotkovou kružnici* v rovině se středem v počátku,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} ,$$

a pro bod $a \in C$ na ní a úhel $\varphi \in [0, 2\pi)$ jako $a + \varphi \in C$ označíme bod, kam se a přemístí po otočení kolem počátku proti směru hodinek o úhel φ. Všimněte si, že $a \mapsto a + \varphi$ je bijekce C na sebe. Pro podmnožinu $A \subset C$ položíme

$$A + \varphi := \{a + \varphi \mid a \in A\} .$$

Například pro $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a $\varphi = \pi/4$ je $A + \varphi = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$. Úhel $\varphi \in [0, 2\pi)$ je *racionální*, když $\varphi/\pi \in \mathbb{Q}$, je to zlomkový násobek čísla pí. Jinak je φ *iracionální úhel.* Uvažme „*obloukovou délku*“, funkci

$$\mu\colon \mathcal{P}(C) \to [0, +\infty)$$

přiřazující (libovolné!) podmnožině $A \subset C$ „délku“ $\mu(A)$ „oblouku“ A. Je přirozené požadovat, aby μ měla následující vlastnosti.

1. Délka celé kružnice je 2π, takže $\mu(C) = 2\pi$.
2. Délky neprotínajících se množin se sčítají: je-li $A_1, A_2, \dots$ konečná či nekonečná posloupnost po dvou disjunktních podmnožin C, pak

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots .$$

3. Délka množiny se otočením nemění: pro každou $A \subset C$ a každý úhel $\varphi \in [0, 2\pi)$ je $\mu(A) = \mu(A + \varphi)$.

Z AC plyne, že taková funkce μ neexistuje. Nelze přiřadit délku úplně každé podmnožině C tak, aby byly splněny požadavky 1–3. Lze je současně splnit jen částečnou funkcí μ, která není na některých podmnožinách C definovaná. Jednu podmnožinu způsobující problémy si teď „ukážeme“.

Tvrzení 1.3.9 (množina problémista). *Z axiomu výběru vyplývá existence takové podmnožiny jednotkové kružnice $A \subset C$, že*

$$\{A + \varphi \mid \varphi \in [0, 2\pi) \cap \pi\mathbb{Q}\}$$

(φ probíhá všechny racionální úhly) je rozklad C. Množiny $A + \varphi$ se tedy pro různé racionální úhly φ neprotínají a pokrývají celou C.

Důkaz. Na C vezmeme relaci $\sim$ definovanou jako $a \sim b$, právě když pro nějaký racionální úhel φ je $a + \varphi = b$. Jde o ekvivalenci: reflexivita a symetrie jsou jasné a nakonec i tranzitivita, protože součet dvou racionálních úhlů je racionální úhel (viz úloha 1.3.11). Vezmeme rozklad $C/\sim$ a z každého jeho bloku *pomocí axiomu výběru* vybereme po jednom prvku, které shrneme do množiny A (viz úloha 1.3.6). Podívejme se, proč má A uvedenou vlastnost. Je-li $x \in C$ libovolný bod, pak $x \in B \in C/\sim$ pro nějaký blok B tohoto rozkladu a B je v A reprezentovaný prvkem b, tedy $b \in A \cap B$. Protože $x, b \in B$, máme $x = b + \psi$ pro racionální úhel ψ a $x \in A + \pi$. Sjednocení všech $A + \psi$ tak je celá C. Když $\varphi < \varphi'$ jsou dva různé racionální úhly a $b \in (A + \varphi) \cap (A + \varphi')$, pak $b = a + \varphi = a' + \varphi'$ pro dva různé prvky $a, a' \in A$. Tedy $a = a' + (\varphi' - \varphi)$ (zde máme dva druhy sčítání, dvě různé operace, viz úloha 1.3.11) a $a \sim a'$. To nelze, různé prvky A jsou z různých bloků množiny $C/\sim$ a tedy jsou neekvivalentní. Pro různé racionální úhly φ se množiny $A + \varphi$ neprotínají. □

Této množině A nelze bez porušení požadavků 1–3 přiřadit žádnou délku:

Důsledek 1.3.10 (μ neexistuje). *Na základě axiomu výběru existence funkce $\mu\colon \mathcal{P}(C) \to [0, +\infty)$ splňující požadavky 1–3 vede ke sporu. Ve smyslu logické možnosti proto μ neexistuje.*

Důkaz. Pro spor nechť μ existuje a $\mu(A) = c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, kde A je množina z předchozího tvrzení. Podle požadavku 3 je i $\mu(A + \varphi) = c$ pro každý racionální úhel φ. Tyto úhly seřadíme do nekonečné posloupnosti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (viz spočetnost $\mathbb{Q}$ níže). Podle požadavku 2, toho, že množiny $A + \varphi_n$ tvoří rozklad C, a požadavku 1 máme vztah

$$c + c + \cdots = \mu(A + \varphi_1) + \mu(A + \varphi_2) + \cdots = \mu(C) = 2\pi\ .$$

Ale pro $c = 0$ je $0 + 0 + \cdots = 0 \neq 2\pi$ a stejně tak pro $c > 0$ je $c + c + \cdots = +\infty \neq 2\pi$ — spor. □

Úloha 1.3.11. *Dokažte podrobně, že $\sim$ je ekvivalence. Jaké dva druhy sčítání máme na mysli? Jak se přesně sčítají a odečítají úhly z $[0, 2\pi)$?*

Částečně definovanou obloukovou délku zavedeme v oddílu 3.4 pro definice funkcí sinus a kosinus. Fakticky je zapotřebí již jen pro samotnou definici úhlů $\varphi \in [0, 2\pi)$ (jako délek jistých oblouků na C), s kterými jsme už bezstarostně a naivně pracovali.

1.4 Přirozená čísla, nekonečné množiny

Přirozená čísla a nekonečné množiny. Cantorova–Bernsteinova věta: jak ze dvou protiběžných injekcí vyrobit bijekci.

Existenci přirozených čísel postulují *Peanovy axiomy.*

Axiom 1.4.1 (Peanovy axiomy). *Existuje trojice* $(N_0, 0_0, S)$*, v níž* N_0 *je množina,* $0_0 \in N_0$ *je její prvek a* $S\colon N_0 \to N_0$ *je zobrazení, s těmito vlastnostmi.*

1. *Zobrazení* S *je prosté a* 0_0 *není v jeho obrazu,* $0_0 \notin S(N_0)$*.*
2. *Platí princip indukce: je-li* M *taková množina, že* $0_0 \in M \subset N_0$ *a pro každé* $n \in M$ *je i* $S(n) \in M$*, potom* $M = N_0$*.*

Prvek 0_0 *nazýváme nulou, množině* N_0 *říkáme přirozená čísla s nulou a* S *je funkce následníka.*

Giuseppe Peano (1858–1932) byl italský matematik působící větší část kariéry na Turínské univerzitě (kromě axiomatizace přirozených čísel popsal i křivku procházející všemi body čtverce a dokázal větu o existenci řešení jisté třídy diferenciálních rovnic). Když pro $m, n \in N_0$ je $S(m) = n$, nazveme n *následníkem* m a m *předchůdcem* n. Podmnožina $A \subset N_0$ je *počáteční úsek*, když je uzavřená na předchůdce — pro každé $n \in N_0$ platí implikace $S(n) \in A \Rightarrow n \in A$. Pokud navíc $A \neq N_0$, je A *vlastní počáteční úsek.*

Úloha 1.4.2. *Odvoďte z Peanových axiomů, že* $S(N_0) = N_0 \backslash \{0_0\}$*.*

Úloha 1.4.3. *Odvoďte z Peanových axiomů, že* $S(n) \neq n$ *pro každé* $n \in N_0$*.*

Úloha 1.4.4. *Uveďte příklad množiny* N_0*, prvku* $0_0 \in N_0$ *a prostého zobrazení* $S\colon N_0 \to N_0$*, že* $S(N_0) = N_0 \backslash \{0_0\}$*, ale trojice* $(N_0, 0_0, S)$ *„nevypadá jako přirozená čísla s nulou“, protože některé prvky* $m \in N_0$ *jsou nedosažitelné z* 0_0 *opakovaným užitím následníka,*

$$m \notin \{0_0,\, S(0_0),\, S(S(0_0)),\, S(S(S(0_0))),\, \dots\}\ .$$

Jak se porušuje princip indukce?

Obvyklé lineární uspořádání na množině N_0 (z trojice v axiomu 1.4.1) definujeme jako

$$m \le n \iff \text{každý počáteční úsek } A \subset N_0 \text{ obsahující } n \text{ obsahuje i } m\ .$$

Úloha 1.4.5. *Dokažte, že to je lineární uspořádání na* N_0*.*

Úloha 1.4.6. *Dokažte, že v tomto lineárním uspořádání má každá neprázdná podmnožina* $X \subset N_0$ *nejmenší prvek.*

Úloha 1.4.7. *Dokažte jednoduché vlastnosti tohoto lineárního uspořádání: (i)* $n \le S(n)$*, (ii)* $0_0 \le n$*, (iii)* $m < n \Rightarrow n \ne 0_0$.

Tvrzení 1.4.8 (jedinečnost přirozených čísel). *Když trojice* $(N_0, 0_0, S)$ *a* $(N_0', 0_0', S')$ *vyhovují axiomu 1.4.1, jsou izomorfní — existuje taková bijekce*

$$F\colon N_0 \to N_0' \ ,$$

že $F(0_0) = 0_0'$ *a pro každé* $n \in N_0$ *je* $F(S(n)) = S'(F(n))$.

Důkaz. Nejdřív ukážeme, že každé zobrazení $F\colon N_0 \to N_0'$ popsaným způsobem komutující s S a S' už je prosté. Kdyby nebylo, vezmeme (podle úlohy 1.4.6) $a < b$ z N_0, a nejmenší, že $F(a) = F(b)$. Pak $a = 0_0$, jinak předchůdci $S^{-1}(a)$ a $S^{-1}(b)$ prvků a a b dávají spor s minimalitou a. Tedy F posílá předchůdce prvku b na předchůdce prvku $F(b) = F(0_0) = 0_0'$, spor ($0_0'$ nemá předchůdce).

Uvažme množinu M všech takových zobrazení $f\colon A \to N_0'$, že A je počáteční úsek N_0, $f(0_0) = 0_0'$ a $a, S(a) \in A \Rightarrow f(S(a)) = S'(f(a))$. Například $\{(0_0, 0_0')\} \in M$ (teď používáme množinové pojetí zobrazení, srovnej definice 1.2.18 a 1.2.19). Tvrdíme, že sjednocení

$$F = \bigcup_{f \in M} f$$

je hledaný izomorfismus. Když $f, g \in M$, $f(a) = b$ a $g(a) = c$, zřejmě $b = c$ — stačí uvážit nejmenší $x \in N_0$ s $f(x) \ne g(x)$. Sjednocení F je tedy dobře definované zobrazení z nějakého počátečního úseku $I \subset N_0$ do N_0', které požadovaným způsobem komutuje s S a S'. Zbývá ukázat, že $I = N_0$ a F je na N_0', prostota F už plyne automaticky, jak jsme viděli. Kdyby $I \ne N_0$, vezmeme nejmenší $a \in N_0 \backslash I$. Pak existuje $f \in M$, že f je definované na předchůdci $b = S^{-1}(a)$ (ale ne na a). Pak ale $g = f \cup \{(a, S'(f(b)))\} \in M$, ve sporu s nedefinovaností F na a. Tedy $I = N_0$. Podobně se indukcí ukáže rovnost $F(I) = N_0'$. □

Přirozená čísla s nulou jsou tedy až na izomorfismus jednoznačně určená. Je to díky tomu, že jsme princip indukce v axiomu 1.4.1 postulovali pro každou podmnožinu množiny N_0. Situace se změní (viz závěrečné poznámky), požadujeme-li ho realističtěji jen pro podmnožiny popsatelné formulí. Jako kanonická přirozená čísla s nulou $(\mathbb{N}_0, 0, S)$ vezmeme ta z teorie množin:

$$0 = \emptyset,\ S(n) = n \cup \{n\},\ \mathbb{N}_0 = \{0,\ S(0),\ S(S(0)),\ S(S(S(0))),\ \dots\}\ .$$

Že taková množina $\mathbb{N}_0$ existuje je jeden z množinových axiomů, axiom nekonečna.

Úloha 1.4.9. *Jaká množina představuje číslo* 3 *v množinovém pojetí?*

Obvyklé sčítání a násobení přirozených čísel definujeme indukcí pomocí funkce následníka: pro $m, n \in \mathbb{N}_0$ položíme

$$\begin{aligned} &0 + 0 := 0,\ n + S(m) = S(n) + m := S(n+m),\\ &00 := 0,\ nS(m) := nm + n,\ S(n)m := nm + m\ . \end{aligned}$$

Úloha 1.4.10. *Dokažte pro tyto operace indukcí neutralitu prvku* 0 *pro sčítání, prvku* 1 *pro násobení, komutativitu a asociativitu sčítání a násobení a distributivitu násobení vzhledem ke sčítání.*

Konečně zavedeme konečné a nekonečné množiny a v úlohách uvedeme jejich některé důležité vlastnosti.

Definice 1.4.11 ((ne)konečné množiny). *Množina M je konečná, existuje-li prosté zobrazení z M do vlastního počátečního úseku množiny $\mathbb{N}_0$ (nebo jakýchkoli jiných přirozených čísel s nulou N_0). Když takové zobrazení neexistuje, nazývá se M nekonečnou množinou.*

Úloha 1.4.12. *Podmnožina konečné množiny je vždy konečná a nadmnožina nekonečné vždy nekonečná. Sjednocení dvou konečných množin je vždy konečná množina.*

Úloha 1.4.13. *Dokažte, že M je konečná, právě když každé injektivní zobrazení $f\colon M \to M$ je i surjektivní. Dokažte, že M je konečná, právě když každé surjektivní zobrazení $f\colon M \to M$ je i injektivní.*

Úloha 1.4.14. *Nalezněte zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které je na a každé $n \in \mathbb{N}$ v něm má nekonečně mnoho vzorů. Umíte ho zadat vzorcem?*

Úloha 1.4.15. *Dokažte, že M je nekonečná, právě když existuje injektivní zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to M$. Dokažte, že M je nekonečná, právě když existuje surjektivní zobrazení $f\colon M \to \mathbb{N}$.*

Úloha 1.4.16. *Dokažte: když existuje surjekce $f\colon M \to N$, tak existuje injekce $g\colon N \to M$, a když existuje injekce $f\colon M \to N$, tak existuje surjekce $g\colon f(M) \to M$.*

Následující věta je klasický výsledek z počátků teorie množin. Pro konečné množiny je triviální.

Úloha 1.4.17. *Proč je Cantorova–Bernsteinova věta v případě konečných množin triviální?*

Věta 1.4.18 (Cantorova–Bernsteinova). *M a N budte dvě libovolné množiny. Když existují prostá zobrazení*

$$f\colon M \to N \quad a \quad g\colon N \to M\ ,$$

potom existuje bijekce $h\colon M \to N$.

Důkaz. Pro zjednodušení lze předpokládat, že $M \cap N = \emptyset$ (k tomu se v závěru vrátíme). Injekce f a g bereme jako množiny upořádaných dvojic a náležení

$$(a,\, b) \in f \cup g$$

označíme jako šipku $a \to b$. Máme šipkovou vlastnost: pro každé $a \in M \cup N$ buď z a vede právě jedna šipka a do a žádná (typ 1) nebo do a i z a vede právě jedna šipka, jedna patřící do f a druhá do g (typ 2). Pro uspořádanou dvojici (a, b), $a \neq b$, položíme

$$\overline{(a,\, b)} := \{a,\, b\}$$

(zapomínání pořadí obou prvků). Uvážíme komponenty grafu

$$G = (M \cup N,\, E),\;\; E = \{\overline{(a,\, b)} \mid (a,\, b) \in f \cup g\}\;.$$

Komponenta $K \subset M \cup N$ je typu 1, obsahuje-li alespoň jeden vrchol typu 1, a jinak je typu 2. Nechť K je typu 1 a $a_0 \in K$ je libovolný vrchol typu 1 (hned vyplyne, že je v K jediný). Pak je právě jeden $a_1 \in K$, že $a_0 \to a_1$ a jistě $a_1 \neq a_0$. Tedy a_1 je typu 2 a je právě jeden $a_2 \in K$, že $a_1 \to a_2$ a jistě $a_2 \neq a_0, a_1$ (jinak bychom byli ve sporu s šipkovou vlastností nebo tím, že a_0 je typu 1). Takto dostáváme nekonečnou posloupnost vzájemně různých vrcholů $a_0, a_1, a_2, \ldots$ v K splňující $a_i \to a_{i+1}$. Dokonce $K = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$, protože připojení vrcholu v K mimo $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ k této množině cestou v G by porušilo šipkovou vlastnost či to, že a_0 je typu 1. Nechť K je typu 2 a $a_0 \in K$ je libovolný vrchol (tedy typu 2). Pak máme jednoznačné vrcholy $a_1, a_{-1} \in K$, že $a_{-1} \to a_0 \to a_1$ a jistě $a_1, a_{-1} \neq a_0$. Nyní se ale může stát, že $a_1 = a_{-1}$. Stane-li se to, je K dvojcyklus $a_0 \leftrightarrow a_1$. Jinak, pro $a_1 \neq a_{-1}$, máme jednoznačné vrcholy $a_2, a_{-2} \in K$, že $a_{-2} \to a_{-1}$, $a_1 \to a_2$ a jistě $a_{-2}, a_2 \neq a_0, a_{-1}, a_1$. Rozlišíme možnosti $a_2 = a_{-2}$ a $a_2 \neq a_{-2}$ a postupujeme stejně dále. Nakonec dostaneme, že buď $K = \{a_{-n}, a_{-n+1}, \ldots, a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ nebo $K = \{\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots\}$ (oboustranně nekonečná posloupnost), kde $n \in \mathbb{N}$, všechny a_i jsou různé až na $a_{-n} = a_n$ a vždy $a_i \to a_{i+1}$ (pro $i = n$ hodnotu $i + 1$ definujeme jako $-n + 1$). Komponenta K nemá jiné vrcholy než a_i z důvodu, jaký jsme již uvedli. Vezmeme množinu neuspořádaných a disjunktních dvojic

$$P = \bigcup_K \left\{\, \overline{(a_i,\, a_{i+1})} \mid i \in \mathbb{Z} \text{ je sudé} \right\}\;,$$

kde sjednocujeme přes všechny komponenty K grafu G a vrcholy $a_i \in K$ jsou ve výše definovaném pořadí $i = 0, 1, \ldots$ nebo $i = -n, \ldots, 0, \ldots, n$ nebo $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$. Protože každý $a \in M \cup N$ leží v právě jedné komponentě K a v každé K se vrcholy M a N v pořadí podle šipek střídají, je P perfektní párování mezi M a N: každá dvojice $\{a, b\} \in P$ obsahuje vrchol z M a vrchol z N a každý vrchol v $M \cup N$ leží v právě jedné dvojici z P. Uspořádáme-li všechny dvojice v P tak, že prvek z M je vždy první, dostaneme bijekci h z M do N.

Ale co pro $M \cap N \neq \emptyset$? Pak M a N nahradíme disjunktními množinami $M' = \{1\} \times M$ a $N' = \{2\} \times N$ a zbytek necháme čtenářce do úlohy 1.4.20. $\Box$

Věta je připsána německým matematikům *Georgu Cantorovi (1845–1918)* (narodil se v Petrohradu v Rusku, proslul jako zakladatel teorie množin) a *Felixi Bernsteinovi (1878–1956)* (zabýval se aplikovanou matematikou a je známý výsledky o dědičnosti krevních skupin). Větě se říká i Schröderova–Bernsteinova, podle německého matematika a logika *Ernsta Schrödera (1841–1902)* (známého pracemi o uspořádaných množinách a v enumerativní kombinatorice výsledky o počtech různých uzávorkování výrazů, viz tzv. *Schröderova čísla*, posloupnost A006318 v OEIS [160]).

Úloha 1.4.19. *Kde jsme v důkazu použili, že $M \cap N = \emptyset$ a že zobrazení f a g jsou prostá?*

Úloha 1.4.20. *Dokončete důkaz Cantorovy–Bernsteinovy věty pro protínající se M a N převedením na disjunktní množiny, jak je naznačeno na konci důkazu.*

Nastíníme jiný důkaz Cantorovy–Bernsteinovy věty, který je založený na „sčítání" množin nekonečnými řadami. Podrobnosti však přenecháme čtenáři do úlohy. Pro množiny A a B pomocí $A \oplus B$ označíme jejich disjunktní sjednocení

$$A \oplus B := (\{1\} \times A) \cup (\{2\} \times B)\ .$$

Pomocí $A \approx B$ označíme, že mezi množinami A a B existuje bijekce. C.–B. věta se pak dokáže následovně (A, B, C, M, N, X, Y jsou množiny).

- Platí lemma:

  $$A \approx B \oplus A \Rightarrow \exists C:\ A \approx (B \oplus B \oplus B \oplus \dots) \oplus C$$

  (výklad nekonečného součtu $B \oplus B \oplus B \oplus \dots$ je součástí úlohy).

- Když existují injekce z M do N a z N do M, pak existují nějaké A a B, že

  $$N \approx A \oplus M \ \text{ a } \ M \approx B \oplus N\ .$$

- Pak tedy, díky asociativitě $\oplus$, máme $N \approx (A \oplus B) \oplus N$ a podle lemmatu existuje C, že

  $$N \approx ((A \oplus B) \oplus (A \oplus B) \oplus \dots) \oplus C\ .$$

  Tedy

  $$M \approx B \oplus (((A \oplus B) \oplus (A \oplus B) \oplus \dots) \oplus C)\ .$$

- Díky asociativitě a nekonečné asociativitě operace $\oplus$,

  $$M \approx ((B \oplus A) \oplus (B \oplus A) \oplus (B \oplus A) \oplus \dots) \oplus C\ .$$

- Operace $\oplus$ je i komutativní, $X \oplus Y \approx Y \oplus X$, takže

  $$N \approx ((A \oplus B) \oplus (A \oplus B) \oplus \dots) \oplus C \approx ((B \oplus A) \oplus (B \oplus A) \oplus \dots) \oplus C \approx M\ .$$

  Tedy $N \approx M$.

Úloha 1.4.21 (trochu pracnější). *Doplňte podrobnosti a argumenty v tomto náčrtu důkazu Cantorovy–Bernsteinovy věty pomocí operace $\oplus$.*

1.5 Dva důkazy

Dokážeme indukcí Bernoulliovu nerovnost a sporem neřešitelnost rovnice $x^2 = 2$ v oboru zlomků.

Uvedeme dva příklady matematických důkazů. První je důkaz indukcí a druhý důkaz sporem.

Tvrzení 1.5.1 (Bernoulliova nerovnost). *Pro každé reálné číslo $x \geq -1$ a celé číslo $n \geq 0$ je pravda, že*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \ .$$

Důkaz. Indukcí podle exponentu n. Začátek indukce: nerovnost dokážeme pro počáteční hodnotu $n = 0$. To je jasné, LS (levá strana) je $(1+x)^0 = 1$ a PS též $1 + 0x = 1$. Indukční krok: předpokládáme platnost nerovnosti pro danou hodnotu n a odvodíme, že platí pro o 1 zvětšenou hodnotu $n+1$. Postupujeme takto:

$$\begin{aligned} (1+x)^n &\geq 1+nx \ , \\ (1+x)(1+x)^n &\geq (1+x)(1+nx) \ , \\ (1+x)^{n+1} &\geq 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \ , \\ (1+x)^{n+1} &\geq 1+(n+1)x \ . \end{aligned}$$

Předpoklad (1. řádek) jsme vynásobili (LS i PS) *nezáporným* číslem $1 + x$, což platnost nerovnosti zachová. Ve vzniklé nerovnosti je LS co potřebujeme (tj. LS Bernoulliovy nerovnosti pro $n + 1$), ale PS má navíc člen nx^2 (viz 2. a 3. řádek). Tento člen je ale naštěstí vždy nezáporný, $nx^2 \geq 0$, takže po jeho vypuštění se PS nezvětší a dostáváme platnou nerovnost na 4. řádku, což je přesně Bernoulliova nerovnost pro $n+1$. Důkaz indukcí je úplný. Podle začátku indukce totiž Bernoulliova nerovnost platí pro $n = 0$. Podle indukčního kroku tedy platí i pro $n = 1$. Znovu podle indukčního kroku tedy platí i pro $n = 2$. A tak dál a dál, n proběhne celé $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ (kdyby ne, uvažte nejmenší $n \in \mathbb{N}_0$, že B. nerovnost neplatí) a Bernoulliova nerovnost tak platí pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a každé $x \in \mathbb{R}$ s $x \geq -1$. □

Úloha 1.5.2. *V důkazu jsme mlčky přešli případ $x = -1$ a $n = 0$, kdy jsme na levé straně vzali hodnotu*

$$0^0 = 1 \ .$$

Není ale $0^0 = 0$? Když $\alpha, \beta > 0$ jsou reálná čísla jdoucí k 0 a α k ní jde podstatně rychleji než β, pak α^β jde k 0, takže v této situaci $0^0 = 0$. Není tu nějaký problém?

Úloha 1.5.3. *Dokažte, že Bernoulliova nerovnost platí dokonce pro každé číslo n v $\mathbb{N}_0$ a reálné $x \geq -2$.*

Nerovnost je nazvána podle basilejského matematika *Jacoba Bernoulliho (1655–1705)* (ve spisu *Ars Conjectandi* položil základy teorie pravděpodobnosti, mimo jiné uvedl tzv. zákon velkých čísel). V důkazu jsme obě strany násobili nezáporným činitelem. Častou příčinou chyb v manipulacích s nerovnostmi je vynásobení obou stran veličinou, která může být někdy záporná, a neotočení nerovnosti v těchto případech. Dále jsme využili toho, že pro každé reálné číslo x je $x^2 \geq 0$. Bez přehánění lze říci, že celá matematická analýza s aplikacemi (analytická teorie čísel, matematická fyzika, numerická matematika a další) spočívá v umění zacházet s nerovnostmi a odhady.

Úloha 1.5.4. *Dokažte, že pro každá dvě nezáporná reálná čísla a, b platí nerovnost*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\ .$$

Úloha 1.5.5 (trojúhelníková nerovnost). *Dokažte, že pro každou konečnou posloupnost reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ platí nerovnost*

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|\ .$$

Úloha 1.5.6. *Proč se této nerovnosti říká trojúhelníková?*

Ve druhém důkazu dokážeme iracionalitu $\sqrt{2}$. Reálná čísla jsme vlastně ještě nezavedli, a tak to musíme trochu přeformulovat.

Tvrzení 1.5.7 (iracionalita čísla $\sqrt{2}$). *Pro žádný zlomek $\frac{a}{b}$ není pravda, že $(\frac{a}{b})^2 = 2$. Rovnice*

$$x^2 = 2$$

tedy v oboru racionálních čísel $\mathbb{Q}$ nemá řešení.

Důkaz. Povedeme ho sporem. Když $(\frac{a}{b})^2 = 2$ pro nějaký zlomek $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, tak $a^2 = 2b^2$ pro nějaká čísla $a, b \in \mathbb{N}$. Ukážeme ale, že rovnice

$$x^2 = 2y^2$$

nemá v oboru $\mathbb{N}$ řešení. Pro spor buď $a, b \in \mathbb{N}$ řešení s nejmenší složkou a (podle axiomu 1.4.1 a úlohy 1.4.6 má každá neprázdná podmnožina $\mathbb{N}$ nejmenší prvek). Z $a^2 = 2b^2$ plyne sudost čísla a^2 a nerovnost $b < a$. Tedy i a je sudé a $a = 2c$ pro nějaké $c \in \mathbb{N}$. (Kdyby totiž $a = 2c+1$ bylo liché, bylo by $a^2 = 4c^2+4c+1 = 2(2c^2+2c)+1$ liché, což by protiřečilo sudosti a^2.) Takže

$$\begin{aligned} a^2 &= 2b^2, \\ (2c)^2 &= 2b^2, \\ 4c^2 &= 2b^2, \\ 2c^2 &= b^2, \\ b^2 &= 2c^2\ . \end{aligned}$$

Z řešení a, b rovnice $x^2 = 2y^2$ jsme tak odvodili další řešení b, c. Ale $b < a$ a máme spor s minimalitou a. □

Také jsme tím dokázali, že rovnice $x^2 = 2y^2$ má v oboru celých čísel $\mathbb{Z}$ jen triviální řešení $x = y = 0$. Následující důkaz je podobný.

Úloha 1.5.8. *Ukažte, že když $a, b \in \mathbb{N}$ splňuje $a^2 = 2b^2$, pak rovnici $x^2 = 2y^2$ řeší v $\mathbb{N}$ i dvojice $2b - a, a - b$. Opět sporem dokažte, že v $\mathbb{N}$ řešení neexistuje.*

Takže $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ a $\sqrt{2}$ je iracionální číslo (v oddílu 1.7 řekneme přesně, co je $\sqrt{2}$, a dokážeme, že existuje). Toto číslo nám umožňuje v $\mathbb{R}$ snadno aritmeticky realizovat kopii kartézského čtverce $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Úloha 1.5.9. *Ukažte, že funkce*

$$f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R},\ (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta\sqrt{2}\ ,$$

je prostá. Je to tedy bijekce mezi $\mathbb{Q}^2$ a obrazem f.

1.6 Číselné obory

Zlomky a archimédovské uspořádané těleso. Nearchimédovské uspořádané těleso obsahující infinitesimální prvky, kladné prvky nekonečně blízké nule.

Známe číselné obory

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}\ .$$

Přirozená čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ jsme relativně podrobně zavedli v oddílu 1.4. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$ jsou celá čísla (symbol pro ně pochází z německého *die Zahlen* — čísla),

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

jsou racionální čísla čili zlomky, reálná čísla si představujeme jako na obě strany do nekonečna se táhnoucí nekonečně hustou přímku

$\mathbb{R}$

… ——————————————————————— …

a

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\},\ i^2 = -1\ ,$$

jsou čísla *komplexní*, jimiž se nebudeme moc zabývat. Ze čtyř hořejších inkluzí je zcela přesná jen první, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ostatní jsou pouze vnoření, kdy skutečnou inkluzi dostaneme změnou formátu prvku. Číslo $z \in \mathbb{Z}$ se stane prvkem $\mathbb{Q}$, napíšeme-li ho jako $\frac{z}{1}$. Zlomek $\alpha \in \mathbb{Q}$ je prvkem i $\mathbb{R}$ po vyjádření v desetinném zápisu ($\mathbb{R}$ pojímáme pomocí desetinných rozvojů), například $\frac{1}{9} = 0.11111\dots$. Číslo $a \in \mathbb{R}$ je i komplexní, prvek $\mathbb{C}$, po napsání ve tvaru $a + 0i$. Rozšiřování číselných oborů vynutila řešitelnost rovnic. Rovnice $5 + x = 3$ nemá řešení v $\mathbb{N}$, ale v $\mathbb{Z}$ ano:

$x = -2$. Rovnice $5x = 3$ nemá řešení v $\mathbb{Z}$, ale ve $\mathbb{Q}$ ano: $x = \frac{3}{5}$. Rovnice $x^2 = 3$ je neřešitelná ve $\mathbb{Q}$, ale v $\mathbb{R}$ je řešitelná číslem $x = \sqrt{3}$. Konečně $x^2 = -3$ v $\mathbb{R}$ nemá řešení, ale v $\mathbb{C}$ ji řeší $x = i\sqrt{3}$.

Co přesně $\mathbb{R}$ je si povíme později, nyní zpřesníme definici racionálních čísel. Zlomek $\frac{a}{b}$ s $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, je vlastně uspořádaná dvojice $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, jen v jiném zápisu. Na množině *zlomků*

$$Z := \mathbb{Z}^2 \backslash (\mathbb{Z} \times \{0\})$$

máme relaci ekvivalence

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff ad = bc\ .$$

Úloha 1.6.1. *Ověřte, že $\sim$ je relace ekvivalence na množině Z.*

Definice 1.6.2 (racionální číslo). *Racionální číslo je blok relace ekvivalence $\sim$. Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$, nepřesně řečeno zlomků, je tedy rozklad množiny zlomků Z podle $\sim$ (viz definice 1.2.5),*

$$\mathbb{Q} = Z/\!\sim\ = \{a/b \in \mathbb{Z}^2 \mid b \neq 0\}/\!\sim\ .$$

Například zlomek $\frac{6}{20} \in Z$ reprezentuje racionální číslo

$$\left\{ \frac{3a}{10a} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\} \in \mathbb{Q}\ .$$

Každé racionální číslo má jako reprezentanta *zlomek $\frac{a}{b}$ v základním tvaru*, v němž $b > 0$ a čitatel a a jmenovatel b jsou nesoudělná čísla. Připomeňme si, že čísla $a, b \in \mathbb{Z}$ jsou *nesoudělná*, pokud je společně dělí pouze -1 a 1. Podle následující úlohy jsou aritmetické operace na $\mathbb{Q}$ dobře definované.

Úloha 1.6.3. *Ověřte, že aritmetické operace $+, -, \times, :$ se zlomky respektují ekvivalenci $\sim$. Znamená to, že pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z$ platí implikace*

$$\alpha \sim \beta, \gamma \sim \delta \Rightarrow \alpha \bullet \gamma \sim \beta \bullet \delta\ ,$$

kde $\bullet$ je kterákoli ze čtyř uvedených operací.

Dvě racionální čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tedy například vynásobíme tak, že vynásobíme dva libovolné zlomky $\frac{a}{b} \in \alpha$ a $\frac{c}{d} \in \beta$ a výsledek je to racionální číslo $\gamma \in \mathbb{Q}$, že $\frac{ac}{bd} \in \gamma$.

Na všech číselných oborech máme aritmetické operace obvyklého sčítání $+$ a násobení $\cdot$ a binární relaci $<$ ostrého lineárního uspořádání, kromě oboru $\mathbb{C}$, který relaci $<$ nemá. Připomeneme, jaké algebraické struktury tak vzniknou.

Definice 1.6.4 (okruh). *Okruhem $R = (R, +, \cdot)$, podrobněji řečeno komutativním okruhem s jedničkou, se v algebře rozumí množina R se dvěma binárními operacemi „sčítání“ $+$ a „násobení“ $\cdot$ (znak $\cdot$ se často vypouští a místo $a \cdot b$ se píše jen ab) s následujícími vlastnostmi.*

1. *Jsou asociativní, pro každé* $a, b, c \in R$ *je* $(a + b) + c = a + (b + c)$ *i* $(ab)c = a(bc)$.

2. *Jsou komutativní, pro každé* $a, b \in R$ *je* $a + b = b + a$ *i* $ab = ba$.

3. *Obě operace mají dva různé neutrální prvky nulu* $0 = 0_R \in R$ *a jedničku* $1 = 1_R \in R$, *pro každé* $a \in R$ *je* $a + 0 = a$ *i* $a1 = a$.

4. *Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání, pro každé* $a, b, c \in R$ *máme* $a(b + c) = (ab) + (ac) = ab + ac$ *(závorky můžeme vynechat podle dohody, že operace* $\cdot$ *váže silněji než* $+$*).*

5. *Každý prvek má aditivní inverz, pro každé* $a \in R$ *existuje* $b \in R$, *značené* $-a$, *že* $a + b = 0$.

Základním příkladem jsou celá čísla $\mathbb{Z}$ s obvyklým sčítáním a násobením.

Úloha 1.6.5. *Prvkům* $a \in R$ *okruhu, které mají multiplikativní inverz — prvek* $b \in R$ *splňující* $ab = 1$ *— se říká jednotky okruhu (anglicky units, nezaměňovat prosím s jedničkou). Nalezněte všechny jednotky okruhu celých čísel a okruhu* $\mathbb{Z}_{24}$, *což je množina* $\{1, 2, \ldots, 24\}$ *a sčítání a násobení modulo* 24. *V kterém kruhu je* 0 *jednotkou?*

Definice 1.6.6 (těleso). *Těleso* $T = (T, +, \cdot)$, *podrobněji řečeno komutativní těleso, je okruh, v němž každý nenulový prvek je jednotkou.*

Základním příkladem jsou zlomky $\mathbb{Q}$ a obvyklé sčítání a násobení.

Úloha 1.6.7. *Pro které* $m \in \mathbb{N}$ *je okruh* $\mathbb{Z}_m$ *(*$\{1, 2, \ldots, m\}$ *se sčítáním a násobením modulo* m*) těleso?*

Z hlediska matematické analýzy na $\mathbb{R}$ je nejdůležitější následující struktura.

Definice 1.6.8 (uspořádaný okruh a uspořádané těleso). *Okruh (těleso)* $T = (T, +, \cdot)$ *je uspořádaný(é) ostrým lineárním uspořádáním* $<$, *pokud pro každé tři prvky* $a, b, c \in T$ *platí implikace*

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c \ \text{ a } \ a < b \,\&\, c > 0 \Rightarrow ac < bc\,.$$

Zlomky $\mathbb{Q}$ a reálná čísla $\mathbb{R}$ jsou vzhledem ke standardnímu uspořádání uspořádaná tělesa.

Co se týče přirozených čísel, $(\mathbb{N}, +)$ je *komutativní pologrupa* (sčítání je komutativní a asociativní) a $(\mathbb{N}, \cdot)$ je *komutativní monoid* (je to komutativní pologrupa s neutrálním prvkem). Dohromady je $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ tzv. *polookruh.* Příkladem nekomutativních operací je skládání zobrazení nebo řetězení slov z úlohy 1.2.20.

Úloha 1.6.9. *Pro které abecedy* A *je operace řetězení slov v* A^* *komutativní?*

Úloha 1.6.10. *Volným pohybem v rovině* $\mathbb{R}^2$ *rozumíme posunutí o nějaký vektor či otočení kolem nějakého bodu. V třírozměrném prostoru* $\mathbb{R}^3$ *jím rozumíme posunutí o nějaký vektor či otočení kolem nějaké přímky. Je skládání volných pohybů komutativní, je výsledek složení několika z nich nezávislý na pořadí skládání?*

Úloha 1.6.11. *Uveďte další příklady konečných okruhů a konečných těles. Ukažte, že konečný uspořádaný okruh neexistuje.*

Úloha 1.6.12. *Okruh* $(R, +, \cdot)$ *se nazývá oborem integrity, když*

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0\ .$$

Například celá čísla tvoří obor integrity a každé těleso je obor integrity (proč?). Dokažte, že každý konečný obor integrity už je těleso. Nápověda: úloha 1.4.13.

Připomeňme si, že číslo $p \in \mathbb{N}$ je *prvočíslo*, právě když $p > 1$ a jediné multiplikativní rozklady $p = kl$, $k, l \in \mathbb{N}$, jsou ty triviální s $\{k, l\} = \{1, p\}$. Množina prvočísel začíná

$$P = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ \dots\}\ .$$

Úloha 1.6.13. *Dokažte, že každé konečné těleso* T *má* p^k *prvků, kde* $k \in \mathbb{N}$ *a* p *je prvočíslo.*

Uspořádané těleso $(T, +, \cdot, <)$ je *archimédovské*, když

$$\forall\, a \in T\ \exists\, n \in \mathbb{N}:\ n_T := \overbrace{1_T + 1_T + \cdots + 1_T}^{n \text{ sčítanců}} > a\ .$$

(1_T označuje jedničku v T). Každý prvek z T tak lze přesáhnout opakovaným načítáním jedničky. Přívlastek archimédovský odkazuje na řeckého fyzika, astronoma, matematika a konstruktéra *Archiméda ze Syrakus (cca −287 – cca −212)* (ve výpočtech ploch a objemů předjímal integrální počet, spočetl přibližnou hodnotu čísla π). Tělesa $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ jsou archimédovská. Uspořádané těleso, které není archimédovské, je *nearchimédovské*. Příklad takového tělesa teď předvedeme.

Nearchimédovské těleso

Sestrojíme uspořádané těleso T obsahující prvky a větší než všechna přirozená čísla, přesněji řečeno, než všechny kopie n_T přirozených čísel $n \in \mathbb{N}$ v T. Takový prvek a v T pak je *nekonečně velký*. Pak ale pro každé $n \in \mathbb{N}$ je i

$$0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{n_T}$$

a $\frac{1}{a}$ je na druhou stranu *nekonečně malý, infinitesimální* kladný prvek v T. Pro jednoduchost značení budeme index v n_T často vypouštět a psát pouze n a podobně i $\mathbb{N}$ místo $\mathbb{N}_T$, i když půjde ne přímo o přirozená čísla, ale o jejich kopii v T.

Nejprve zavedeme na množině slov $\mathbb{Z}^* = \{a_0 a_1 \dots a_m \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$ nad nekonečnou abecedou celých čísel relaci $\prec$:

$$a_0 a_1 \dots a_m \prec b_0 b_1 \dots b_n \iff \exists\, i: \ a_i < b_i \;\&\; (j > i \Rightarrow a_j = b_j) \ ,$$

kde $<$ je obvyklé uspořádání celých čísel a hodnoty a_{m+1}, $a_{m+2}, \dots$ a b_{n+1}, $b_{n+2}, \dots$ se doplní jako nuly. Na posledním místě (čteme-li zleva), kde se obě slova liší, je tedy áčko menší.

Úloha 1.6.14. *Dokažte, že $(\mathbb{Z}^*, \prec)$ je ostré lineární uspořádání.*

Lineární uspořádání $\prec$ přeneseme ze $\mathbb{Z}^*$ na okruh

$$\mathbb{Z}[x] := \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0\}$$

polynomů s celočíselnými koeficienty a obvyklým sčítáním a násobením mnohočlenů. Klademe $(a_i, b_i \in \mathbb{Z})$

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \prec b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \iff a_0 a_1 \dots a_m \prec b_0 b_1 \dots b_n \ .$$

Úloha 1.6.15. *Nechť $a, b \in \mathbb{Z}[x]$ jsou dva různé polynomy. Dokažte, že $a(x) \prec b(x)$, právě když existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$n > n_0 \Rightarrow a(n) < b(n) \ .$$

Relace $a(x) \prec b(x)$ tak znamená, že jako funkce mají a a b hodnoty splňující $a(x) < b(x)$ pro všechna velká $x \in \mathbb{N}$. Například

$$10005x + 20000 \prec x^2 - 2x - 1 \ \text{ a } \ x^5 + 10x^4 - 3x^2 - 2x + 5 \prec x^5 + 10x^4 - 3x^2 - x + 7 \ .$$

Úloha 1.6.16. *Dokažte, že $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot, \prec)$ je uspořádaný okruh.*

Zlomky polynomů $\frac{a(x)}{b(x)}$, $a, b \in \mathbb{Z}[x]$ a $b \neq 0$, sčítáme, násobíme a dělíme obvyklým způsobem, stejně jako obyčejné zlomky. S pomocí relace ekvivalence $\frac{a(x)}{b(x)} \sim \frac{c(x)}{d(x)} \iff a(x)d(x) = b(x)c(x)$ dostáváme *těleso racionálních funkcí $\mathbb{Z}(x)$s celočíselnými koeficienty*,

$$\mathbb{Z}(x) = \left\{ \frac{a(x)}{b(x)} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}[x],\, b \neq 0 \right\} \Big/ \sim \ .$$

Použili jsme úplně stejnou konstrukci, jíž jsme předtím $\mathbb{Z}$ rozšířili na $\mathbb{Q}$. Všimněme si, že $\mathbb{Z}(x)$ obsahuje kopii tělesa $\mathbb{Q}$. Uspořádání $\prec$ rozšíříme ze $\mathbb{Z}[x]$ na $\mathbb{Z}(x)$: když jsou mnohočleny $b(x)$ a $d(x)$ kladné, to jest mají kladné vedoucí koeficienty (což můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat), klademe

$$\frac{a(x)}{b(x)} \prec \frac{c(x)}{d(x)} \iff a(x)d(x) \prec c(x)b(x) \ .$$

Úloha 1.6.17. *Dokažte, že* $(\mathbb{Z}(x), +, \cdot, \prec)$ *je uspořádané těleso.*

Těleso $T = (\mathbb{Z}(x), +, \cdot, \prec)$ je však nearchimédovské: pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$n \prec x \ \text{ a } 0 \prec \frac{1}{x} \prec \frac{1}{n}\ ,$$

kde n, 0 a $\frac{1}{n}$ bereme samozřejmě jako konstantní polynomy $n + 0x + 0x^2 + \dots$ atd. Takže x je nekonečně velký prvek a $\frac{1}{x}$ je nekonečně malý kladný prvek. Nic mystického v tom není, identický polynom $p(x) = x$ prostě pro velké kladné x hodnotami přeroste jakýkoli konstantní polynom.

Příklad nearchimédovského tělesa $(\mathbb{Z}(x), +, \cdot, \prec)$ není v naší učebnici samoúčelný, protože matematická analýza se kromě dobře známého archimédovského tělesa $\mathbb{R}$ pěstuje i v nearchimédovských tělesech s nekonečně velkými a nekonečně malými prvky. Tomu se ale věnovat nebudeme.

1.7 Reálná čísla

Definice úplného uspořádaného tělesa. Důkaz, že když takové těleso existuje, je jediné až na izomorfismus. Náčrt Cantorovy a Dedekindovy konstrukce reálných čísel. Nástin konstrukce reálných čísel pomocí desetinných rozvojů (je podrobně provedena v poslední kapitole). Důkaz neúplnosti tělesa zlomků. Důkaz úplnosti tělesa reálných čísel a její důsledky — řešitelnost různých rovnic reálnými čísly. Definice spočetné množiny a algebraického čísla. Důkaz nespočetnosti reálných čísel a existence nealgebraických čísel.

Připomeňte si definici 1.2.11 suprema podmnožiny lineárního uspořádání. Je-li $(T, +, \cdot, <)$ libovolné uspořádané těleso, pak ne každá podmnožina $X \subset T$ má supremum. Prázdná množina ho nemá, protože $H(\emptyset) = T$ a $(T, <)$ nemá nejmenší prvek (kdyby $m \in T$ byl nejmenší prvek v T, byl by $m-1$ menší prvek). Ani žádná shora neomezená množina X, například $X = \mathbb{N}$ v archimédovském tělese, nemá supremum, protože má prázdnou množinu horních mezí. Pokud už každá jiná podmnožina, neprázdná a shora omezená, supremum má, mluvíme o *úplném uspořádaném tělese.* Těleso $\mathbb{Q}$ úplné není, jak za chvíli ukážeme, ale $\mathbb{R}$ je. Vlastně to je jediné úplné uspořádané těleso.

Definice 1.7.1 (úplné uspořádané těleso). *Úplným uspořádaným tělesem rozumíme uspořádané těleso* $(T, +, \cdot, <)$*, v němž každá neprázdná a shora omezená množina* $X \subset T$ *má supremum, což je nejmenší prvek množiny* $H(X)$ *horních mezí* X*.*

Tvrzení 1.7.2 (úplnost dává archimédovskost). *Každé úplné uspořádané těleso je archimédovské.*

Důkaz. Nechť $(T, +, \cdot, <)$ je úplné uspořádané těleso. Pro spor vezmeme v T nekonečně velký prvek $a \in T$: pro každé $n \in \mathbb{N}$ je je $n < a$. Tedy $a \in H(\mathbb{N})$ a

$\mathbb{N}$ je v T shora omezená a má supremum $s = \sup(\mathbb{N}) \in T$. Podle aproximační vlastnosti suprema existuje $n \in \mathbb{N}$, že $s - \frac{1}{2} < n \le s$. Tedy

$$n + 1 > s + \frac{1}{2} > s \text{ a } n + 1 > s\ ,$$

což je vzhledem k $n + 1 \in \mathbb{N}$ spor s tím, že s je horní mezí $\mathbb{N}$. □

Reálná čísla charakterizuje následující věta.

Věta 1.7.3 (o $\mathbb{R}$). *Existuje úplné uspořádané těleso. Každá dvě úplná uspořádané tělesa jsou izomorfní, strukturně totožná. Toto až na izomorfismus jediné úplné uspořádané těleso nazýváme $\mathbb{R}$, reálná čísla.*

Druhou část věty, o izomorfismu, dokážeme teď. Podrobný důkaz první, existenční, části ponecháváme do poslední kapitoly, kde reálná čísla sestrojíme jako nekonečné desetinné rozvoje. Zde tuto konstrukci pouze načrtneme, stejně jako dvě klasické konstrukce.

Co rozumíme *izomorfismem uspořádaných těles*

$$T = (T, +, \cdot, <) \text{ a } U = (U, \oplus, \odot, \prec)\ ?$$

Je to bijekce $f\colon T \to U$ respektující obě operace a uspořádání: pro každé dva prvky $a, b \in T$ je pravda, že

$$f(a + b) = f(a) \oplus f(b),\ f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b) \text{ a } a < b \iff f(a) \prec f(b)\ .$$

Obě uspořádaná tělesa tedy mají shodnou strukturu, jen se jejich prvky jinak „jmenují“. Jak takový izomorfismus funguje uvidíme nejlépe v důkazu druhé části předchozí věty.

Tvrzení 1.7.4 (jednoznačnost $\mathbb{R}$). *Každá dvě úplná uspořádané tělesa jsou izomorfní.*

Důkaz. T a U buďte úplná uspořádaná tělesa s operacemi a uspořádáními označenými jako výše. Kopie celých čísel $m \in \mathbb{Z}$ v T označíme jako $m_T \in T$, takže 0_T je aditivní neutrální prvek v T, pro $m > 0$ je $m_T := 1_T + 1_T + \cdots + 1_T$ s m sčítanci (1_T je multiplikativní neutrální prvek v T) a pro $m < 0$ je $m_T = -(-m)_T$. Pro $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \ne 0$, pak definujeme

$$\left(\frac{m}{n}\right)_T = \frac{m_T}{n_T}$$

(levá zlomková čára je dělení v $\mathbb{Q}$ a pravá je dělení v T). Množinu těchto kopií zlomků v T označíme jako $\mathbb{Q}_T$. Podobné prvky definujeme v tělese U. Zobrazení $f\colon \mathbb{Q}_T \to \mathbb{Q}_U$,

$$f((m/n)_T) := (m/n)_U\ ,$$

pak je izomorfismus uspořádaných těles $\mathbb{Q}_T$ a $\mathbb{Q}_U$ (úloha 1.7.5). Rozšíříme ho na $f\colon T \to U$. Pro $a \in T$ definujeme

$$f(a) := \sup_U(M_a), \quad \text{kde} \quad M_a = f(\{\alpha \in \mathbb{Q}_T \mid \alpha < a\}) \; .$$

Definice je korektní, M_a je neprázdná a shora omezená (podle achimédovskosti T pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ je $n_T > a$ i $n_T > -a$, což implikuje $-n_T < a$, tedy $(-n)_U \in M_a$ a též n_U je horní mezí M_a). Patrně

$$\sup_T(\{\alpha \in \mathbb{Q}_T \mid \alpha < a\}) = a$$

(úloha 1.7.6). Pro $a \in \mathbb{Q}_T$ se tak nová hodnota $f(a)$ shoduje se starou. Ověříme, že získané rozšíření

$$f\colon T \to U$$

je bijekce a že respektuje obě operace a uspořádání.

Pro $a, b \in T$ s $a < b$ podle archimédovskosti T vezmeme zlomky $c, d \in \mathbb{Q}_T$ s

$$a < c < d < b$$

(úloha 1.7.7). Pak $f(a) \preceq f(c) \prec f(d) \preceq f(b)$ podle definice f ($f(c)$ je horní mezí M_a, $c < d$ a $f(d) \in M_b$). Tedy $f(a) \prec f(b)$ a zobrazení f je prosté. Prvek $b \in U$ buď libovolný a uvažme množinu

$$N_b = f^{-1}(\{\alpha \in \mathbb{Q}_U \mid \alpha \prec b\}) \; .$$

Jako pro M_a se vidí, že je neprázdná a shora omezená, takže položíme $a := \sup_T(N_b)$. Jak z úlohy 1.7.6 víme, $M_a = f(N_b)$ a $\sup_U(M_a) = b$. Tedy $f(a) = b$ a zobrazení f je na.

Nechť $a, b \in T$. Že f zachovává uspořádání,

$$a < b \iff f(a) \prec f(b) \; ,$$

jsme již dokázali v rámci důkazu prostoty f. Nyní dokážeme, že

$$f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b) \; .$$

Můžeme předpokládat, že $a, b > 0_T$. Máme tak v U dokázat rovnost

$$\sup_U(M_{a \cdot b}) = \sup_U(M_a) \odot \sup_U(M_b) \; .$$

Díky aproximační vlastnosti suprema pro dané kladné $\varepsilon \in U$ existuje kladné $\gamma \in \mathbb{Q}_T$, že

$$\gamma < a \cdot b \;\text{ a }\; f(\gamma) \succ f(a \cdot b) \ominus \varepsilon \; .$$

V rovnici $\gamma = a \cdot \frac{\gamma}{a}$ činitel a nahradíme trochu menším zlomkem α a položíme $\beta = \frac{\gamma}{\alpha}$. Dostaneme tak kladné $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_T$, že $\alpha < a$, $\beta < b$ a $\gamma = \alpha \cdot \beta$. Pak ovšem

$$f(a \cdot b) \ominus \varepsilon \prec f(\gamma) = f(\alpha) \odot f(\beta) \prec f(a) \odot f(b) \; .$$

Na druhou stranu pro dané kladné $\varepsilon \in U$ stejně vezmeme kladné prvky α, β v Q_T, že

$$\alpha < a,\ \beta < b,\ f(a) \ominus \varepsilon \prec f(\alpha) \ \text{ a } \ f(b) \ominus \varepsilon \prec f(\beta)\ .$$

Pak

$$\begin{aligned} &f(a) \odot f(b) \ominus \varepsilon \odot (f(a) \oplus f(b)) \prec (f(a) \ominus \varepsilon) \odot (f(b) \ominus \varepsilon) \\ &\prec f(\alpha) \odot f(\beta) = f(\alpha \cdot \beta) \prec f(a \cdot b)\ , \end{aligned}$$

protože $\alpha \cdot \beta < a \cdot b$. Pro každé kladné $\varepsilon \in U$ tak máme

$$f(a \cdot b) \ominus \varepsilon \prec f(a) \odot f(b) \prec f(a \cdot b) \oplus \varepsilon \odot (f(a) \oplus f(b))\ .$$

Tudíž $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$. Podobně se dokáže, že f respektuje sčítání. □

Úloha 1.7.5. *Ukažte, že $f\colon \mathbb{Q}_T \to \mathbb{Q}_U$, $(a/b)_T \mapsto (a/b)_U$, je izomorfismus uspořádaných těles.*

Úloha 1.7.6. *Dokažte, že v archimédovském uspořádaném tělese T pro každý prvek $a \in T$ je*

$$\sup(\{\alpha \in \mathbb{Q}_T \mid \alpha < a\}) = a\ .$$

Úloha 1.7.7. *Dokažte, že v archimédovském uspořádaném tělese T pro každé dva prvky $a < b$ existují zlomky $c, d \in \mathbb{Q}_T$, že $a < c < d < b$.*

Zbývá ovšem dokázat první část věty 1.7.3. Jak jsme už napsali, podrobně to provedeme v poslední kapitole. Nyní dvě klasické a jednu méně klasickou konstrukci $\mathbb{R}$ nastíníme.

Nástin Cantorovy a Dedekindovy konstrukce $\mathbb{R}$

Cantorova konstrukce $\mathbb{R}$. Posloupnost zlomků $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ nazveme *cauchyovskou*, když pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}_0$, že

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{1}{k}\ .$$

Členy posloupnosti se tak k sobě vzájemně neomezeně blíží. Termín odkazuje na francouzského matematika *Augustina Louise Cauchyho (1789–1857)* (jeden z hlavních tvůrců matematické analýzy, založil analýzu komplexních funkcí komplexní proměnné, v exilu pobýval v Čechách). Dvě posloupnosti zlomků $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{Q}$ jsou *ekvivalentní*, značeno $(a_n) \sim (b_n)$, když pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje index n_0, že $n > n_0 \Rightarrow |a_n - b_n| < \frac{1}{k}$. Odpovídající členy obou posloupností se tak k sobě neomezeně přibližují.

Úloha 1.7.8. *Relace $\sim$ je ekvivalence na množině posloupností zlomků.*

Definice 1.7.9 (Cantorova definice reálných čísel). *Klademe*

$$\mathbb{R} = \{\textit{cauchyovské posloupnosti zlomků}\}/\sim\ .$$

Na takto definovaných reálných číslech se sčítání a násobení zavede po složkách. Množina $\mathbb{Q}$ je do $\mathbb{R}$ vnořena konstantními posloupnostmi,

$$\mathbb{Q} \ni \alpha \mapsto [(\alpha, \alpha, \dots)] \in \mathbb{R}\ ,$$

zlomku α tak odpovídá blok $\sim$ obsahující konstantní posloupnost $(\alpha, \alpha, \dots)$. Spolu s níže popsaným lineárním uspořádáním pak vznikne úplné uspořádané těleso.

Úloha 1.7.10. *Pro dvě posloupnosti zlomků $a = (a_n)$ a $b = (b_n)$ reprezentující dva různé prvky $a, b \in \mathbb{R}$ položíme*

$$a < b \iff \exists\, n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow a_n < b_n\ .$$

Dokažte, že tak korektně definujeme ostré lineární uspořádání $(\mathbb{R}, <)$. Dokažte, že v něm má každá neprázdná a shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ supremum.

Dedekindova konstrukce $\mathbb{R}$ pochází od německého matematika *Richarda Dedekinda (1831–1916)* (jeho další důležité práce jsou z algebraické teorie čísel a z teorie ideálů), který ji zveřejnil v r. 1872, ale podle vlastních slov na ni přišel již o 14 let dříve. *Řezem* na množině zlomků $\mathbb{Q}$ nazveme každou takovou uspořádanou dvojici množin (A, B), že (i) $A \cup B = \mathbb{Q}$, (ii) $A, B \neq \emptyset$, (iii) $A < B$ (pro každé $a \in A$ a $b \in B$ je $a < b$) a (iv) množina A nemá největší prvek.

Definice 1.7.11 (Dedekindova definice reálných čísel). *Klademe*

$$\mathbb{R} = \{(A, B) \mid (A, B) \textit{ je řez na množině racionálních čísel}\}\ .$$

Na této množině $\mathbb{R}$ lze opět zavést sčítání, násobení a relaci uspořádání tak, že vznikne úplné uspořádané těleso.

Úloha 1.7.12. *Pro dva různé řezy $a = (A, B)$ a $b = (C, D)$ na $\mathbb{Q}$ odpovídající dvěma různým prvkům $a, b \in \mathbb{R}$ položíme*

$$a < b \iff A \subset C\ .$$

Dokažte, že tak definujeme ostré lineární uspořádání $(\mathbb{R}, <)$. Dokažte, že v něm má každá neprázdná a shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ supremum.

Nástin konstrukce $\mathbb{R}$ nekonečnými desetinnými rozvoji

Reálná čísla zavedeme jako nekonečné desetinné rozvoje. Jejich příklady jsou třeba

$$0 = -0.00\dots,\ -5089.335\dots,\ 40.125 = +40.12500\dots \quad \text{či} \quad -\pi = -3.14159\dots$$

(první a třetí výpustka $\dots$ znamená samé nuly, čtvrtá pokračování jednoznačně určeného rozvoje čísla π a druhá je blíže neurčená). Podrobně je tato konstrukce reálných čísel popsána v poslední kapitole 6.

Definice 1.7.13 (reálné číslo). *Nechť R je množina všech oznaménkovaných nekonečných posloupností*

$$R = \{\pm a_0 a_1 a_2 \ldots \mid a_0 \in \mathbb{N}_0, a_1, a_2, \dots \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\} ,$$

kterým říkáme rozvoje. Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je rozklad

$$\mathbb{R} = R/\sim$$

podle následující ekvivalence $\sim$. Pro každé $r, r' \in R$ je samozřejmě $r \sim r$ a $r \sim r' \Rightarrow r' \sim r$. Dále $+000\cdots \sim -000\ldots$ a pro každé $a_0 \in \mathbb{N}_0$ a k-tici $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{0,1,\ldots,9\}$ s $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ a $k = 0$ je povoleno, klademe

$$\pm a_0 a_1 a_2 \ldots a_k 000 \cdots \sim \pm a_0 a_1 a_2 \ldots a_{k-1}(a_k - 1)999\ldots ,$$

se stejným znaménkem na obou stranách.

Ekvivalence $\sim$ tak zachycuje dvojí zápisy jednoho reálného čísla, jako například

$$-40.125000\ldots = -40.124999\ldots, \ +17.000\ldots = +16.999\ldots$$

a podobně, a dále to, že na znaménku nuly nezáleží. Množinu $\mathbb{R}$ tvoří triviální jednoprvkové bloky rozvojů nekončících ani nekonečně mnoha devítkami ani nekonečně mnoha nulami a popsané dvouprvkové bloky.

V praxi zápisy desetinných rozvojů podle definice 1.7.13 zjednodušujeme následujícími konvencemi. První člen rozvoje a_0 je od následujících oddělen desetinnou tečkou či čárkou a samotné a_0 je obvykle zapsáno slovem nad abecedou $\{0,1,\ldots,9\}$ v dekadickém zápisu. Znaménko $+$ se vynechává, stejně jako nekonečné úseky nul. Nenásleduje-li za desetinnou tečkou nic, je vynechána. Elipsa $\ldots$ znamená, že pokračování rozvoje je z kontextu jasné — dokážeme samozřejmě zapsat jen konečné a to ještě nepříliš dlouhé rozvoje, o nekonečných si jen vyprávíme.

Připomeneme si obvyklé uspořádání reálných čísel.

Definice 1.7.14 (uspořádání R a $\mathbb{R}$). *Nechť $a = \pm a_0 a_1 \ldots$ a $b = \pm b_0 b_1 \ldots$ jsou dva rozvoje. Bez újmy na obecnosti jsou obě znaménka $+$, další případy se na tento snadno převedou. Pak klademe*

$$a < b \iff \exists k \in \mathbb{N}_0 : \ a_j = b_j \text{ pro } 0 \le j < k, \text{ ale } a_k < b_k ,$$

kde $<$ a $\le$ na pravé straně ekvivalence je obvyklé uspořádání celých čísel. Pro dvě různá reálná čísla α a β reprezentovaná rozvoji a a b, $a \not\sim b$, definujeme $\alpha < \beta$, právě když $a < b$.

Úloha 1.7.15. *Jak převedeme porovnání dvou rozvojů s obecnými znaménky na případ dvou kladných?*

Jde vlastně o *lexikografické (slovníkové)* uspořádání podle cifer a_n a b_n v pořadí důležitosti zleva doprava. Dokážete, že $<$ je ostré lineární uspořádání na R i na $\mathbb{R}$. Toto uspořádání osvětluje, proč se rozvoje jako $-1.00\ldots$ a $-0.99\ldots$ v $\sim$ ztotožňují. *Skokem* v lineárním uspořádání $(X,<)$ rozumíme takovou dvojici $\{a,b\}\subset X$, $a\neq b$, že pro žádné $c\in X$ není $a<c<b$ ani $b<c<a$. Řekneme, že $(X,<)$ je *husté lineární uspořádání*, pokud pro každé dva prvky $a<b$ z X existuje $c\in X$, že $a<c<b$. Lineární uspořádání je tedy husté, právě když nemá žádný skok.

Úloha 1.7.16 (o skoku). *Nechť $(X,<)$ je lineární uspořádání, jehož všechny skoky jsou disjunktní, a S je relace na X definovaná: aSb, právě když $a=b$ nebo $\{a,b\}$ je skok. Dokažte, že S je ekvivalence a $(X/S,<)$ (kde $<$ přeneseme na X/S zřejmým způsobem) je korektně definované husté lineární uspořádání.*

Úloha 1.7.17. *Dokažte, že $(R,<)$ z definice 1.7.14 je ostré lineární uspořádání. Dokažte, že skoky v $(R,<)$ jsou přesně dvouprvkové bloky ekvivalence $\sim$ z definice 1.7.13.*

Kombinace obou úloh ukazuje, že definice uspořádání $(\mathbb{R},<)$ na reálných číslech je korektní a že toto uspořádání je husté.

Jak se reálná čísla zadaná rozvoji sčítají a násobí? Definujeme to pomocí formální konvergence posloupností rozvojů a pomocí zkrácení (rozvojů). Posloupnost $\alpha=(a^{(1)},a^{(2)},\ldots)$ rozvojů $a^{(n)}=\pm a_0^{(n)}a_1^{(n)}\ldots$ *formálně konverguje*, když je znaménko rozvoje $a^{(n)}$ od určitého indexu n dále neměnné a když pro každé $k\in\mathbb{N}_0$ existuje $n_0\in\mathbb{N}$, že $n>n_0\Rightarrow a_k^{(n)}=a_k^{(n+1)}$, to jest k-tá cifra rozvoje $a^{(n)}$ je od indexu n_0+1 dále neměnná. *Formální limitou posloupnosti* α pak rozumíme rozvoj tvořený stabilizovaným znaménkem a stabilizovanými ciframi rozvojů $a^{(n)}$. *Zkrácení* je rozvoj, který má od jistého indexu dále pouze nuly. Pro index $n\in\mathbb{N}_0$ je *n-té zkrácení $a\,|\,n$ rozvoje* $a=\pm a_0a_1\ldots$ rozvoj se stejným znaménkem a ciframi od $(n+1)$-té dále nahrazenými nulami,

$$a\,|\,n:=\pm a_0a_1\ldots a_n000\ldots\,.$$

Zkrácení chápeme i jako zlomek,

$$\pm a_0a_1\ldots a_n000\cdots=\pm\left(a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}\right).$$

Naopak, každý zlomek a/b se jmenovatelem rovným mocnině 10 chápeme přirozeně i jako zkrácení, například

$$-\frac{987}{25}=-\frac{3948}{100}=-39.48=-39.48000\cdots=-(39)48000\ldots\,.$$

Množinu všech zkrácení označíme jako T. Všimněme si, že každý dvouprvkový blok ekvivalence $\sim$, kromě $\{+0.00\ldots,-0.00\ldots\}$, obsahuje právě jedno zkrácení a každé zkrácení je prvkem dvouprvkového bloku.

Úloha 1.7.18. *Nechť $a = \pm a_0 a_1 \ldots$ je rozvoj. Pak posloupnost zkrácení*

$$(a \,|\, 0,\ a \,|\, 1,\ a \,|\, 2,\ \ldots)$$

formálně konverguje a její formální limita je a.

Na zkráceních braných jako zlomky tak máme definované sčítání a násobení. Posloupnost zkrácení $(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots)$ je *cauchyovská*, když pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že $m, n > n_0 \Rightarrow |a^{(m)} - a^{(n)}| < 1/k$. V kontrastu s obvyklými limitami posloupností (viz budoucí věta 2.2.12) cauchyovská posloupnost zkrácení nemusí mít formální limitu. Jednoduché příklady jsou

$$+1.00\ldots,\ -0.100\ldots,\ +0.0100\ldots,\ -0.00100\ldots,\ +0.000100\ldots,\ \ldots$$

a

$$-1.00\ldots,\ -0.900\ldots,\ -1.00\ldots,\ -0.9900\ldots, -1.00\ldots,\ -0.99900\ldots,\ \ldots\ .$$

Obě posloupnosti jsou cauchyovské, ale v první se nestabilizuje znaménko a ve druhé cifry. Jak ale dokážeme v kapitole 6, každá cauchyovská posloupnost zkrácení $(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots)$ má *formální limitu v $\mathbb{R}$* — dá se napsat jako sjednocení dvou formálně konvergentních podposloupností s formálními limitami $a, b \in R$, jež se mohou (ale nemusí) lišit, avšak jsou vždy ekvivalentní, $a \sim b$. To přesně ilustrují obě předchozí posloupnosti. *Formální limitu v $\mathbb{R}$* cauchyovské posloupnosti zkrácení pak definujeme jako reálné číslo

$$\lim_{\mathbb{R}} a^{(n)} := \{c \in R \mid c \sim a\} = \{c \in R \mid c \sim b\} \in \mathbb{R}\ .$$

Snadno se vidí (viz kapitola 6), že posloupnost zkrácení jakéhokoli rozvoje je cauchyovská a že cauchyovskost se zachovává součty i součiny. Tím se otevírá cesta k přirozené definici aritmetických operací s reálnými čísly.

Definice 1.7.19 (aritmetika v $\mathbb{R}$). *Nechť $a = \pm a_0 a_1 \ldots$ a $b = \pm b_0 b_1 \ldots$ jsou rozvoje dvou reálných čísel. Jejich součet, resp. součin, definujeme jako formální limitu v $\mathbb{R}$ posloupnosti součtů, resp. součinů, zkrácení a a b:*

$$a + b := \lim_{\mathbb{R}} (a \,|\, n + b \,|\, n) \quad a \quad ab := \lim_{\mathbb{R}} ((a \,|\, n)(b \,|\, n))\ .$$

Například pro reálná čísla s rozvoji $a = +1.00\ldots$ a $b = -0.99\ldots$ máme posloupnost

$$(a \,|\, n + b \,|\, n) = (+1.00\ldots,\ +0.100\ldots,\ +0.0100\ldots,\ \ldots)\ ,$$

jež má dokonce formální limitu, rovnou rozvoji $+0.00\ldots$. Definice 1.7.19 tak dává $a + b = 0$, jak jsme čekali. (Platí dokonce více, než s čím se spokojuje definice 1.7.19, totiž že posloupnosti zkrácení tvaru $(a \,|\, n + b \,|\, n)$ a $((a \,|\, n)(b \,|\, n))$ mají vždy formální limitu v R a ne pouze v $\mathbb{R}$, ale to už si necháme do 6. kapitoly.)

Věta 1.7.20 ($\mathbb{R}$ pomocí rozvojů). *Sčítání a násobení reálných čísel v definici 1.7.19 je korektní — posloupnosti součtů a součinů zkrácení rozvojů dvou reálných čísel mají formální limity v $\mathbb{R}$ a ty nezávisí na volbě rozvojů reprezentujících obě čísla v ekvivalenci $\sim$ z definice 1.7.13. Obě operace a uspořádání z definice 1.7.14 vytvářejí úplné uspořádané těleso $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$.*

Úplnost $(\mathbb{R}, <)$ dokážeme za chvíli. Jak víme, reálná čísla v sobě obsahují kopii racionálních čísel $\mathbb{Q}$ a tato kopie je *prvotěleso* tělesa $\mathbb{R}$, skládá se právě ze všech prvků tělesa $\mathbb{R}$ vygenerovaných z $1_{\mathbb{R}}$ pomocí aritmetických operací. S konečným prvotělesem jsme se setkali v úloze 1.6.13. *Periodický* rozvoj $a = \pm a_0 a_1 \dots$ splňuje $a_n = a_{n+p}$ pro každé $n > n_0$ a nějaké pevné $p \in \mathbb{N}$. Často se této vlastnosti říká i *eventuální periodičnost.* Například

$$-\frac{1}{1300} = -0.000769230769230769230\dots$$

je periodický rozvoj s $n_0 = 3$ a $p = 6$. Má-li $\alpha \in \mathbb{R}$ dva rozvoje, pak podle definice $\sim$ jsou oba periodické.

Tvrzení 1.7.21 (periodické rozvoje). *Prvotěleso tělesa reálných čísel, kopie $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$, je tvořeno právě reálnými čísly s periodickými rozvoji.*

Větu 1.7.20 a tvrzení 1.7.21 dokážeme v závěrečné kapitole 6.

Úplnost reálných čísel

Připomeňte si definici suprema (a infima) v obecném lineárním uspořádání z definice 1.2.11, zmínili jsme ji i pro obecné částečné uspořádání. Budeme ho teď používat v obvyklých lineárních uspořádáních $(\mathbb{Q}, <)$ a $(\mathbb{R}, <)$. Pomůže pár úloh.

Úloha 1.7.22. *Supremum i infimum, když existují, jsou jednoznačně určené.*

Úloha 1.7.23. *$(X, \leq)$ buď lineárně uspořádaná množina. Ukažte, že $\sup(\emptyset)$ je nejmenší prvek X, když existuje, a podobně $\inf(\emptyset)$ je největší prvek X. Co je $\sup(X)$ a $\inf(X)$?*

Dvě následující úlohy se týkají suprem a infim v částečných uspořádáních

Úloha 1.7.24. *Uvažme neostré částečné uspořádání $(\mathbb{N}, \mid)$ přirozených čísel pomocí dělitelnosti. Ukažte, že každá neprázdná podmnožina množiny $\mathbb{N}$ v něm má infimum a každá konečná podmnožina supremum.*

Úloha 1.7.25. *Uvažme neostré částečné uspořádání $(X = \mathcal{P}(M), \subset)$ na potenci nějaké množiny M relací „být podmnožinou“. Ukažte, že každá podmnožina množiny X (to jest každý systém podmnožin množiny M) má infimum i supremum.*

Ukážeme, že uspořádání zlomků $(\mathbb{Q}, <)$ není úplné, obsahuje neprázdné a shora omezené podmnožiny nemající supremum. K tomu se bude hodit jedno lemma.

Lemma 1.7.26 (spojitost funkce čtverce). *Nechť $\mathbb{Q}_{>0}$ jsou kladné zlomky a $\mathbb{R}_{>0}$ jsou kladná reálná čísla. Pak funkce*

$$f(x) = x^2 \colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$$

i „tatáž" funkce z $\mathbb{R}_{>0}$ do $\mathbb{R}_{>0}$ je rostoucí a spojitá (viz definici 1.2.26), tedy

$$\forall a\ \forall m\ \exists n \colon (a < b < a + 1/n \Rightarrow a^2 < b^2 < a^2 + 1/m)\ \& \\ (a - 1/n < b < a \Rightarrow a^2 - 1/m < b^2 < a^2)$$

(a, b jsou z $\mathbb{Q}_{>0}$, respektive z $\mathbb{R}_{>0}$, a m, n jsou z $\mathbb{N}$).

Důkaz. Když $a < b < a + 1/n$, tak jistě $a^2 < b^2$ a $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) < (1/n)(2a+1/n) \le (2a+1)/n$ je menší než $1/m$, je-li n větší než $(2a+1)m$. V první implikaci tedy pro dané m stačí za n vzít třeba $\lceil (2a+1)m \rceil + 1$ (číslo $(2a+1)m$ zaokrouhlené nahoru plus jedna). V druhé implikaci podobně $a - 1/n < b < a$ dává $b^2 < a^2$ a $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) < (1/n)2a = (2a)/n$ je menší než $1/m$, je-li n větší než $2am$. Pro $n = \lceil (2a + 1)m \rceil + 1$ tak je splněna konjukce obou implikací. $\square$

Smysl lemmatu je v tom, že pro dané a se pro b neomezeně blížící k a i b^2 neomezeně blíží k a^2, se zachováním nerovnosti mezi a a b.

Tvrzení 1.7.27 (neúplnost $\mathbb{Q}$). *V uspořádání $(\mathbb{Q}, <)$ je množina zlomků*

$$A = \{\alpha \in \mathbb{Q}_{>0} \mid \alpha^2 < 2\} \neq \emptyset$$

a shora omezená, ale nemá supremum.

Důkaz. Jistě $1 \in A$ a $a < 2$ pro každé $a \in A$. Ukážeme, že žádné $c \in \mathbb{Q}$ není supremem množiny A. Když $c \le 0$, jistě není horní mezí A, a proto nechť $c > 0$.

1. Nechť $c^2 < 2$. Podle předchozího lemmatu existuje $n \in \mathbb{N}$, že stále $(c + 1/n)^2 < 2$. Pak ale $c + 1/n \in A$ a $c + 1/n > c$, takže c není horní mezí A a ani supremem.

2. Nechť $c^2 = 2$. Podle tvrzení 1.5.7 tento případ nenastává.

3. Nechť $c^2 > 2$. Podle předchozího lemmatu existuje $n \in \mathbb{N}$, že stále $(c - 1/n)^2 > 2$. Pro každé $a \in A$ máme $a^2 < 2 < (c - 1/n)^2$, tedy $a < c - 1/n$ (viz úloha 1.7.28). Takže $c - 1/n$ je horní mezí A. Ale $c - 1/n < c$, takže c není nejmenší horní mezí množiny A a ani jejím supremem.

Tyto tři případy vyčerpávají všechny možnosti a žádné $c \in \mathbb{Q}$ tak není supremem množiny A. $\square$

Úloha 1.7.28. *Pro dva zlomky α, β jsme použili implikaci $\alpha^2 < \beta^2 \Rightarrow \alpha < \beta$. Kdy platí?*

Úloha 1.7.29. *Ukažte, že v lineárním uspořádání $(\mathbb{Z}(x), \prec)$ (viz úloha 1.6.17 a definice před ní) neprázdná a shora omezená množina*

$$M = \left\{ \frac{x}{2}, \frac{2x}{3}, \frac{3x}{4}, \frac{4x}{5}, \dots \right\}$$

nemá supremum.

V kontrastu s $(\mathbb{Q}, <)$ či $(\mathbb{Z}(x), \prec)$ lineární uspořádání $(\mathbb{R}, <)$ takové díry nemá.

Věta 1.7.30 (úplnost $\mathbb{R}$). *Každá neprázdná a shora omezená množina $A \subset \mathbb{R}$ reálných čísel má supremum. Uspořádání $(\mathbb{R}, <)$ je tedy úplné.*

Důkaz. $A \subset \mathbb{R}$ buď neprázdná a shora omezená. Zvolíme si reprezentace čísel v A pomocí rozvojů. Podle úlohy 1.7.17 uspořádání na této volbě nezávisí a tedy na ní nezávisí ani existence suprema a jeho hodnota. Zadefinujeme cifry jistého rozvoje c, který (reprezentuje reálné číslo, jež) bude supremem A. Bez újmy na obecnosti jsou všechna čísla $\alpha = \pm\alpha_0\alpha_1\dots$ v A kladná, obecný případ se na tento snadno převede (úloha 1.7.31). Položíme $A_0 = A$ a pro $n = 0, 1, 2, \dots$ postupně definujeme cifry c_n a množiny $A = A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ takto:

$$c_n := \text{největší prvek v } \{\alpha_n \mid \alpha \in A_n\} \ \text{ a } \ A_{n+1} := \{\alpha \in A_n \mid \alpha_n = c_n\}\ .$$

Tvrdíme, že číslo (reprezentované rozvojem)

$$c = +c_0c_1c_2\dots$$

je dobře definované a je supremem A. Protože je A shora omezená, je shora omezená (a tedy konečná) i množina cifer $\{\alpha_0 \mid \alpha \in A_0\} \subset \mathbb{N}_0$ a cifra c_0 je dobře definovaná. Pro $n > 0$ už bereme maximum z nějaké podmnožiny $\{0, 1, \dots, 9\}$ a jediným problémem by bylo, kdyby $A_n = \emptyset$. Z definice A_n ale snadno indukcí plyne, že vždy $A_n \neq \emptyset$. Rozvoj c je tedy korektně definovaný.

Ukážeme, že c je horní mez A. Nechť $\alpha \in A = A_0$. Z definice c_0 plyne, že $\alpha_0 \le c_0$. Když $\alpha_0 < c_0$, pak $\alpha < c$. Když $\alpha_0 = c_0$, pak z definice c_1 a A_1 plyne, že $\alpha \in A_1$ a $\alpha_1 \le c_1$. Když $\alpha_1 < c_1$, pak $\alpha < c$. Když $\alpha_1 = c_1$, pak z definice c_2 a A_2 plyne, že $\alpha \in A_2$ a $\alpha_2 \le c_2$. A tak dále. Když pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$ poprvé nastane $\alpha_n < c_n$, pak $\alpha < c$. Když pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ stále $\alpha_n = c_n$, pak $\alpha = c$ (a $c = \alpha$ je největší prvek A).

Ukážeme, že c je nejmenší horní mez A. Nechť d je rozvoj a $d < c$. Lze předpokládat, že $d > 0$. Podle definice uspořádání na $\mathbb{R}$ existuje takové $n \in \mathbb{N}_0$, že $d_j = c_j$ pro každé $0 \le j < n$, ale $d_n < c_n$. Vezmeme $\alpha \in A_n$, že $\alpha_n = c_n$. Z definice množiny A_n plyne, že $\alpha_j = c_j$ pro každé $0 \le j \le n$. To ale znamená, že $d < \alpha \in A$. Takže c je nejmenší horní mez A. □

Úloha 1.7.31. *Jak v důkazu převedeme obecnou $A \subset \mathbb{R}$ na případ, že A má jen kladné prvky?*

Analogicky se dokáže, že každá neprázdná a zdola omezená množina $A \subset \mathbb{R}$ má infimum. Je-li A shora resp. zdola neomezená, píšeme $\sup(A) = +\infty$ resp. $\inf(A) = -\infty$, viz za chvíli zavedená rozšířená reálné osa $\mathbb{R}^*$.

Z úplnosti $(\mathbb{R}, <)$ plyne, že — na rozdíl od $\mathbb{Q}$ — je v $\mathbb{R}$ rovnice $x^2 = 2$ řešitelná.

Důsledek 1.7.32 (existence $\sqrt{2}$). *Rovnice*

$$x^2 = 2$$

má v oboru $\mathbb{R}$ řešení.

Důkaz. V lineárním uspořádání $(\mathbb{R}, <)$ položíme

$$c := \sup(\{a \in \mathbb{R} \mid a > 0 \ \&\ a^2 < 2\})\ .$$

Číslo c je definované korektně, protože daná množina je neprázdná a shora omezená (obsahuje číslo 1 a její každý prvek je menší než např. 2). Stejně jako v důkazu tvrzení 1.7.27 plyne, že případy $c^2 > 2$ a $c^2 < 2$ nenastanou, protože při nich c není supremem dané množiny. Zbývá $c^2 = 2$ a c je řešením $x^2 = 2$. □

Úloha 1.7.33. *Dokažte, že rovnice $x^2 - 2 = 0$ má v $\mathbb{R}$ právě dvě řešení.*

Úloha 1.7.34. *Dokažte následující zobecnění důsledku 1.7.32.*

Tvrzení 1.7.35 (odmocnina). *Pro každé $q \in \mathbb{N}$ a reálné $a \geq 0$ existuje právě jedno reálné $b \geq 0$, že*

$$b^q = a\ .$$

Hodnotu b, q-tou odmocninu z a, značíme $b = \sqrt[q]{a} = a^{1/q}$.

Úloha 1.7.36. *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $q \in \mathbb{N}$. Kdy má rovnice $x^q = a$ více než jedno řešení $x \in \mathbb{R}$? Kdy nemá žádné?*

Úloha 1.7.37. *Dokažte, že pro každé nezáporné $a, b \in \mathbb{R}$ a $q \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[q]{ab} = \sqrt[q]{a}\sqrt[q]{b}$.*

Úloha 1.7.38. *Dokažte, že pro každé nezáporné $a \in \mathbb{R}$ a $q, s \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[s]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[sq]{a}$.*

V kapitole 4 ve větě 4.2.4 dokážeme, že široká třída rovnic $f(x) = 0$ zobecňujících $x^2 - 2 = 0$, $x^q - a = 0$ a podobně má díky úplnosti $\mathbb{R}$ v oboru reálných čísel řešení. Tyto výsledky budeme ale potřebovat mnohem dříve, a tak nyní jednu formu této věty uvedeme jako úlohu.

Úloha 1.7.39. *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 1.7.40 (řešitelnost rovnic). *Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce (viz definice 1.2.26) definovaná na neprázdném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a reálné α splňuje* $\inf(f(I)) < \alpha < \sup(f(I))$ *(infimum může být $-\infty$ a supremum $+\infty$). Pak rovnice*

$$f(x) = \alpha$$

má vždy řešení $x \in I$.

Vedle čísla $\sqrt{2}$ a podobných odmocnin jsou i jiné příklady *iracionálních čísel*, čísel ležících v $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Úloha 1.7.41. *Reálná čísla*

$$2015.171771777177771777771\ldots \quad a \quad -0.12345678910111213141516171819\ldots$$

jsou iracionální.

Osvěžíme si značení pro intervaly reálných čísel (které se lehce rozšíří na libovolné částečné uspořádání): pro $a, b \in \mathbb{R}$ klademe

$$[a, b) := \{z \in \mathbb{R} \mid a \le z \;\&\; z < b\},\ (-\infty, a] := \{z \in \mathbb{R} \mid z \le a\}$$

a podobně. Hranatá závorka tak vyznačuje náležení po ní následujícího prvku do definované množiny a kulatá jeho nenáležení. Pro $a > b$ jsou tyto intervaly prázdné a též $[a, a) = (a, a] = (a, a) = \emptyset$. V současné matematické literatuře se stále vyskytuje značení intervalů francouzské, přesněji bourbakistické, provenience pomocí obrácených závorek, např. $]a, b[$ znamená (a, b), $]a, b]$ znamená $(a, b]$ a podobně.

Úloha 1.7.42. *Jak se vám líbí Bourbakiho značení intervalů?*

Příjmení francouzského generála *Charlese-Denise Bourbakiho (1816–1897)* převzala ve třicátých letech 20. století skupina francouzských matematiků jako kolektivní pseudonym a nazvali se *Nicolas Bourbaki.* N. Bourbaki je autorem asi 10 vlivných matematických učebnic (i když v současnosti už se to vše propadlo do historie): Teorie množin, Algebra, Topologie, Funkce reálné proměnné, Topologické vektorové prostory, Integrace, Komutativní algebra, Lieovy grupy a algebry, Spektrální teorie, Algebraická topologie.

Důsledek 1.7.43 (Cantorova věta o vnořených intervalech). *Nechť $a_1 \le b_1$, $a_2 \le b_2$, ... jsou reálná čísla a*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$$

jsou do sebe vnořené intervaly reálných čísel. Pak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \ne \emptyset$$

— některé reálné číslo leží ve všech intervalech. Pokud navíc délky intervalů jdou k 0*, pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* n_0 *s vlastností* $n > n_0 \Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon$*, pak*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\alpha\}$$

— existuje právě jedno reálné číslo, jež leží ve všech intervalech.

Důkaz. Podle předpokladu máme dány takové dvě posloupnosti reálných čísel (a_n) a (b_n), že

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \; \ldots \le b_3 \le b_2 \le b_1 \ .$$

Položíme

$$\alpha := \sup(\{a_1, a_2, \ldots\}) \ .$$

Množina $\{a_1, a_2, \ldots\}$ je jistě neprázdná a shora omezená — každé b_n je její horní mezí — a definice čísla α je proto korektní. Protože α je její horní mezí, pro každé n je $a_n \le \alpha$. Protože to je nejmenší horní mez, pro každé n je $\alpha \le b_n$. To přesně znamená, že pro každé n je $\alpha \in [a_n, b_n]$ — α leží v průniku všech intervalů. Je-li $\beta \in \mathbb{R}$ jakékoli jiné číslo, pak $\beta \in [a_n, b_n]$ znamená, že $|\beta - \alpha| \le b_n - a_n$. Leží-li také β ve všech intervalech a jdou-li jejich délky $b_n - a_n$ k 0, pak $|\beta - \alpha| < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$. Tedy $\beta = \alpha$ a průnik je jen jednoprvkový. □

Nicméně ani prázdná ani žádná shora neomezená množina reálných čísel supremum nemá. Příčinou je skutečnost, že $(\mathbb{R}, <)$ nemá ani nejmenší ani největší prvek. Tak je k $\mathbb{R}$ přidáme.

Definice 1.7.44 (rozšířená reálná osa). *Rozšířenou reálnou osou rozumíme lineární uspořádání*

$$(\mathbb{R}^*, <) = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, <) \ ,$$

kde $-\infty$ *a* $+\infty$ *jsou dva nové, do* $\mathbb{R}$ *nepatřící, různé prvky „minus nekonečno“ a „plus nekonečno“. Klademe* $-\infty < a < +\infty$ *pro každé* $a \in \mathbb{R}$ *(tedy* $-\infty < +\infty$*) a na* $\mathbb{R}$ *je* $<$ *obvyklé uspořádání reálných čísel (podle definice 1.7.14).*

Úloha 1.7.45. *Dokažte, že úplně (ale opravdu úplně) každá podmnožina* $A \subset \mathbb{R}^*$ *má v* $(\mathbb{R}^*, <)$ *supremum i infimum.*

Později na $\mathbb{R}^*$ rozšíříme v některých případech i aritmetické operace.

Lineární uspořádání $(\mathbb{Q}, <)$ sice není úplné, ale suprema a infima v něm existují přibližně.

Tvrzení 1.7.46 (přibližné supremum). *Pro každou neprázdnou a shora omezenou množinu zlomků* $A \subset \mathbb{Q}$ *a každé* $k \in \mathbb{N}$ *existuje zlomek* $\alpha \in \mathbb{Q}$*, který je horní mezí* A*, ale* $\beta > \alpha - 1/k$ *pro nějaké* $\beta \in A$*.*

Důkaz. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Zlomek

$$\alpha = \frac{\min(\{n \in \mathbb{Z} \mid n/k \geq \beta \text{ pro } \forall \beta \in A\})}{k}$$

má patrně tyto vlastnosti. $\square$

Úloha 1.7.47. *V předchozím tvrzení zlomek α může záviset na čísle k. Nedal by se α vzít pevně, nezávisle na k?*

Nespočetnost reálných čísel

Definice 1.4.11 říká, kdy je množina konečná a kdy nekonečná. Teď zavedeme třídu „ne moc velkých“ nekonečných množin a třídu „opravdu velkých“ nekonečných množin.

Definice 1.7.48 (spočetné a nespočetné množiny). *Nekonečnou množinu M nazveme spočetnou, když existuje bijekce*

$$f\colon \mathbb{N} \to M\ .$$

Když je M nekonečná a není spočetná, takže taková bijekce neexistuje, nazveme M nespočetnou. Nejvýše spočetná je množina, která je konečná nebo spočetná.

Základní spočetná množina je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$. Spočetnost množiny tedy znamená, že všechny její prvky lze seřadit do prosté posloupnosti $(a_1, a_2, \dots)$. Prostotu lze vynechat:

Úloha 1.7.49. *Dokažte, že M je spočetná množina, právě když je nekonečná a existuje surjekce $f\colon \mathbb{N} \to M$. Dokažte, že M je spočetná množina, právě když je nekonečná a existuje injekce $f\colon M \to \mathbb{N}$. Ukažte, že $\mathbb{N}$ lze nahradit jakoukoli jinou spočetnou množinou.*

Uvedeme pár příkladů spočetných množin. Je jasné, že sama $\mathbb{N}$ je spočetná, díky identické bijekci $f(n) = n$. Množina celých čísel $\mathbb{Z}$ je spočetná: prostá posloupnost $(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots)$ probíhá celé $\mathbb{Z}$. Kartézský čtverec $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je spočetný: prostá posloupnost

$$(0,0),\ (0,1),\ (0,-1),\ (1,0),\ (-1,0),\ (0,2),\ (0,-2),\ (2,0),\ (-2,0),\ (1,1),\ \dots$$

probíhá celé $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Úloha 1.7.50. *Jak je přesně definovaná tato posloupnost dvojic celých čísel? Zobecněte na $\mathbb{Z}^k = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ s k činiteli.*

Tvrzení 1.7.51 (spočetnost zlomků). *Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná.*

Důkaz. V předchozí prosté posloupnosti probíhající dvojice (a,b) ze $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ se vyskytují všechna racionální čísla a/b, každé ovšem zopakováno nekonečněkrát, například $-3/10$ jako $(3,-10),(-3,10),(6,-20)$ a tak dále. Stačí si vždy ponechat jen jednoho reprezentanta (a vynechat všechny dvojice $(a,0)$) a máme prostou posloupnost procházející $\mathbb{Q}$. $\square$

Úloha 1.7.52. *Dokažte, že*

$$(m,n)\mapsto \frac{m^2+2mn+n^2-3m-n+2}{2}$$

je bijekce z $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *do* $\mathbb{N}$.

Následující výsledek G. Cantora byl přelomem v matematice.

Věta 1.7.53 (Cantor, 1873). *Množina reálných čísel* $\mathbb{R}$ *je nespočetná.*

Důkaz. Ukážeme, že množina

$$X=\{(a_1,a_2,\dots)\mid a_n\in\{0,1\}\}$$

všech 0-1 posloupností je nespočetná. Dokážeme, že neexistuje surjekce $f\colon\mathbb{N}\to X$. Protože fakticky $X\subset\mathbb{R}$ (prvkům X zřejmým způsobem odpovídají reálná čísla s rozvoji $0.c_1c_2\dots$, kde každá desetinná cifra c_n je 0 nebo 1), neexistuje ani surjekce $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ (každé surjektivní zobrazení $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ se „přesměrováním“ hodnot $f(n)\in\mathbb{R}\backslash X$ do X lehce změní na surjekci $g\colon\mathbb{N}\to X$). Žádná posloupnost tak nedokáže vyčerpat ani množinu X ani množinu $\mathbb{R}$.

Nechť tedy

$$f\colon\mathbb{N}\to X,\ f(n)=(c_{n,1},\ c_{n,2},\ c_{n,3},\ \dots),\ c_{n,j}\in\{0,1\}\ ,$$

je libovolné zobrazení. Pro $x\in\{0,1\}$ označíme jako $\overline{x}=1-x$, což je prohození jedničky a nuly, a vezmeme posloupnost

$$p=(\overline{c_{1,1}},\ \overline{c_{2,2}},\ \overline{c_{3,3}},\ \dots)\in X\ .$$

Pro každé $n\in\mathbb{N}$ je $\overline{c_{n,n}}\neq c_{n,n}$, tedy $p\neq f(n)$ (posloupnost p se od posloupnosti $f(n)$ liší alespoň na n-tém místě). Neexistuje tedy $n\in\mathbb{N}$, aby $f(n)=p$, a f není zobrazení na. $\square$

Posloupnost p jsme dostali z nekonečné tabulky, v níž se posloupnost $f(n)$ nachází v n-tém řádku, jako změněnou diagonálu. Tato důkazová metoda se proto nazývá *(Cantorova) diagonální metoda.*

Úloha 1.7.54. *Diagonální metodou dokažte, že pro žádnou množinu M neexistuje surjekce*

$$f\colon M\to\mathcal{P}(M)$$

z M na množinu všech jejích podmnožin.

Žádná množina se tedy nedá zobrazit na svou potenci. Množina všech podmnožin přirozených čísel tak je nespočetná stejně jako $\mathbb{R}$.

Úloha 1.7.55. *Nalezněte bijekci mezi $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a množinou X všech* 0-1 *posloupností (použitou v důkazu věty 1.7.53).*

Úloha 1.7.56. *Dokažte, že existuje bijekce mezi množinami $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a $\mathbb{R}$.*

Úloha 1.7.57. *Dokažte následující uzávěrové vlastnosti třídy spočetných množin.*

1. *Sjednocení dvou (tedy i tří, čtyř, ...) spočetných množin je spočetná množina.*
2. *Kartézský součin dvou (tedy i tří, čtyř, ...) spočetných množin je spočetná množina.*
3. *Pro každou posloupnost $(A_1, A_2, \dots)$ spočetných množin je jejich sjednocení*
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \textit{spočetné}$$
— spočetné sjednocení spočetných množin je spočetná množina.
4. *Předchozí výsledky zůstávají v platnosti i pro třídu nejvýše spočetných množin.*

Úloha 1.7.58. *Kartézský součin spočetně mnoha množin $A_1, A_2, \dots$ definujeme jako*
$$A_1 \times A_2 \times \cdots := \{f\colon \mathbb{N} \to A_1 \cup A_2 \cup \dots \mid f(n) \in A_n\} .$$
Zjistěte, kdy je součin spočetně mnoha nejvýše spočetných množin nespočetná množina.

Jak velké mohou být množiny reálných čísel a množiny vůbec? Následující problém vyslovil německý matematik *David Hilbert (1862–1943)* (působil na univerzitách v Königsbergu (Královci) a pak v Göttingen (Gotinkách), je po něm nazván Hilbertův prostor, základ funkcionální analýzy a kvantové fyziky, před A. Einsteinem odvodil rovnice obecné teorie relativity, ve spisu *Zahlbericht* vytvořil moderní algebraickou teorii čísel, v r. 1909 vyřešil Waringův problém — dokázal, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $g \in \mathbb{N}$, že každé $n \in \mathbb{N}_0$ je součtem nejvýše g mocnin x^k přirozených čísel — a takto by se dalo pokračovat ještě dlouho). Je to první problém ve známém seznamu 23 Hilbertových problémů, které uvedl na přednášce na Mezinárodním kongresu matematiků v Paříži v r. 1900.

Problém 1.7.59 (hypotéza kontinua, CH). *Neexistuje množina M s mohutností ležící ostře mezi mohutnostmi množin $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Jinými slovy, existence injekcí $\mathbb{N} \to M \to \mathbb{R}$ implikuje injekci $M \to \mathbb{N}$ nebo injekci $\mathbb{R} \to M$ a tedy M je pak v bijekci s $\mathbb{N}$ nebo s $\mathbb{R}$.*

Americký matematik *Paul Cohen (1934–2007)* (za svou práci o CH dostal v r. 1966 na ICM v Moskvě Fieldsovu medaili (na témže kongresu ji obdržel i jiný americký matematik *Stephen Smale (1930)*, který dokázal obrátit sféru naruby, viz [12]), v kapitole 5 je zmíněn Cohenův důkaz jedné věty o Taylorových rozvojích) v r. 1963 sestrojil model teorie množin, v němž CH neplatí (a podobně ani AC), nelze ji tedy dokázat (a podle dřívějších Gödelových výsledků ani vyvrátit).

Definice 1.7.60 (algebraická a transcendentní čísla). *Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ je* algebraické*, existují-li čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, ne všechna nulová, že*

$$a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n = 0 \; .$$

Algebraická čísla jsou tedy právě kořeny nenulových celočíselných mnohočlenů $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Když číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ není algebraické, nazývá se transcendentní*. Množinu algebraických čísel označíme jako*

$$\mathbb{A} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid p(\alpha) = 0, p \in \mathbb{Z}[x], p \neq 0\} \; .$$

Pro naše účely bereme algebraická čísla jako reálná, ale nebudeme čtenáři zatajovat, že běžnější a vhodnější je uvažovat je v oboru $\mathbb{C}$. Například i je algebraické číslo, kořen celočíselného polynomu $x^2 + 1$. Existují ale vůbec nějaká transcendentní čísla? Velkým úspěchem Cantorovy teorie množin bylo, že v jejím rámci je odpověď snadná: podle věty 1.7.53 je množina transcendentních čísel nekonečná, dokonce nespočetná.

Důsledek 1.7.61 (transcendentní čísla). *Transcendentní čísla tvoří nespočetnou množinu.*

Důkaz. Stačí ukázat, že množina algebraických čísel $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ je nejvýše spočetná. Sjednocení s transcendentními čísly dává rozklad množiny reálných čísel, $\mathbb{A} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{A}) = \mathbb{R}$, jež je podle věty 1.7.53 nespočetná. Podle částí 1 a 4 úlohy 1.7.57 je tedy množina transcendentních čísel $\mathbb{R}\backslash\mathbb{A}$ nespočetná.

Množina celočíselných polynomů $\mathbb{Z}[x]$ je nejvýše spočetná: když je reprezentujeme $(n+1)$-ticemi jejich koeficientů, je

$$\mathbb{Z}[x] \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}^{n+1} \; ,$$

což je spočetné sjednocení spočetných množin. Tedy

$$\mathbb{A} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}[x], p \neq 0} \{\alpha \in \mathbb{R} \mid p(\alpha) = 0\}$$

je nejvýše spočetná (fakticky ale spočetná) množina, protože je nejvýše spočetným sjednocením konečných množin. Z algebry totiž víme, že nenulový polynom má jen konečně mnoho kořenů, viz úloha 1.8.13. □

Ve větě 5.3.14 a důsledku 5.3.15 sestrojíme konkrétní transcendentní čísla pomocí derivací funkcí, jako důsledek Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

1.8 Poznámky a další úlohy

Matematická analýza podle R. Penrose. Pravděpodobnostní paradoxy — ano či ne? Jak definují funkci L. Bukovský, G. H. Hardy, F. Hausdorff, V. Jarník a jiní. V úlohách kromě jiného Základní věta aritmetiky, konečná binomická věta a Cauchyova–Schwarzova nerovnost.

R. Penrose ve své monumentální knize [110] charakterizuje na [110, strana 103] matematickou analýzu následovně.

> CALCULUS—or, according to its more sophisticated name, *mathematical analysis*—is built from two basic ingredients: *differentiation* and *integration*. Differentiation is concerned with velocities, acceleration, the slopes and curvature of curves and surfaces, and the like. These are rates at which things change, and they are quantities defined *locally*, in terms of structure or behaviour in the tiniest neighbourhoods of single points. Integration, on the other hand, is concerned with areas and volumes, with centres of gravity, and with many other things of that general nature. These are things which involve measures of *totality* in one form or another, and they are not defined merely by what is going on in the local or infinitesimal neighbourhoods of individual points. The remarkable fact, referred to as the *fundamental theorem of calculus*, is that each one of these ingredients is essentially just the *inverse* of the other. It is largely this fact that enables these two important domains of mathematical study to combine together and to provide a powerful body of understanding and of calculational technique.

Je to ovšem pohled uživatele. Souvislost matematické analýzy a teorie množin prostřednictvím reálných čísel hezky vysvětluje J. Stillwell v [133]. Úvody do teorie množin a matematické logiky poskytují knihy [8] B. Balcara a P. Štěpánka a [138] V. Švejdara. Viz také P. Vopěnka [146] a V. Kolman [82, 83]. Dále se lze o logice a logickém značení, jehož jsme se mohli v úvodu jen zběžně dotknout, poučit v knihách [84] V. Kolmana a V. Punčocháře a [112] J. Peregrina a M. Vlasákové. Historii prázdné množiny, singletonu a uspořádané dvojice probírá v [75] A. Kanamori. Nově ji definovat navrhují D. Scott a D. McCarty v [127]. Lze také vřele doporučit monografii [117] P. Pudláka. Zajímavě o vztahu mezi spojitou a diskrétní matematikou píše L. Lovász v [93].

Oddíl 1.1. Inspirovali jsme se podobnou ale delší partií [139, 1.2 Why do analysis, str. 3–13] v učebnici analýzy australsko-čínsko-(fakticky hongkongsko)-amerického matematika*Terence Taa (1975)* (laureát Fieldsovy medaile z Mezinárodního kongresu matematiků v r. 2006 v Madridu, jeho asi nejvýznamnější výsledek představuje Greenova–Taova věta, že prvočísla obsahují libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti, tj. konečné posloupnosti tvaru $a, a+d, a+2d, \dots, a+kd$ s $a, d, k \in \mathbb{N}$), z níž níže citujeme. Celou knihu o paradoxech v teorii pravděpodobnosti a v matematické statistice napsal G. J. Székely [136] a knihu o spíše klasických paradoxech M. Sainsbury [126]. Ovšem J. Haigh ve svém vynikajícím úvodu do pravděpodobnosti pro laiky [59] píše [59, str. 109]: „The subject of probability is wholly free from real paradoxes.“ Literatura o paradoxech je pochopitelně daleko rozsáhlejší (L. Pick [113], ...), ale zmíníme už jen zkoumání smyslu paradoxu lháře N. Weaverem v [152].

Oddíl 1.2. Pro zajímavost a srovnání různých matematických stylů z různých období nyní ocitujeme dvanáct definic pojmu funkce z deseti učebnic analýzy a dvou knih o množinách, starších i novějších. Překvapivě často i v moderních učebnicích zaznívá echo archaického (?) pojetí funkce jako pravidla, vlastnosti či postupu, jimiž je zadána. Viz diskuse v Bukovského knize [26] před námi citovanou pasáží.

Apostol [4, str. 34]:

> **Definition 2.5.** *A function F is a set of ordered pairs (x, y), no two of which have the same first member. That is, if $(x, y) \in F$ and $(x, z) \in F$, then $y = z$.*

Bukovský [26, str. 39–40 a 49]:

> Ak máme zobrazenie dané pravidlom $y = \sqrt{1 - x^2}$, tak vieme, že je definované len pre x z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a vieme nakresliť jeho graf — pozri *obr. 2.1.* Graf G tohoto zobrazenia nám dáva tú istú informáciu ako „zobrazenie“ samo: vieme z neho vyčítať, kde je zobrazenie definované a pre každé x z oboru definície vieme nájsť y, ktoré je týmto zobrazením tomuto x priradené. Graf G je ale množina usporiadaných dvojíc. Všeobecne, každá množina usporiadaných dvojíc s určitou vlastnosťou (vyslovenou ďalej v texte) je grafom nejakého „zobrazenia“. Nemáme dôvod rozlišovať mezi „zobrazením“ a jeho grafom. Graf zobrazenia je však množina ..., teda nič nové. Diskutabilný pojem „pravidlo“ mizne. Takže môžeme pristúpit k definícii.
>
> Nech A, B sú množiny, f je podmnožina $A \times B$. Množina f sa nazýva *zobrazenie*, ak pre každé $x \in A$, $y_1, y_2 \in B$ také, že $[x, y_1] \in f$, $[x, y_2] \in f$ platí $y_1 = y_2$.
>
> [...]
>
> Z historických dôvodov zobrazenie definované na nejakej množine reálnych čísiel s hodnotami, ktoré sú reálne čísla, sa nazýva *funkcia.* Nebudeme vždy dôslední v používaní tohoto termínu. Z kontextu však musí byť zrejmé, čo máme na mysli.

Hardy [61, str. 38–39]:

> **20. The idea of a function.** Suppose that x and y are two continuous real variables, which we may suppose to be represented geometrically by distances $A_0P = x$, $B_0Q = y$ measured from fixed points A_0, B_0 along two straight lines Λ, M. And let us suppose that the positions of the points P and Q are not independent, but connected by a relation which we can imagine to be expressed as

a relation between x and y: so that, when P and x are known, Q and y are also known. We might, for example, suppose that $y = x$, or $y = 2x$, or $\frac{1}{2}x$, or $x^2 + 1$. In all of these cases the value of x determines that of y. Or again, we might suppose that the relation between x and y is given, not by means of an explicit formula for y in terms of x, but by means of a geometrical construction which enables us to determine Q when P is known.

In these circumstances y is said to be a *function* of x. The notion of functional dependence of one variable upon another is perhaps the most important in the whole range of higher mathematics. In order to enable the reader to be certain that he understands it clearly, we shall, in this chapter, illustrate it by means of a large number of examples.

But before we proceed to do this, we must point out that the simple examples of functions mentioned above possess three characteristics which are by no means involved in the general idea of a function, viz.:

(1) y is determined *for every value of* x;

(2) to each value of x for which y is given corresponds *one and only one value of* y;

(3) the relation between x and y is expressed by means of *an analytical formula*, from which the value of y corresponding to a given value of x can be calculated by direct substitution of the latter.

It is indeed the case that these particular characteristics are possessed by many of the most important functions. But the consideration of the following examples will make it clear that they are by no means essential to a function. All that is essential is that there should be some relation between x and y such that to some values of x at any rate correspond values of y.

[Následuje osm příkladů funkcí, z nichž ocitujeme jen poslední.]

8. Let y be defined as *the height in inches of policeman* Cx*, in the Metropolitan Police, at* 5.30 *p.m. on* 8 *Aug.* 1907. Then y is defined for a certain number of integral values of x, viz. $1, 2, \ldots, N$, where N is the total number of policemen in division C at that particular moment of time.

Hausdorff [66, str. 33]:

Aus zwei nichtverschwindenden Mengen A, B können wir geordnete Paare $p = (a, b)$ bilden, deren erstes Element a ein Element von A, deren zweites Element b ein Element von B ist. Sind beide Mengen endlich und besteht A aus m, B aus n Elementen, so gibt es mn solcher Paare[1]; das legt den Gedanken nahe, in dieser Weise allgemein die MULTIPLIKATION von Mengen zu definieren (§ 2).

Zuvor betrachten wir eine Menge P solcher Paare, und zwar von der Beschaffenheit, daß jedes Element a von A in einem und nur einem Paare p von P als erstes Element auftritt. Jedes Element a bestimmt auf diese Weise ein und nur ein Element b, nämlich dasjenige, mit dem es zu einem Paare $p = (a, b)$ verbunden auftritt; dieses durch a bestimmte, von a abhängige, dem a zugeordnete Element bezeichnen wir mit

$$b = f(a)$$

und sagen, daß hiermit in A (d.h. für alle Elemente von A) eine EINDEUTIGE FUNKTION von a definiert sei. Zwei solche Funktionen $f(a), f'(a)$ sehen wir dann und nur dann als gleich an, wenn die zugehörigen Paarmengen P, P' gleich sind, wenn also, für JEDES a, $f(a) = f'(a)$ ist.

Jarník [70, str. 145–148]:

§ 1. Pojem funkce. Čtenáři je asi ze školy běžný pojem „funkce“: „y je funkcí x“, „y závisí na x“ a podobně. Precizování tohoto pojmu je věnován tento paragraf; napřed však uvedu několik příkladů.

[Následuje, na více než třech stranách, devět podrobně komentovaných příkladů funkcí.]

Po těchto příkladech můžeme již zajisté přistoupit k definici:

Definice 14. *Budiž M nějaká množina reálných čísel. Jestliže každému číslu x množiny M je přiřazeno určité číslo y, říkáme, že y je funkcí x; množinu M nazýváme oborem této funkce.*

Kopáček [85, str. 10–11 a 48]:

1.3. Zobrazení

Zobrazení je také jedním z pojmů, které se vyskytují snad ve všech partiích matematiky. Vyslovíme nyní přesnou jeho definici a rozebereme ji. Podrobnější výklad opět následuje petitem.

Definice 1.9. Nechť M a P jsou dvě množiny, A je neprázdná podmnožina množiny M. Je-li ke každému prvku $x \in A$ přiřazen *právě jeden* prvek $y_x \in P$, říkáme, že je zadáno *zobrazení z* množiny M *do* množiny P. Označíme-li je φ, pak píšeme $\varphi\colon M \to P$, nebo také $\varphi\colon x \to y_x = \varphi(x)$, $x \in A$. [...]

[...]

Definice 3.1. *Reálnou (komplexní) funkcí jedné reálné proměnné* rozumíme zobrazení f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).

Kriz and Pultr [87, str. 3 a 7]:

Perhaps it is useful to go over a few basic conventions first. By a *map* or *mapping* from a set S to a set T we mean a rule which assigns to each element of S precisely one element of T. Two rules are considered the same if they always produce the same value (in T) on the same input (of S).

Therefore, technically, a map is a *binary relation*, i.e. a set R of pairs (x, y), $x \in S$, $y \in T$, such that for each $s \in S$, there is precisely one $(s, y) \in R$.

[...]

1.3.2 Comment:
A *function* is basically the same thing as a map, although in many texts (including this one), the term function is reserved for a map whose codomain is a set whose elements we perceive as *numbers*, or at least some closely related generalizations.

Pugh [118, str. 28–29]:

Let A and B be sets. A **function** $f : A \to B$ is a rule or mechanism which, when presented with any element $a \in A$, produces an element $b = f(a)$ of B. It need not be defined by a formula. Think of a function as a device into which you feed elements of A and out of which pour elements of B. See Figure 11.

[Je zobrazen schematický mlýnek na maso f semílající $a \in A$ v $f(a) \in B$. Obrázek je popsán: **Figure 11** The function f as a machine.]

Tao [139, str. 55]:

Definition 3.3.1 (Functions). Let X, Y be sets, and let $P(x, y)$ be a property pertaining to an object $x \in X$ and an object $y \in Y$, such that for every $x \in X$, there is exactly one $y \in Y$ for which $P(x, y)$ is true (this is sometimes known as the *vertical line test*). Then we define the *function* $f : X \to Y$ *defined by* P *on the domain* X *and range* Y to be the object which, given any input $x \in X$, assigns an output $f(x) \in Y$, defined to be the unique object $f(x)$ for which $P(x, f(x))$ is true. Thus, for any $x \in X$ and $y \in Y$,

$$y = f(x) \iff P(x, y) \text{ is true.}$$

Veselý [145, str. 33 a 101]:

Definice 1.4.1. Nechť $X, Y \neq \emptyset$ a nechť $f \subset X \times Y$, pro kterou platí

(1) $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)((x, y) \in f)$,

(2) $(((x, y_1) \in f) \wedge ((x, y_2) \in f)) \Rightarrow y_1 = y_2$.

Potom f je *zobrazení X do Y*. Budeme ho značit $f : X \to Y$.

[...]

Definice 4.1.1. Zobrazení libovolné množiny $A \neq \emptyset$ do nějakého číselného oboru budeme obecně nazývat *funkce*. Podrobněji *reálnou funkcí* budeme rozumět zobrazení do $\mathbb{R}$, *komplexní funkcí* zobrazení do $\mathbb{C}$. Je-li navíc $A \subset \mathbb{R}$, budeme takovou funkci nazývat podrobněji *reálnou funkcí reálné proměnné*; s těmi budeme pracovat nejčastěji. Proto pro ně budeme používat jen kratší název *funkce* a vše ostatní bude v případě potřeby explicitně řečeno.

Weyr [154, str. 82–83]:

Hodnoty, vyskytující se v mathematických úvahách, různíme na *stálé* a na *proměnné*; první mají určitou hodnotu, alespoň v úvaze, v níž se vyskytují, druhé nabývají nekonečně mnoho různých hodnot, obyčejně všech hodnot reálných, a slují pak neomezeně proměnné, aneb všech hodnot jistého intervallu $(a \,.\,.\, b)$, t. j. hodnot x hovících požadavku $a \leq x \leq b$; v obou těchto případech nazýváme x hodnotou *spojitě proměnnou*. Hodnoty stálé značíváme prvními literami abecedy, hodnoty proměnné posledními.

Přísluší-li každé hodnotě proměnné x určitá hodnota y, pravíme, že y jest funkcí proměnné x a píšeme $y = f(x)$; x pak sluje *neodvisle proměnnou* neb *argumentem*, y též *odvisle proměnnou*.

Funkce y jest definována v intervallu $(a \,.\,.\, b)$, přísluší-li každému x tohoto intervalu určitá hodnota y.

Pojem funkce takovým způsobem vytčený jest velice obecný, a připouští funkce zcela libovolné, nezajímavé, poněvadž nepodrobené žádné zákonitosti; možno n. p. definovati funkci y v intervallu $(0 \,.\,.\, 1)$ tím, že pro racionálná x tohoto intervallu položíme $y = x$, a pro iracionálná $y = \frac{1}{x}$, aneb $y = \frac{1}{x^2}$, a p.

Funkce, jichž studium bylo plodným jak pro ryzí, tak pro applikovanou mathematiku, nebyly sestrojeny takovým libovolným způsobem, nýbrž vyskytly se zcela přirozeně jakožto výrazy utvořené pomocí určitých početních úkonů z hodnoty proměnné a z daných hodnot stálých, jako n. p. funkce racionálné celistvé a lomené, funkce iracionálné a obecnější algebraické, funkce exponenciálná, logarithmická, funkce trigonometrické a pod.

Zorich [158, str. 11]:

1.3.1 The Concept of a Function (Mapping)

We shall now describe the concept of a functional relation, which is fundamental both in mathematics and elsewhere.

Let X and Y be certain sets. We say that there is a *function* defined on X with values in Y if, by virtue of some rule f, to each element $x \in X$ there corresponds an element $y \in Y$.

První a zdaleka nejpregnantnější definice funkce je převzata z učebnice řecko-amerického matematika *Toma M. Apostola (1923–2016)* působícího na Kalifornském technologickém institutu (pracoval v analytické teorii čísel, největší citační ohlas měl podle *Mathematical Reviews* po jeho monografiích článek o funkcionální rovnici pro Lerchovu zeta funkci (nazvanou po českém matematikovi *Matyáši Lerchovi (1860–1922)*)).

Slovenštinu jsme si připomněli citací „populární“ knihy o množinách [26] slovenského matematika *Lva Bukovského (1939)* (narodil se v Podkriváni, zabývá se matematickou logikou, teorií množin, teorií míry a $\mathbb{R}$ — je autorem knihy [27] o struktuře reálné osy, vycházející z jejího slovenského vydání v r. 1979).

Anglický matematik *Godfrey Harold Hardy (1877–1947)* proslul i v nematematických kruzích, viz kniha [64] (zejména předmluva C. P. Snowa) a film *The Man Who Knew Infinity* (režie Matt Brown, 2015) o zázračném indickém matematikovi S. Ramanujanovi, v němž jeho objevitele a mentora Hardyho hraje Jeromy Irons, bohužel asi o 30 let starší než byl Hardy v popisovaném období (Hardy vynikal v klasické analýze a analytické teorii čísel, jeho patrně největší objev je takzvaná *kruhová metoda (circle method)* — často označovaná jako Hardyho–Littlewoodova, ale správnější je Hardyho–Ramanujanova, viz *John Edensor Littlewood (1885–1977)* a *Srinivasa Ramanujan (1887–1920)* — metoda pro odvozování asymptotických odhadů diskrétních veličin jejich vyjádřením Cauchyho integrální formulí z komplexní analýzy).

Pokud ovládáte alespoň trochu němčinu, potěšte se klasickou množinovou definicí funkce od německého matematika *Felixe Hausdorffa (1868–1942)* (zakladatel moderní topologie, přispěl významně k teorii míry a teorii množin, viz Hausdorffův prostor a Hausdorffova míra, v Bonnu zvolil spolu s blízkými smrt vlastní rukou namísto deportace do KL) z r. 1914, jež je modernější než mnohé jiné mladší zde citované.

Nebylo možné necitovat z učebnice českého matematika *Vojtěcha Jarníka (1897–1970)*, který působil v letech 1929–1939 a 1945–1967 jako mimořádný a pak řádný profesor Karlovy Univerzity v Praze (Jarník se prosadil v klasické analýze a analytické teorii čísel, světově známá je jeho asymptotika maximálního počtu mřížových bodů na grafu konvexní funkce či jeho průkopnická práce v diskrétní matematice formulující algoritmus pro nalezení minimální kostry grafu).

Český matematik *Jiří Kopáček (1932–2017)* pracoval v teorii parciálních diferenciálních rovnic a působil na MFF Univerzity Karlovy v Praze. (Univerzita Karlova měnila v historii svůj název několikrát. Od září 2016 je správné pouze krátké „Univerzita Karlova“, se starší „Univerzitou Karlovou v Praze“ se v účetním oddělení se zlou potážete.)

Česko-americký matematik *Igor Kříž (1965)* působí na Michiganské univerzitě (je odborníkem v algebraické topologii) a český matematik*Aleš Pultr (1938)* na MFF Univerzity Karlovy v Praze (zabývá se topologií, zejména bezbodovou, a teorií kategorií).

Americký matematik *Charles Ch. Pugh (1940)* je emeritním profesorem Kalifornské univerzity v Berkeley (pracuje v teorii dynamických systémů, v r. 1967 publikoval takzvané Closing lemma, které zhruba řečeno praví, že pomocí malé poruchy lze výchozí dynamický systém převést na systém s periodickými trajektoriemi).

O T. Taovi jsme napsali v úvodu.

Český matematik *Jiří Veselý (1940)* (jeho specializací jsou teorie potenciálu a historie matematiky) působí na MFF Univerzity Karlovy v Praze.

Předposlední citace je z učebnice českého matematika a univerzitního profesora *Eduarda Weyra (1852–1903)* (zabýval se hlavně diferenciální a algebraickou geometrií). O jeho životě a díle informuje knika [14] Bečváře a spoluautorů.

Ruský matematik *Vladimir Antonovič Zorič (1937)* (odborník v oblasti konformní geometrie a kvazikonformních zobrazení) je emeritním profesorem Moskevské státní univerzity.

Oddíl 1.3. Důkazy Wittova lemmatu, Bourbakiho–Wittovy věty o pevném bodu a Zornova lemmatu jsou převzaty z Pultrova textu [120] a náleží Wittovi [156]. Forster [50] užívá zesílení zmíněné věty o pevném bodu k řešení jistého noetického rébusu. O axiomu výběru pojednává kniha [72] americko-českého matematika *Thomase (Tomáše) Jecha (1944)* (zabývá se teorii množin, teorií míry, topologií a matematickou logikou, jeho zmíněná monografie o AC a další o teorii množin obecně [74] jsou základní). Banachův–Tarského paradox probírá kniha [149] kanadsko-amerického matematika *Stana Wagona (1951)* (zabývá se teorií čísel, geometrií a matematikou výpočtů, za přečtení stojí mimo jiných jeho prací i článek *Čtrnáct důkazů výsledku o dělení obdélníka* [150]).

Oddíl 1.4. Naše definice přirozených čísel je druhořádová, jejich vlastností v principu indukce může být jakákoli podmnožina, což značně zjednodušuje situaci — jak jsme viděli, $\mathbb{N}$ respektive $\mathbb{N}_0$ pak jsou jednoznačně určené. Ovšem v logice prvního řádu, kdy lze kvantifikovat pouze prvky (a ne množiny), je situace jiná. Viz *Peanova aritmetika* v Pudlákovi [117] nebo Švejdarovi [138].

Druhý důkaz Cantorovy–Bernsteinovy věty jsme s úpravou převzali z Wikipedie [164] a úplně poprvé jsme se o něm dočetli v Taově knize [140, kap. 1.13] v kapitolce „Mazurův švindl“. Třetí důkaz pomocí jedné věty o pevném bodu v uspořádaných množinách se lze dozvědět v předmětu *Matematické struktury* (NMAI064), viz skripta Pultr [119]. Důkaz je uveden i v Kolmanovi [82, str. 131].

Oddíl 1.5. Různá zobecnění Bernoulliovy nerovnosti uvádějí Mitrinovič a Pečarič [102] a další zobecnění našel R. A. C. Ferreira [44].

Oddíl 1.6. Jsme zvyklí zlomky zjednodušovat a pracovat s nimi v základním, zkráceném tvaru. Například $-\frac{121}{99}$ zkrátíme na $-\frac{11}{9}$ a podobně a bereme za samozřejmé, že zkrácený zlomek je vždy jednodušší než ten původní (zajímavá metoda krácení zlomků je v úloze 1.8.18). V $\mathbb{Q}$ tomu tak je, ale jinde kupodivu může být výhodnější nezkrácený tvar: například

$$\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{98}+x^{99}}{1}=\frac{x^{100}-1}{x-1}$$

a druhá, i když nezkrácená, racionální funkce má mnohem jednodušší popis než ta první. Takové „krátké“ racionální funkce jsou důležitým nástrojem pro efektivní počítání mřížových bodů (body v $\mathbb{R}^d$ s celočíselnými souřadnicemi) v mnohostěnech, viz Barvinok [11].

Oddíl 1.7. Zavedení reálných čísel cauchyovskými posloupnostmi zlomků publikoval jako první v r. 1869 francouzský matematik *Charles Méray (1835–1911)* (působil na univerzitě v Dijonu, jeho průkopnická práce o teorii iracionálních čísel byla ignorována) a o tři roky později v r. 1872 ho nastínil G. Cantor, jemuž je nepřesně výhradně připisováno, a na základě Cantorových poznámek ho podrobně popsal německý matematik *Eduard Heine (1821–1881)* (zabýval se teorií funkcí, jeho jméno žije v Heineho–Borelově větě — $A \subset \mathbb{R}^d$ je omezená a uzavřená, právě když každé otevřené pokrytí množiny A má konečné podpokrytí — či v Heineho q-zobecněných hypergeometrických řadách/funkcích — řady tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^a;q)_n (q^b;q)_n}{(q^c;q)_n (q;q)_n} x^n \ ,$$

kde $(y;q)_n := (1-y)(1-yq)(1-yq^2)\dots(1-yq^{n-1})$ — a, když už ve skriptech probíráme matematické příbuzné F. Mendelsohna-Bartholdyho, Heineho sestra Albertina byla ženou Felixova bratra Paula). R. Dedekind vyložil svou teorii řezů v knize [36].

Další úlohy

Úloha 1.8.1 (zmizení rozdílu mezi inkluzí a náležením). $\forall\, a :\ a = \{a\}$ *je ekvivalentní s*

$$\forall\, a\, \forall\, b :\ a \subset b \iff a \in b \ .$$

Úloha 1.8.2 (Základní věta aritmetiky). *Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje právě jedna k-tice prvočísel $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ a přirozených čísel $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, že*

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$$

($k = 0$ odpovídá číslu $n = 1$).

Úloha 1.8.3 (binomické koeficienty). *Pro celá čísla $n \ge k \ge 0$ a libovolnou množinu A s $|A| = n$ prvky definujeme*

$$\binom{n}{k} := \#\{X \subset A \mid |X| = k\} \ .$$

Proč tato veličina závisí jen na počtu prvků A a ne na A samotné? Dokažte, že

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

(prázdný součin, pro $n = 0, k = 0$ či $n = k$, se definuje jako 1).

Úloha 1.8.4. *Vyjádřete binomický koeficient pomocí faktoriálů.*

Úloha 1.8.5 (konečná binomická věta). *Ukažte, že pro každé* $n \in \mathbb{N}_0$ *a každé dva prvky* $x, y \in R$ *jakéhokoli (komutativního) okruhu* $(R, +, \cdot)$ *platí identita*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \ .$$

Úloha 1.8.6 (multinomické koeficienty). *Obecněji, pro* $n_1, \dots, n_k, n \in \mathbb{N}_0$ *s* $n_1 + \dots + n_k = n$ *definujeme*

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k}$$

jako počet uspořádaných k*-tic* $(X_1, \dots, X_k)$ *disjunktních množin* X_i *splňujících* $|X_i| = n_i$ *a* $X_1 \cup \dots \cup X_k = \{1, 2, \dots, n\}$*. Dokažte, že*

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!} \ .$$

Úloha 1.8.7 (rozklady s danými velikostmi bloků). *V situaci úlohy 1.8.6, kolik je* neuspořádaných k*-tic* $\{X_1, \dots, X_k\}$ *splňujících uvedené podmínky?*

Úloha 1.8.8. *Když* $n \in \mathbb{N}$ *není čtverec, to jest neexistuje* $m \in \mathbb{N}$ *s* $n = m^2$*, pak je* $\sqrt{n}$ *iracionální číslo.*

Úloha 1.8.9. *Rozšiřte předchozí úlohu na* q*-té odmocniny.*

Úloha 1.8.10. *Jsou čísla* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *a* $\sqrt{5 + \sqrt{24}}$ *iracionální?*

Úloha 1.8.11. *Nechť* $p \in \mathbb{Z}[x]$ *je nenulový, celočíselný a monický polynom (= má vedoucí koeficient* 1*), který má kořen* $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$*. Dokažte, že číslo* α *je iracionální.*

Úloha 1.8.12 (Cauchyova–Schwarzova nerovnost). *Dokažte, že pro každou* $2n$*-tici nezáporných čísel* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ *platí*

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \le \sqrt{(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)} \ .$$

Úloha 1.8.13. *Nechť* F *je těleso a* $p \in F[x]$ *je nenulový polynom s koeficienty v* F *a stupněm* d*. Dokažte, že pak* $p(a) = 0$ *pro nejvýše* d *hodnot* $a \in F$*.*

Úloha 1.8.14. *Když je* $\beta \in \mathbb{R}$ *nenulové algebraické číslo, pak i* $1/\beta$ *je algebraické číslo.*

Úloha 1.8.15. *Když jsou* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *algebraická čísla, pak i* $\alpha + \beta$ *a* $\alpha\beta$ *jsou algebraická čísla.*

Úloha 1.8.16. *Podle tvrzení 1.5.7 je každý zlomek* $p/q \neq \sqrt{2}$. *Zpřesněte to na: pro každé* $p/q \in \mathbb{Q}$ *je*

$$|p/q - \sqrt{2}| > 1/2q^2 \ .$$

Úloha 1.8.17 (sestrojení celých čísel). *Popište podrobně, jak z polookruhu přirozených čísel* $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ *sestrojíme okruh celých čísel* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Úloha 1.8.18. *Nalezněte další příklady pro toto „krácení“ zlomků, jež dává správný výsledek úplně nesprávným postupem:*

$$\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4} \ .$$

Kapitola 2

Limity posloupností

V oddílu 2.1 zavedeme vlastní a nevlastní limitu posloupnosti a probereme její základní vlastnosti: jednoznačnost a vztah k monotonii, podposloupnosti, aritmetickým operacím a uspořádání. Další oddíl 2.2 předkládá šest vět o posloupnostech: o monotónní podposloupnosti v nekonečné i konečné verzi, Bolzanovu–Weierstrassovu, o Cauchyově podmínce, Feketeho lemma a Stolzovu–Cesàrovu. V oddílu 2.3 pomocí limit zavedeme a prozkoumáme obecnou reálnou mocninu a^b a její inverz, obecný logaritmus $\log_a b$. Aritmetiku limit rozšíříme na nekonečna a limes inferior i limes superior posloupnosti definujeme v oddílu 2.4. V posledním oddílu 2.5 operaci limity rozšíříme i na posloupnosti, které klasickou limitu nemají, jako je například $(1, -1, 1, -1, \dots)$. Dostaneme takzvané zobecněné limity.

2.1 Základní výsledky o limitách

Vlastní a nevlastní limita nekonečné posloupnosti. Jednoznačnost limity, existence limity monotónní posloupnosti, aritmetika limit. Překonání stereotypu v tvrzení o limitě a uspořádání. Dva strážníci. Limity polynomiálních a exponenciálních posloupností. Důkaz, že $0 = 2$.

Připomeneme si posloupnosti.

Definice 2.1.1 (posloupnost). *Posloupnost s hodnotami v množině M je funkce $a\colon \mathbb{N} \to M$, již značíme*

$$(a_n) = (a_1, a_2, \dots) \subset M, \quad \textit{kde } a_n \textit{ označuje hodnotu } a(n) \textit{ pro } n \in \mathbb{N}\ .$$

Posloupnostmi zde rozumíme, až na výjimky, tyto nekonečné posloupnosti. Většinou budou reálné: $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Nejprve definujeme vlastní limitu posloupnosti.

Definice 2.1.2 (vlastní limita). *Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Číslo a je limitou posloupnosti (a_n), psáno* $\lim a_n = a$ *nebo* $\lim_{n \to \infty} a_n = a$*, když*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\ .$$

Zde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $n_0, n \in \mathbb{N}$ a

$$\exists\, n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow \ldots \ \text{ je totéž jako }\ \exists\, n_0\, \forall\, n :\ n > n_0 \Rightarrow \ldots\ .$$

Tuto limitu nazýváme vlastní limitou a když ji posloupnost (a_n) má, řekneme, že (a_n) konverguje. Pokud (a_n) nemá vlastní limitu, řekneme, že (a_n) diverguje.

Zavedeme nevlastní limitu. Připomínáme, že $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ označuje rozšířenou reálnou osu.

Definice 2.1.3 (nevlastní limita). *Nevlastní limita posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je prvek $+\infty$ nebo $-\infty$ z $\mathbb{R}^*$ a ($c \in \mathbb{R}$)*

$$\begin{aligned}\lim a_n = +\infty \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, c\, \exists\, n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow a_n > c \\ \lim a_n = -\infty \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, c\, \exists\, n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow a_n < c\ .\end{aligned}$$

Ještě jiné značení pro limitu je $a_n \to a$ či $a_n \to a$, $n \to \infty$. Další definice limity posloupnosti je na straně 82. Nejjednodušší konvergentní posloupnost je konstantní či skoro konstantní posloupnost: když $a_n = c \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, nebo i jen pro každé $n > n_0$, pak zřejmě $\lim a_n = c$. Podmínka $|a_n - a| < \varepsilon$ z definice limity — a_n má od a vzdálenost menší než ε — se ekvivalentně zapíše jako

$$a_n \in (a - \varepsilon,\, a + \varepsilon) \ \text{ nebo jako }\ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon\ .$$

Úloha 2.1.4. *Všimněte si, že tyto tři podmínky jsou symetrické vzhledem k výměně a a a_n. Můžeme stejně dobře říci, že $a \in (a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon)$ a tak dále.*

Limita nemusí existovat, ale posloupnost nikdy nemá více než jednu limitu.

Tvrzení 2.1.5 (jednoznačnost limity). *Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má nejvýše jednu limitu, vlastní nebo nevlastní.*

Důkaz. Ukážeme, že posloupnost nemá dvě vlastní limity. Zbývající případy vlastní a nevlastní limity a dvou nevlastních limit jsou podobné a ponechané jako úloha 2.1.6. Nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ i $\lim a_n = b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Vezmeme $\varepsilon > 0$ menší než $\frac{b-a}{2}$. Pro nějaký index n_0 by mělo platit $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$, tedy $a_n < a + \varepsilon < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$. Stejně tak pro nějaký index n_1 by mělo platit $n > n_1 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon$, tedy $a_n > b - \varepsilon > b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$. Pro $n > \max(n_0, n_1)$ tak nastává $a_n < \frac{a+b}{2}$ i $a_n > \frac{a+b}{2}$, což je spor. □

Změna jen konečně mnoha členů posloupnosti limitu nezmění (úlohy 2.1.8 a 2.1.9). Uvedeme pár příkladů limit. Zřejmě

$$\lim\,(1/n) = 0,\ \lim n = +\infty \ \text{ a }\ \lim\,(-1)^n \ \text{ neexistuje}\ .$$

Je to sice zřejmé, ale první dvě limity vlastně vyslovují archimédovskost $\mathbb{R}$. Ta plyne, jak víme z tvrzení 1.7.2, z úplnosti $\mathbb{R}$, ale i přímo z definice reálných čísel jako rozvojů. Ukážeme, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\ .$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n^{1/n} \geq 1$. Kdyby $\lim n^{1/n}$ nebyla 1, existovalo by $c > 0$ a rostoucí posloupnost přirozených čísel $1 < n_1 < n_2 < \ldots$, že $n_i^{1/n_i} > 1 + c$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak ale, podle binomické věty,

$$\begin{aligned} n_i &> (1+c)^{n_i} = 1 + \binom{n_i}{1} c_i + \binom{n_i}{2} c_i^2 + \cdots + \binom{n_i}{n_i} c_i^n \\ &> \binom{n_i}{2} c_i^2 = \frac{n_i(n_i-1)c_i^2}{2} \ . \end{aligned}$$

Vydělení n_i dává nerovnost

$$1 > \frac{c^2(n_i-1)}{2}, \ \text{ čili } \ \frac{2}{c^2} + 1 > n_i \ .$$

Ta je ale nemožná, neboť posloupnost $1 < n_1 < n_2 < \ldots$ není ničím shora omezená. Máme spor a proto $\lim n^{1/n} = 1$.

Úloha 2.1.6. *Dokažte, že posloupnost nemá současně vlastní a nevlastní limitu ani současně obě nevlastní limity.*

Úloha 2.1.7. $\lim \sqrt[n/2]{n} = ?$.

Úloha 2.1.8. *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *s* $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ *a* $(b_n) \subset \mathbb{R}$ *splňuje, že* $a_n = b_n$ *pro každé* $n > n_0$. *Dokažte, že pak* $\lim b_n = a$.

Úloha 2.1.9. *Prozkoumejte situaci, kdy* (b_n) *splňuje pouze slabou verzi předchozí podmínky. Tedy* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *s*

$$\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$$

a pro $(b_n) \subset \mathbb{R}$ *oba vztahy* $a_n = b_n$ *a* $a_n \neq b_n$ *platí pro nekonečně mnoho indexů* n. *Má* (b_n) *limitu? Když ji má, v jakém vztahu je k* a*?*

Tvrzení 2.1.10 ($\mathbb{Q}$ je v $\mathbb{R}$ hustá). *Pro každé číslo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *existuje posloupnost* $(b_n) \subset \mathbb{Q}$*, že* $\lim b_n = a$.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ nechť $b_n := \max(\{k \in \mathbb{Z} \mid k/n \leq \alpha\})/n$. Pak $b_n \in \mathbb{Q}$ a $\lim b_n = \alpha$ (protože $b_n \leq \alpha < b_n + n^{-1}$). Viz úloha 2.1.11. $\square$

Úloha 2.1.11. *Odkud víme, že existuje maximum v důkazu?*

Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ splňující nerovnosti

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$$

se nazývá *neklesající*, při ostrých nerovnostech *rostoucí*. Obrácením nerovností dostáváme *nerostoucí*, respektive *klesající* posloupnost. Neklesající a nerostoucí posloupnosti se souhrně nazývají *monotónní*. Posloupnost (a_n) je *shora omezená*, když existuje číslo $c \in \mathbb{R}$, že pro každé n je $a_n < c$. Podobně se definuje omezenost zdola. *Omezená posloupnost* je shora i zdola omezená.

Úloha 2.1.12. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Následuje první z řady tvrzení a vět garantujících existenci limity posloupnosti.

Tvrzení 2.1.13 (limita monotónní posloupnosti). *Je-li $(a_n) \subset \mathbb{R}$ neklesající a shora omezená, pak (a_n) konverguje. Když je (a_n) neklesající a není shora omezená, pak* $\lim a_n = +\infty$.

Důkaz. Nechť je $(a_n) \subset \mathbb{R}$ neklesající a shora omezená. Supremum

$$a = \sup(\{a_1,\, a_2,\, \dots\})$$

(viz věta 1.7.30) je dobře definované díky omezenosti (a_n) shora. Podle aproximační vlastnosti suprema pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \le a\ .$$

Díky monotonii (a_n) a vlastnostem suprema tyto nerovnosti splňuje kromě a_{n_0} i každé a_n s $n > n_0$. Tedy $n > n_0 \Rightarrow -\varepsilon < a_n - a \le 0$ a $\lim a_n = a$. Důkaz druhé části tvrzení je ponechán jako úloha 2.1.14. $\square$

Je-li (a_n) nerostoucí a zdola omezená, dokáže se podobně, že konverguje k infimu množiny $\{a_1, a_2, \dots\}$. Je-li a_n nerostoucí a zdola neomezená, je $\lim a_n = -\infty$. Monotonii (a_n) stačí předpokládat jen pro $n > n_0$ (podle úlohy 2.1.8).

Úloha 2.1.14. *Dokažte, že neklesající a shora neomezená posloupnost má limitu $+\infty$.*

Definice 2.1.15 (podposloupnost). *Řekneme, že posloupnost (b_n) je podposloupnost posloupnosti (a_n), když pro nějakou rostoucí posloupnost $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ přirozených čísel platí*

$$b_n = a_{k_n},\ n = 1,\, 2,\, \dots\ .$$

Je jasné, že $k_n \ge n$ pro každé n. Podposloupnost tak z posloupnosti vznikne vypuštěním některých členů.

Úloha 2.1.16. *Ukažte, že podposloupnost je jako binární relace na posloupnostech tranzitivní a reflexivní, ale obecně ne symetrická ani slabě antisymetrická.*

Důkaz následujícího tvrzení ponecháváme jako úlohu.

Tvrzení 2.1.17 (limita podposloupnosti). *Je-li (b_n) podposloupnost posloupnosti (a_n) a* $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$, *pak i* $\lim b_n = a$.

Úloha 2.1.18. *Dokažte předchozí tvrzení.*

Nalezneme-li v (a_n) dvě podposloupnosti s různými limitami, $\lim a_n$ neexistuje. Třeba konstantní posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$ a $(-1, -1, -1, \dots)$ s limitami 1 a -1 jsou podposloupnostmi v $(a_n) = ((-1)^n)$, takže $\lim\,(-1)^n$ neexistuje. Podobně $\lim\,(-n + (-1)^n n)$ neexistuje, protože daná posloupnost má podposloupnost s limitou 0 i podposloupnost s limitou $-\infty$. Stojí za to si všimnout (jak se mi poštěstilo v říjnu 2018 při přípravě na přednášku) a pak to hned explicitně uvést, že přítomnost dvou podposloupností s různými limitami je nejenom postačující, ale i nutná podmínka neexistence limity posloupnosti.

Věta 2.1.19 (neexistence limity). *Posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *nemá limitu* $\iff$ (a_n) *má dvě podposloupnosti, které mají limity s různými hodnotami.*

Důkaz. Implikaci $\Leftarrow$, plynoucí z tvrzení 2.1.17, jsme již nahlédli. Implikace $\Rightarrow$ plyne z důsledku 2.4.18 o pár desítek stran dále (vezmeme podposloupnosti s limitami $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$). Takový dopředný odkaz by mohl hrozit vytvořením argumentačního kruhu, ale k tomu zde nedochází, větu prostě jen uvádíme na místě, kde se nejlépe hodí. $\square$

Nejedná se samozřejmě o bůhvíjaký objev, ale přesná charakterizace situace, kdy nějaký objekt (ne)existuje, je v matematice vždy zajímavá.

Tvrzení 2.1.20 níže je základním nástrojem pro výpočty konkrétních limit. Pro jednoduchost začneme vlastními limitami a nekonečna zahrneme později. Připomínáme trojúhelníkovou nerovnost z úlohy 1.5.5, kterou budeme v odhadech neustále používat.

Tvrzení 2.1.20 (aritmetika vlastních limit). *Nechť* $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ *jsou dvě konvergentní posloupnosti s* $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$. *Pak*

1. *posloupnost* $(a_n + b_n)$ *konverguje a* $\lim\,(a_n + b_n) = a + b$,
2. *posloupnost* $(a_n b_n)$ *konverguje a* $\lim\,(a_n b_n) = ab$,
3. *pokud* $b \neq 0$, *je* (a_n/b_n) *definovaná pro* $n > n_0$, *konverguje a* $\lim\,(a_n/b_n) = a/b$.

Důkaz. 1. Podle Δ-ové nerovnosti,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b|\ .$$

Podle předpokladu pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že pro $n > n_0$ jsou obě poslední absolutní hodnoty menší než ε. Tedy $n > n_0 \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| < 2\varepsilon$, což dokazuje tvrzení o limitě součtu.

2. Nyní

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \le |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b|\ .$$

Pro dané $\varepsilon \in (0, 1)$ existuje n_0, že pro $n > n_0$ je $|a_n - a|, |b_n - b| < \varepsilon$, tedy i $|b_n| < |b| + 1$. Tedy $n > n_0 \Rightarrow |a_n b_n - ab| < \varepsilon(|a| + |b| + 1)$, což dokazuje tvrzení o limitě součinu.

3. Konečně (pro $b_n \neq 0$)

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \frac{|(a_n - a)b + a(b - b_n)|}{|b_n| \cdot |b|} \\ &\leq (|b_n| \cdot |b|)^{-1}\big(|a_n - a| \cdot |b| + |a| \cdot |b - b_n|\big) .\end{aligned}$$

Pro dané $\varepsilon \in (0, |b|/2)$ existuje n_0, že pro $n > n_0$ je $|a_n - a|, |b_n - b| < \varepsilon$, tedy i $|b_n| > |b|/2$ (speciálně $b_n \neq 0$). Tedy $n > n_0 \Rightarrow |a_n/b_n - a/b| < \varepsilon(|a| + |b|)\frac{2}{b^2}$, což dokazuje tvrzení o limitě podílu. □

Několikrát jsme použili známý důkazový obrat ($\varepsilon, c \in \mathbb{R}$)

$$(\forall\, \varepsilon > 0 :\ \cdots < \varepsilon) \iff (\exists\, c > 0\, \forall\, \varepsilon > 0 :\ \cdots < c\varepsilon) .$$

Úloha 2.1.21. *Zobecněte ho z konstantního násobku epsilonu, $\varepsilon \mapsto c\varepsilon$, na složitější funkce. Funguje třeba pro funkci $\varepsilon \mapsto 1 + \varepsilon$ nebo $\varepsilon \mapsto \sqrt{\varepsilon}$?*

Jiný použitý důkazový obrat je ($n, n_0 \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}&(\exists\, n_0\, \forall\, n :\ n > n_0 \Rightarrow P)\ \&\ (\exists\, n_0\, \forall\, n :\ n > n_0 \Rightarrow Q) \\ &\iff (\exists\, n_0\, \forall n :\ n > n_0 \Rightarrow (P \,\&\, Q)) .\end{aligned}$$

(Podle logické syntaxe se vázané proměnné n_0 a n mohou označovat stále stejně a netřeba zavádět n_1, n_2 apod. Pro přehlednost zápisu se to ale dělá.) Obdobně pro vícečlenné konjunkce.

Aritmetika limit funguje jen jednosměrně, rovnice jako

$$\lim\,(a_n + b_n) = \lim\, a_n + \lim\, b_n$$

se dá použít jen při čtení zprava doleva. Rozhodně není obecně pravda, že když $a_n + b_n \to a$, pak (a_n) i (b_n) konvergují a $\lim\,(a_n + b_n) = \lim\, a_n + \lim\, b_n = a$, viz třeba $a_n = (-1)^n$ a $b_n = -(-1)^n$. Totéž pro součin a podíl. V tomto se při počítání s limitami občas chybuje. Následující tvrzení uvádí situaci, kdy pro výpočet limity součinu stačí slabší předpoklady.

Tvrzení 2.1.22 (násobení limitní nulou). *Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, přičemž posloupnost (a_n) je omezená a* $\lim\, b_n = 0$. *Pak*

$$\lim\,(a_n b_n) = 0 .$$

Úloha 2.1.23. *Dokažte předchozí tvrzení.*

Úloha 2.1.24. *Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, přičemž* $\lim\, a_n$ *neexistuje, ale (b_n) konverguje. Co lze (pravdivého) říci o limitách* $\lim\,(a_n + b_n)$ *a* $\lim\,(a_n b_n)$*?*

Jako příklad nalezneme limitu posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ dané rekurencí

$$a_1 = 2 \ \text{ a } \ a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\ .$$

Pár prvních hodnot: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{17}{12}$ a $a_4 = \frac{577}{408}$. Zřejmě vždy $a_n > 0$. Zdá se, že (a_n) je nerostoucí. Dokážeme to. Potřebujeme, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ platilo, že $a_{n+1} \le a_n$, to jest $\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \le a_n$, což je ekvivalentní nerovnosti $\sqrt{2} \le a_n$. Potřebujeme tedy ukázat, že posloupnost má tuto lepší dolní mez. Pro $n = 1$ nerovnost jistě platí a pro $n > 1$ též:

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} + 2a_{n-1}^{-1}}{2} \ge \sqrt{a_{n-1}2a_{n-1}^{-1}} = \sqrt{2}$$

— toto není důkaz indukcí, pro $a = a_{n-1}$ a $b = 2a_{n-1}^{-1}$ jsme použili nerovnost $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ z úlohy 1.5.4. Tedy (a_n) je nerostoucí. Protože je zdola omezená, má podle tvrzení 2.1.13 vlastní limitu $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Patrně $a \ge \sqrt{2}$. Tato limita splňuje rovnici, jež vznikne z rekurence $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ vynecháním indexů. Limita levé strany je totiž $\lim a_{n+1} = \lim a_n = a$ podle tvrzení 2.1.17 a limita pravé strany je $\lim\left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{\lim a_n}{2} + \frac{1}{\lim a_n} = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}$ podle tvrzení 2.1.20. Takže

$$a = \frac{a}{2} + \frac{1}{a},\ \frac{a^2}{2} = 1 \ \text{ a } \ a = \sqrt{2}\ .$$

Dokázali jsme tak, že

$$\lim a_n = \sqrt{2}\ .$$

Zjistíme, jak se porovnání členů dvou posloupností odrazí v porovnání limit a naopak. Zahrneme i nevlastní limity. Připomínáme, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$-\infty < a < +\infty \ \text{ a tedy } -\infty < +\infty\ .$$

Tvrzení 2.1.25 (limita a uspořádání). *Nechť posloupnosti* $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ *mají limity* $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = b \in \mathbb{R}^*$.

1. *Když $a < b$, tak existuje n_0, že $m, n > n_0 \Rightarrow a_m < b_n$. (!)*

2. *Když existuje n_0, že pro každé $n > n_0$ je $a_n \le b_n$, pak $a \le b$.*

Důkaz. 1. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Pro dané $\varepsilon \in (0, \frac{b-a}{2})$ existuje n_0, že pro $m, n > n_0$ je $a_m < a + \varepsilon < \frac{a+b}{2} < b - \varepsilon < b_n$, takže $a_m < b_n$. Nechť $a = -\infty$ a $b \in \mathbb{R}$. Pro dané $\varepsilon = 1$ existuje n_0, že pro $m, n > n_0$ je $a_m < b - 1 = b - \varepsilon < b_n$, takže $a_m < b_n$. Zbylé dva případy ($a = -\infty$, $b = +\infty$ a $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$) jsou podobné.

2. Kdyby bylo $a > b$, pro $n > n_0$ by podle části 1 platilo $a_n > b_n$, což je ve sporu s předpokladem. □

Implikaci v první části nelze obecně obrátit, protože ostrá nerovnost může v limitě přejít v rovnost: posloupnosti $(a_n) = (1 - \frac{1}{n})$ a $(b_n) = (1, 1, \dots)$ splňují $a_m < b_n$ pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, ale $\lim a_n = \lim b_n = 1$.

Úloha 2.1.26. *Část 1 předešlého tvrzení se v přednáškách a učebnicích analýzy uvádí tradičně ve slabší formě s $m = n$ takto:*

$$\text{když } a < b, \text{ tak existuje } n_0, \text{ že } n > n_0 \Rightarrow a_n < b_n \ .$$

Jaké jsou výhody a nevýhody naší silnější verze? Viz též úloha 2.6.1 a závěrečné poznámky.

Úloha 2.1.27. *Pokračujeme v dekonstrukci tvrzení o limitách a všimneme si, že implikace v části 2 předešlého tvrzení platí i se slabším předpokladem*

P: pro každé n_0 existují indexy $m, n > n_0$, že $a_m \le b_n$.

1. *Dokažte, že to je opravu slabší předpoklad — když (a_n) a (b_n) splňují předpoklad implikace v části 2 tvrzení 2.1.25, pak splňují i P.*
2. *Část 2 tvrzení 2.1.25 s novým předpokladem P platí: $P \Rightarrow a \le b$.*
3. *Uveďte dvě posloupnosti (a_n) a (b_n) s limitami a a b, které nesplňují předpoklad části 2 tvrzení 2.1.25, ale splňují P. S novým předpokladem P tak má část 2 tvrzení 2.1.25 širší obor platnosti.*

Tvrzení 2.1.28 (o dvou strážnících). *Nechť $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ splňují, že $\lim a_n = \lim c_n = a \in \mathbb{R}$ a pro každé $n > n_0$ je $a_n \le b_n \le c_n$. Pak (b_n) konverguje a $\lim b_n = a$.*

Důkaz. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon$ (první a poslední nerovnost je z konvergence (a_n) a (c_n), druhá ze sevření (b_n) oběma posloupnostmi), takže i $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$ a $\lim b_n = a$. □

Tvrzení se snadno modifikuje pro nevlastní limitu $a = \pm\infty$, kdy stačí pouze jeden strážník.

Úloha 2.1.29. *Zformulujte tvrzení o dvou strážnících, vlastně o jednom strážníkovi, pro nevlastní limitu a dokažte ho.*

Dá se poznat, jestli posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ konverguje nebo jestli vůbec má limitu, jen porovnáváním jejích členů a_n podle velikosti? Touto otázkou se zabýval anglický matematik G. H. Hardy a jeho odpověď, formulovanou v modernějším a jasnějším matematickém jazyce, uvádíme níže. Přesněji, každé (a_n) přiřadíme graf $G(a_n) = (\mathbb{N}, E = M \cup C)$ s vrcholy v přirozených číslech a s modrými a červenými hranami tak, že $\{m < n\}$ je modrá hrana, pokud $a_m < a_n$, červená hrana, pokud $a_m > a_n$ a vůbec není hrana, pokud $a_m = a_n$. Dá se poznat, zda (a_n) konverguje, jen z grafu $G = G(a_n)$? Nedá, posloupnosti $(\frac{1}{n})$ a $(-n)$ mají obě graf G jen se samými červenými hranami (a žádnou nehranou), přičemž první má limitu 0 a druhá $-\infty$. Trivialita? Jistě, ale zajímavější je příklad posloupností

$$((-1)^{n+1}/n) \ \text{ a } \ (p_n) = ((-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}/n)\ .$$

Obě mají týž graf G, v němž je dvojice $\{m < n\}$ červená hrana pro liché m a modrá hrana pro sudé m, ale první posloupnost má limitu 0 a druhá vůbec limitu nemá. Ani samotná existence limity, vlastní či nevlastní, se tak nedá z grafu G poznat. Nicméně, jak hned dokážeme, jiný podstatně odlišný příklad dvou posloupností s existující a neexistující limitou ale shodným grafem G už není. Řekneme, že posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *zjevně osciluje*, pokud ji lze rozložit na dvě podposloupnosti (b_n) a (c_n) (obě nekonečné) tak, že pro nějaká dvě čísla $b, c \in \mathbb{R}$ máme

$$\lim b_n = \inf(\{b_1, b_2, \ldots\}) = b > c = \sup(\{c_1, c_2, \ldots\}) = \lim c_n$$

a alespoň jedna z rovností $b_n = b$ a $c_n = c$ nastává jen pro konečně mnoho n. Například hořejší druhá posloupnost (p_n) zjevně osciluje, kolem $b = 1$ a $c = -1$. Pro danou posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ definujeme tři unární predikáty

$$N_<(\cdot),\ N_=(\cdot)\ \text{ a }\ N_>(\cdot)$$

na přirozených číslech: pro $n \in \mathbb{N}$ predikát $N_<(n)$ platí, právě když je množina $\{m \in \mathbb{N} \mid a_m < a_n\}$ nekonečná, a podobně pro zbylé dva predikáty, menšítko nahradíme znakem rovnosti či většítkem. Teď už můžeme uvést Hardyho výsledek, který jsme tímto vyhrabali ze zapomnění.

Věta 2.1.30 (G. H. Hardy, 1910). *Jsou-li (a_n) a (b_n) takové posloupnosti, že $\lim a_n$ existuje, $\lim b_n$ neexistuje a grafy $G(a_n)$ a $G(b_n)$ se shodují, potom posloupnost (b_n) zjevně osciluje. Vyplývá to z faktu, že pro každou posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ jsou následující dvě vlastnosti ekvivalentní.*

1. *Posloupnost (a_n) má limitu (i nevlastní) nebo zjevně osciluje.*

2. *Platí formule*

$$\begin{aligned}&\big[\forall\, m\, \forall\, n:\ (N_=(m)\,\&\, N_=(n)) \Rightarrow a_m = a_n\big]\ \&\\ &\big[(\exists\, m:\ N_=(m)) \Rightarrow (\forall\, n:\ N_=(n) \vee \neg N_<(n) \vee \neg N_>(n))\big]\ \&\\ &\big[(\neg\exists\, m:\ N_=(m)) \Rightarrow (\exists\, k:\ n > k \Rightarrow \neg N_<(n) \vee \neg N_>(n))\big]\end{aligned}$$

— [je jen nejvýše jedno $\alpha \in \mathbb{R}$, že $a_n = \alpha$ pro nekonečné mnoho indexů n], [existuje-li takové α, pak pro každý člen a_n posloupnosti různý od α posloupnost obsahuje jen konečně mnoho členů pod a_n nebo jen konečně mnoho členů nad a_n] a [když takové α neexistuje, pak to platí pro každý člen a_n posloupnosti, s konečně mnoha výjimkami].

Důkaz. Pro danou posloupnost (a_n) a číslo $m \in \mathbb{N}$ z grafu $G = G(a_n)$ snadno poznáme, zda predikáty $N_<(m)$, $N_=(m)$ a $N_>(m)$ platí. Například $N_<(m)$ platí, právě když G obsahuje nekonečně mnoho červených hran $\{m < k\}$. Z grafu G tedy i snadno poznáme, zda je splněna uvedená formule. Nemusí to být tak jasné pro její první klauzuli $[\ldots]$ (pro zbylé dvě klauzule to je jasné), protože v ní kromě proměnných $m, n \in \mathbb{N}$ vystupují i členy a_m a a_n posloupnosti, které z

G rozhodně nepoznáme. Nicméně i splnění první klauzule se dá z G s trochou důmyslu poznat (úloha 2.1.31). Jsou-li tedy (a_n) a (b_n) jak je zadáno, protože $G = G(a_n) = G(b_n)$ a $\lim a_n$ existuje, platí formule pro (a_n) i pro (b_n) a podle ekvivalence ve větě posloupnost (b_n) zjevně osciluje.

Zbývá ovšem dokázat uvedenou ekvivalenci. Implikace $1 \Rightarrow 2$ je snadná, pro posloupnost s limitou nebo zjevně oscilující se lehce ověří splnění uvedené formule (úloha 2.1.32). Dokážeme, že $2 \Rightarrow 1$. Buď tedy dána posloupnost (a_n), pro níž je formule v části 2 splněna. Rozložíme ji na tři (ne nutně nekonečné) podposloupnosti (b_n), (c_n) a (d_n): $(b_n) = (a_{k_n})$ jsou všechny ty a_m, že platí $\neg N_<(m)$, $(c_n) = (a_{l_n})$ jsou všechny ty ze zbývajících a_m, že platí $\neg N_>(m)$ a $(d_n) = (a_{m_n})$ jsou zbylé a_m. Pro každé n, kdy je index m_n definován, tedy platí $N_<(m_n) \,\&\, N_>(m_n)$.

□

Úloha 2.1.31. *Jak tedy z grafu $G(a_n)$ poznáme, jestli pro posloupnost (a_n) nastává $a_n = \alpha$ pro nekonečně mnoho n pro více než jedno číslo α?*

Úloha 2.1.32. *Ověřte implikaci $1 \Rightarrow 2$ věty.*

Tvrzení 2.1.33 (dvě základní limity). *Nechť $\alpha, q \in \mathbb{R}$. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \ldots \quad \alpha > 0 \\ 1 & \ldots \quad \alpha = 0 \\ 0 & \ldots \quad \alpha < 0\,, \end{cases} \quad \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \ldots \quad q > 1 \\ 1 & \ldots \quad q = 1 \\ 0 & \ldots \quad q \in (-1,1) \\ \textit{neexistuje} & \ldots \quad q \le -1\,. \end{cases}$$

Důkaz. Triviální případy $\alpha = 0$ a $q = 1$ jsou limity konstantních posloupností. Nechť $\alpha > 0$. Pilná čtenářka vyřešila úlohu 2.1.14, a tak $\lim n^\alpha = +\infty$ plyne z neomezenosti posloupnosti (n^α) shora (a toho, že neklesá). Kdyby byla shora omezená, měli bychom podle věty 1.7.30 supremum

$$a = \sup(\{n^\alpha \mid n \in \mathbb{N}\}) > 0\,.$$

Protože $2^\alpha > 1$, podle aproximační vlastnosti suprema existuje $n \in \mathbb{N}$, že $n^\alpha > a/2^\alpha$. Pak ale

$$(2n)^\alpha = 2^\alpha n^\alpha > a\,,$$

ve sporu s vlastnostmi suprema. Další případy jsou ponechané jako úloha. □

Úloha 2.1.34. *Dokažte zbylé případy předešlého tvrzení.*

Zde je na místě poznámka. Čtenář má asi nějakou představu o tom, co je mocnina n^α pro $n \in \mathbb{N}$ a obecný reálný exponent $\alpha \in \mathbb{R}$ za střední školy (floskule vyučujícího na VŠ), ale přesně ji zavedeme až v oddílu 2.3. Podobně zatím „nevíme“, že platí identita $(2n)^\alpha = 2^\alpha n^\alpha$ a že pro $\alpha > 0$ je $2^\alpha > 1^\alpha$.

Důsledek 2.1.35 (limity odmocniny) *Nechť $q > 0$ je reálné číslo. Pak*

$$\lim q^{1/n} = 1 \ .$$

Důkaz. Protože $\frac{1}{q^{1/n}} = (\frac{1}{q})^{1/n}$, stačí podle části 3 tvrzení 2.1.20 rovnost dokázat pro $q \geq 1$. □

Tvrzení 2.1.36 (exponenciální versus polynomiální růst). *Nechť $\alpha, q \in \mathbb{R}$ s $\alpha > 0$ a $q > 1$. Pak*

$$\lim \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty \ .$$

Každá exponenciála, se základem q sebebližším jedné, tak pro $n \to \infty$ přeroste každý polynom, se sebevětším stupněm α: $1.000001^n > n^{10000}$ pro všechna $n > n_0$.

Důkaz. Búno $\alpha \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že pro libovolné $c > 0$ nerovnost $q^n/n^\alpha > c$ platí pro všechna velká n. Je ekvivalentní nerovnosti

$$q > c^{1/n} \left(n^{1/n}\right)^\alpha \ .$$

□

Úloha 2.1.37. *Ohadněte předchozí n_0.*

Následující výklad je motivován identitami pro mocniny a^b v oddílu 2.3, ale týká se i limit a proto je zde. Mějme nějakou identitu

$$a = b \ ,$$

v níž $a = a(r, s, \dots)$ a $b = b(r, s, \dots)$ jsou výrazy, které v závislosti na nějakých parametrech $r, s, \dots$ nabývají reálné hodnoty nebo jsou nedefinované. Platnost identity $a = b$ pak můžeme definovat liberálně tak, že neplatí právě a jenom pro ty parametry $r, s, \dots$, kdy jsou a i b definované, ale mají různé hodnoty. Jinak, když a i b jsou definované se stejnou hodnotou nebo alespoň jeden z výrazů a a b není definovaný, identita platí. (Co není zakázáno, je povoleno. Neliberální pojetí — co není povoleno, je zakázáno — je, že $a = b$ platí, právě když obě strany jsou definované a mají stejnou hodnotu.) V tomto duchu můžeme tvrzení 2.1.17 stručně, ale trochu slaběji, formulovat: jsou-li $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ posloupnosti a (b_n) je podposloupnost (a_n), pak platí identita

$$\lim b_n = \lim a_n \ .$$

(Podposloupnost nikdy nemá limitu různou od limity posloupnosti.) Podobně tvrzení 2.1.20 (uvažujeme jen vlastní limity) tvrdí, ve slabší podobě, platnost identit

$$\begin{aligned} \lim (a_n + b_n) &= \lim a_n + \lim b_n \ , \\ \lim (a_n b_n) &= (\lim a_n)(\lim b_n) \ \text{ a} \\ \lim (a_n / b_n) &= (\lim a_n)/(\lim b_n) \end{aligned}$$

pro libovolné dvě posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$. Silněji původní tvrzení 2.1.20 a 2.1.17 říkají, že pro definovanou pravou stranu je definovaná i levá a hodnoty se rovnají.

Ale pozor na to, že takové liberální identity nejsou tranzitivní (vše má svou cenu). Čtenář například jistě vidí, že pro posloupnosti $(a_n) = ((-1)^{n+1})$, $(b_n) = (-1)^n)$ a $(c_n) = (1, 1, \dots)$ — třetí je podposloupností první i druhé a platí identita $\lim a_n + \lim b_n = \lim c_n + \lim c_n$ — výpočet

$$0 = \lim 0 = \lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = \lim c_n + \lim c_n = 1 + 1 = 2$$

nedokazuje identitu $0 = 2$, i když každá ze šesti identit v něm obsažených v liberálním smyslu platí.

Úloha 2.1.38. *V kterých dvou sousedních identitách výpočtu nelze navázat tranzitivitou a proč?*

Pozor tedy na podobné omyly při práci s identitami, v nichž jedna strana může být definovaná a druhá ne.

2.2 Šest vět o posloupnostech

Existence monotónní podposloupnosti, v nekonečné i konečné verzi. Omezená posloupnost má konvergentní podposloupnost. Konvergence a cauchyovskost. Feketeho lemma. Slova neobsahující abba. Stolzova–Cesàrova věta.

Jako monotónní posloupnosti označujeme neklesající posloupnosti a nerostoucí posloupnosti. Následující věta snad patří více do kombinatoriky, ale je sama o sobě zajímavá a umožňuje rychle dokázat Bolzanovu–Weierstrassovu větu.

Věta 2.2.1 (o monotónní podposloupnosti). *Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má monotónní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je libovolná posloupnost. *Horizont* je index $n \in \mathbb{N}$ splňující $m > n \Rightarrow a_n > a_m$ (za horizont není vidět). Má-li (a_n) nekonečně mnoho horizontů $1 \le n_1 < n_2 < \dots$, jsme hotovi, pak $a_{n_1} > a_{n_2} > \dots$ je klesající podposloupnost. Má-li jen konečně mnoho horizontů, buď n_1 index větší než všechny horizonty. Protože není horizontem, existuje $n_2 > n_1$, že $a_{n_1} \le a_{n_2}$. Protože n_2 není horizontem, existuje $n_3 > n_2$, že $a_{n_2} \le a_{n_3}$. A tak dále, $a_{n_1} \le a_{n_2} \le \dots$ je neklesající podposloupnost a jsme zase hotovi. □

Následuje konečná verze předchozí věty. Pracuje se v ní s konečnými posloupnostmi a důkaz je překvapivě trochu složitější.

Věta 2.2.2 (Erdősova–Szekeresova). *Nechť $l = (k-1)^2 + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, a $A = (a_1, a_2, \dots, a_l) \subset \mathbb{R}$ je konečná posloupnost délky l. Pak A má monotónní podposloupnost délky k.*

Důkaz. Uvážíme zobrazení $f\colon \{1,2,\ldots,l\} \to \mathbb{N}^2$, kde $f(i) = (r,s)$ znamená, že nejdelší neklesající podposloupnost v A začínající v a_i má délku r a podobně s udává délku nejdelší nerostoucí podposloupnosti v A začínající v a_i. Kdyby A neměla monotónní podposloupnost délky k, šlo by f do $\{1,2,\ldots,k-1\}^2$ a jeho obraz by byl nejvýše $(k-1)^2$-prvkový. Definiční obor f však má více prvků, $(k-1)^2+1$, takže f by nemohlo být prosté zobrazení. Tedy by existovaly i,j, že $1 \le i < j \le l$ a $f(i) = f(j) = (a,b)$. To ale není možné: pro $a_i \le a_j$ můžeme nejdelší neklesající podposloupnost začínající v a_j prodloužit o a_i a mělo by být $f(i) = (\ge a+1, \cdot)$ a pro $a_i > a_j$ můžeme nejdelší nerostoucí podposloupnost začínající v a_j prodloužit o a_i a mělo by být $f(i) = (\cdot, \ge b+1)$. V obou případech máme spor s $f(i) = (a,b)$. Takže f musí být prosté a A musí obsahovat monotónní podposloupnost délky k. □

V každé 101-tici (a vícetici) čísel tak vždy nalezneme nerostoucí nebo neklesající jedenáctičlennou podposloupnost.

Úloha 2.2.3. *Dokažte, že když $l = (k_1-1)(k_2-1)+1$ pro $k_1,k_2 \in \mathbb{N}$, pak A obsahuje neklesající podposloupnost délky k_1 nebo nerostoucí podposloupnost délky k_2.*

Úloha 2.2.4. *Ukažte, že hodnota $(k-1)^2+1$ v Erdősově–Szekeresově větě se nedá zmenšit.*

Věta 2.2.2 nese jméno maďarského matematika *Paula (Pála) Erdőse (1913–1996)* (jeden z nejvýznamnějších matematiků 20. století, s více než 1400 publikacemi s mnoha spoluautory, asi nejdůležitější jsou jeho práce o pravděpodobnostních metodách v teorii čísel a kombinatorice) a maďarsko-australského matematika *Georga (Györgyho) Szekerese (1911–2005)* (spolu s P. Erdősem založil kombinatorickou geometrii, pracoval i v asymptotické teorii grup a číselných rozkladů a v obecné teorii relativity).

Věta 2.2.5 (Bolzanova–Weierstrassova). *Každá omezená reálná posloupnost má konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť je dána omezená posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$.

První důkaz. Podle věty 2.2.1 má (a_n) monotónní podposloupnost (b_n), jež je zřejmě omezená. Díky tvrzení 2.1.13 je (b_n) konvergentní.

Druhý důkaz. Vezmeme interval $[a,b] \supset (a_n)$ a opakovaně ho dělíme na poloviny tak, že daná polovina stále obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n). Podle důsledku 1.7.43 (Cantorova věta o vnořených intervalech) existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ ležící ve všech polovinách. Lehce se vidí, že α je limitou podposloupnosti posloupnosti (a_n). Viz úloha 2.2.6. □

Úloha 2.2.6. *Rozepište druhý důkaz podrobně.*

Věta 2.2.5 se jmenuje podle pražského italsko-německo-českého kněze, filosofa a matematika *Bernarda Bolzana (1781–1848)* (v analýze byl B. Bolzano průkopníkem přesného přístupu a je autorem první, i když ne zcela bezchybné, konstrukce spojité funkce bez derivace) a německého matematika *Karla Weierstrasse (1815–1897)* (je známý přesným budováním matematické analýzy, založil komplexní analýzu na mocninných řadách, zobecnil transcendenci čísel e a π). Lehce se rozšíří na neomezené posloupnosti, důkaz necháme jako úlohu.

Úloha 2.2.7. *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 2.2.8 (rozšířená B.–W. věta). *Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má podposloupnost s vlastní nebo nevlastní limitou.*

Následující důsledek Bolzanovy–Weierstrassovy věty se často používá. Zobecníme ho ve větě 4.2.18.

Důsledek 2.2.9 (používaný důsledek). *Buďte dána reálná čísla $a \le b$ a posloupnost $(a_n) \subset [a, b]$. Pak (a_n) má konvergentní podposloupnost (b_n) s limitou*

$$\lim b_n = \alpha \in [a, b] .$$

Důkaz. Konvergentní podposloupnost (b_n) s limitou $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje podle věty 2.2.5. Protože vždy $a \le b_n \le b$, je $\alpha \in [a, b]$ podle tvrzení 2.1.25. □

Úloha 2.2.10. *Ukažte, že pro jiné typy intervalů ($[a, b)$, $(-\infty, b]$ apod.) předchozí důsledek neplatí.*

Připomeneme si cauchyovské posloupnosti (viz Cantorova konstrukce $\mathbb{R}$).

Definice 2.2.11 (cauchyovská posloupnost). *Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je cauchyovská nebo též Cauchyova, pokud*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon .$$

Členy posloupnosti se tak k sobě vzájemně (v tomto přesném smyslu) neomezeně přibližují. Je jasné, že konvergentní posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je cauchyovská: když $a = \lim a_n \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak pro n_0 splňující $n > n_0 \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$ máme podle trojúhelníkové nerovnosti patrně i $m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \le |a_m - a| + |a - a_m| < 2\varepsilon$. Cauchyovskost je tedy pro konvergenci posloupnosti nutná. Že je i postačující představuje základní výsledek reálné analýzy.

Věta 2.2.12 (Cauchyho podmínka). *Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je cauchyovská, právě když je konvergentní.*

Důkaz. Implikaci $\Leftarrow$ jsme již dokázali. Dokážeme $\Rightarrow$. Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ buď cauchyovská. Je tedy omezená. (Nechť $\varepsilon = 1$ a n_0 splňuje, že $m, n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < 1$. Pak položíme $m = n_0 + 1$ a pro každé n je $|a_n| \le \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a_{n_0+1}|)$.) Podle věty 2.2.5 má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{k_n}), $\lim a_{k_n} = a \in \mathbb{R}$. Pro dané $\varepsilon > 0$ nyní vezmeme n_0, že $m, n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$ a i $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$. Pro každé $n > n_0$ potom máme

$$|a_n - a| \le |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < 2\varepsilon$$

(první nerovnost $|\cdot| < \varepsilon$ platí díky cauchyovskosti neboť $k_n \ge n$ a druhá $|\cdot| < \varepsilon$ díky $a_{k_n} \to a$) a tedy a je limitou celé posloupnosti, $\lim a_n = a$. $\Box$

Nevlastní limity jsou v rozporu s cauchyovskostí: je jasné, že když $\lim a_n = \pm\infty$, pak (a_n) není Cauchyova. Cauchyovskost posloupnosti je důležitá vlastnost, která umožňuje zkoumat úplnost (nepřítomnost „děr“) daného prostoru i za situace, kdy nemáme k dispozici uspořádání jako v $\mathbb{R}$, třeba v případě komplexních čísel $\mathbb{C}$ vybavených obvyklou vzdáleností $|z_1 - z_2|$. Ve světě zlomků $\mathbb{Q}$ tato věta neplatí: když $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ má za limitu $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, tak je posloupnost (a_n) cauchyovská, ale nemá ve $\mathbb{Q}$ limitu.

Následující věta je užitečná v kombinatorice a je příbuzná tvrzení 2.1.13. Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ nazveme *subaditivní* (resp. *superaditivní*), když pro každé dva indexy $m, n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $a_{m+n} \le a_m + a_n$ (resp. $a_{m+n} \ge a_m + a_n$). Nazveme ji *submultiplikativní* (resp. *supermultiplikativní*), když pro každé dva indexy $m, n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $a_{m+n} \le a_m a_n$ (resp. $a_{m+n} \ge a_m a_n$).

Věta 2.2.13 (Feketeho lemma, aditivní i multiplikativní).

1. *Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je superaditivní (subaditivní) posloupnost. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \sup(\{a_n/n \mid n \in \mathbb{N}\}) \ \left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf(\{a_n/n \mid n \in \mathbb{N}\})\right),$$

kde supremum může být $+\infty$ a infimum $-\infty$.

2. *Nechť $(a_n) \subset (0, +\infty)$ je supermultiplikativní (submultiplikativní) posloupnost. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sup(\{\sqrt[n]{a_n} \mid n \in \mathbb{N}\}) \ \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf(\{\sqrt[n]{a_n} \mid n \in \mathbb{N}\})\right),$$

kde supremum může být $+\infty$ a infimum 0.

Důkaz. 1. Nechť $c \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo menší než uvedené supremum. Podle aproximační vlastnosti suprema vezmeme $m \in \mathbb{N}$, že $a_m/m > c$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ s $n \ge m$ je libovolné. Napíšeme ho jako $n = km + l$, kde $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$ a $0 \le l < m$. Pak podle superaditivity

$$\frac{a_n}{n} \ge \frac{ka_m}{km + l} + \frac{a_l}{n} = \frac{a_m/m}{1 + l/km} + \frac{a_l}{n}\,.$$

Pro $n \to \infty$ i $k \to \infty$, tedy $1 + l/km \to 1$ a $a_l/n \to 0$. Existuje proto n_0, že pro $n > n_0$ je $a_n/n > c$. To dokazuje konvergenci podílu a_n/n k uvedenému supremu. Pro subaditivní posloupnost je argument téměř stejný, jen otočíme nerovnosti.

2. Pro danou $(a_n) \subset (0, +\infty)$ definujeme $(b_n) \subset \mathbb{R}$ vztahem $a_n = 2^{b_n}$, to jest $b_n = \log_2 a_n$ — viz následující oddíl o reálné mocnině. Pak ... multiplikativitě posloupnosti (a_n) odpovídá ... aditivita posloupnosti (b_n) (proč?) a také máme vztah $\sqrt[n]{a_n} = 2^{b_n/n}$. Pro supermultiplikativní (a_n) tak díky části 1 máme

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim 2^{b_n/n} = 2^{\lim b_n/n} = 2^{\sup b_n/n} = \sup 2^{b_n/n} = \sup \sqrt[n]{a_n}$$

(pro stručnost jsme zjednodušili značení suprem) a podobně pro submultiplikativní (a_n). □

Úloha 2.2.14. *Proč ... multiplikativitě posloupnosti (a_n) odpovídá ... aditivita posloupnosti (b_n)? Rozmyslete si, proč přesně platí každá z pěti rovností v posledním výpočtu.*

Úloha 2.2.15. *Co se změní, když předpoklad $(a_n) \subset (0, +\infty)$ nahradíme předpokladem $(a_n) \subset [0, +\infty)$ (tj. povolíme v (a_n) nuly)?*

Michael Fekete (1886–1957), po němž je věta 2.2.13 nazvána, byl maďarsko-izraelský matematik (zabýval se klasickou analýzou, v Budapešti učil mladého Johna von Neumanna, v letech 1945–48 byl rektorem Hebrejské univerzity v Jeruzalémě). Uvedeme typické použití Feketeho lemmatu. Pro další viz úlohy 2.6.2–2.6.5.

Důsledek 2.2.16 (*abba*-prostá slova). *Nechť $f(n)$ je maximální délka l takového slova $u = a_1a_2 \dots a_l$ nad n-prvkovou abecedou, že (i) $a_i \neq a_{i+1}$ pro každé i a (ii) u neobsahuje podposloupnost typu abba (to jest neexistují čtyři indexy $1 \le k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \le l$, že $a_{k_1} = a_{k_4} \neq a_{k_2} = a_{k_3}$). Pak existuje vlastní nebo nevlastní limita* $\lim f(n)/n$.

Důkaz. Podle aditivního Feketeho lemmatu stačí dokázat nerovnost $f(m+n) \ge f(m) + f(n)$. Ta plyne z faktu, že když u je slovo nad m-prvkovou abecedou A splňující (i) a (ii) a s délkou $f(m)$ a v je obdobné slovo pro n-prvkovou abecedu B, kde $A \cap B = \emptyset$, potom zřetězení obou slov uv je slovo nad $(m+n)$-prvkovou abecedou, které splňuje (i) a (ii) a má délku $f(m) + f(n)$. □

Hodnota limity $\lim f(n)/n$ je uvedena v úloze 2.6.6.

Úloha 2.2.17. *K čemu je v definici extremální funkce $f(n)$ dobrá podmínka (i)? Co se změní, když místo abba zakážeme vzor aabb?*

Podle aritmetiky limit daná konečná lineární kombinace konvergentních posloupností konverguje k téže lineární kombinaci limit. Co se ale stane, když vezmeme nekonečnou lineární kombinaci? To spadá do Matematické analýzy III. Teď se podíváme na konečnou ale měnící se lineární kombinaci

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

jež se nedá vyřešit aritmetikou limit. Není však těžké ukázat, že pro $a_n \to A$ i ona jde v limitě k A. Při této příležitosti dokážeme obecnější větu. Nejprve ale přeformulujeme definici limity posloupnosti a na základě toho uvedeme jedno lemma.

Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ a $\varepsilon > 0$. Pro $A \in \mathbb{R}$ položíme $U(A,\varepsilon) := (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ a pro nekonečné A položíme $U(-\infty,\varepsilon) := (-\infty, 1/\varepsilon)$ a $U(+\infty,\varepsilon) := (1/\varepsilon, +\infty)$. Patrně, a to je další ekvivalentní definice limity posloupnosti (viz definice 2.1.2 a 2.1.3),

$$\lim a_n = A \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow a_n \in U(A,\,\varepsilon)\ .$$

Zavedli jsme takové značení, aby nebylo třeba rozlišovat mezi konečnými a nekonečnými hodnotami A. Intervalům $U(A,\varepsilon)$ se říká *okolí bodu A* a opět je zavedeme na začátku kapitoly 4.

Úloha 2.2.18. *Pro každé $A \in \mathbb{R}^*$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že*

$$a \in U(A,\,\varepsilon)\,\&\,|x|, |y| < \delta \Rightarrow x + (1+y)a \in U(A,\,2\varepsilon)\ .$$

Dokažte to.

Následující lemma použijeme jen pro okolí, ale byla by škoda ho zatemnit úzkou formulací, když platí pro každý interval.

Lemma 2.2.19. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je libovolný interval a $\delta_j \in I$, $j = 1, 2, \ldots, n$, jsou jeho prvky. Pak pro každou n-tici $a_1, \ldots, a_n$ kladných reálných čísel existuje číslo $\delta \in I$, že*

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_j a_j = \delta \sum_{j=1}^{n} a_j\ .$$

Důkaz. Každý interval je definovaný splněním jedné či dvou nerovností, například $I = [b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}$. Nerovnosti $\delta_1 \geq b, \ldots, \delta_n \geq b$ vynásobíme po řadě $a_1, \ldots, a_n$, sečteme a vydělíme $a_1 + \cdots + a_n$:

$$\delta := \frac{\sum_{j=1}^{n} \delta_j a_j}{a_1 + \cdots + a_n} \geq \frac{a_1 b + \cdots + a_n b}{a_1 + \cdots + a_n} = b\ .$$

Tedy $\delta \in I$ a $\delta(a_1 + \cdots + a_n) = \sum_{j=1}^{n} \delta_j a_j$. Pro jiné intervaly zůstává argument stejný, klíčové je zachování nerovnosti při vynásobení kladným číslem. □

Nyní již slíbená věta.

Věta 2.2.20 (Stolz, 1885; Cesàro, 1888). *Nechť (a_n) a (b_n) jsou dvě reálné posloupnosti, přičemž $0 < b_1 < b_2 < \ldots$ a $\lim b_n = +\infty$. Pak*

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = A\ .$$

Důkaz. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A \in \mathbb{R}^* \, .$$

Vezmeme n_0, že pro $n \geq n_0$ je $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \in U(A, \varepsilon)$. Pro $n > n_0$ pak je

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n_0}}{b_n} + \frac{\sum_{j=n_0}^{n-1}(a_{j+1} - a_j)}{b_n} = \frac{a_{n_0}}{b_n} + \frac{\sum_{j=n_0}^{n-1}\delta_j \cdot (b_{j+1} - b_j)}{b_n}$$

pro nějaká čísla $\delta_j \in U(A, \varepsilon)$. Podle lemmatu 2.2.19 se suma v čitateli rovná $\delta \cdot \sum_{j=n_0}^{n-1}(b_{j+1} - b_j) = \delta \cdot (b_n - b_{n_0})$ pro nějaké $\delta \in U(A, \varepsilon)$. Tedy

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n_0}}{b_n} + \delta \cdot \frac{b_n - b_{n_0}}{b_n} \in U(A, 2\varepsilon)$$

pro každé dosti velké n podle úlohy 2.2.18, protože $\lim \frac{a_{n_0}}{b_n} = 0$ a $\lim \frac{b_n - b_{n_0}}{b_n} = 1$. Tedy $\lim a_n/b_n = A$. (Pro zjednodušení značení jsme pominuli závislost δ_j a δ na n.) □

Důsledek 2.2.21. *Když* $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$, *pak i*

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A \quad a \quad \lim \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n}{n(n-1)/2} = A \, .$$

Důkaz. Pro $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ a $t_n = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$ máme $\lim \frac{s_{n+1}-s_n}{t_{n+1}-t_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{1} = A$, a tak $\lim \frac{s_n}{t_n} = A$ plyne podle předchozí věty. To dává i druhou limitu, vezmeme posloupnosti $(\sum_{i=1}^{n} s_i)$ a $(\sum_{i=1}^{n} t_i)$. □

Spoluautorem věty, jehož jméno žije v názvu jedné metody sčítání nekonečných řad, je italský matematik *Ernesto Cesàro (1859–1906)* (narodil se v Neapoli, působil na univerzitách v Palermu a Neapoli, zabýval se diferenciální geometrií a matematickou fyzikou, při snaze pomoci svému synovi se utopil v moři v Neapolském zálivu poblíže Torre Annunziata).

Úloha 2.2.22. *Ukažte, že Stolzovu–Cesàrovu větu nelze obrátit, konkrétně nalezněte posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{R}$, *že posloupnost* $((a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n)$ *konverguje, ale* $\lim a_n$ *neexistuje. Nicméně viz oddíl 2.5.*

2.3 Reálná mocnina

Mocnina a^b *s reálným základem i exponentem. Logaritmus. Pro iracionální* $a, b \in \mathbb{R}$ *může* a^b *vyjít racionální. Rychlý výpočet mocniny s velkým exponentem.*

Vyjdeme z přirozené mocniny a^n s $n \in \mathbb{N}$ a pomocí limity posloupnosti ji rozšíříme na obecný reálný exponent. Pak odvodíme základní vlastnosti získané mocninné funkce a^b s $a, b \in \mathbb{R}$. Definice a^b je trochu delší a zamotaná (vzhledem k problémům jako: zřejmě $(-1)^3 = -1$, ale co $(-1)^{6/2} = ((-1)^{1/2})^6$?). Též je třeba ověřit její korektnost.

Definice 2.3.1 (reálná mocnina). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Mocninu a^b definujeme ve čtyřech krocích.*

1. *Pro každé $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{N}$ položíme*

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ činitelů}}$$

   a pro každé $a \in \mathbb{R}$ položíme $a^0 = 1$. Definovali jsme tak $0^0 = 1$.

2. *Pro každé $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ a záporné $b \in \mathbb{Z}$ položíme*

$$a^b = \frac{1}{a^{-b}}$$

   (to je ekvivalentní s $a^{-b} = 1/a^b$), kde $(\cdot)^{-b}$ počítáme podle kroku 1. Hodnota 0^b pro záporné $b \in \mathbb{Z}$ není definovaná.

3. *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ s $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Když $a, b \geq 0$ nebo když $a > 0$, $b < 0$ a $b \notin \mathbb{Z}$, pak definujeme*

$$a^b = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p \ ,$$

   kde $\sqrt[q]{\cdot}$ je funkce q-té odmocniny z tvrzení 1.7.35 a $(\cdot)^p$ počítáme podle kroků 1 a 2. Pro záporné $b \in \mathbb{Z}$ je a^b definovaná pro každé nenulové $a \in \mathbb{R}$ podle kroku 2. Jinak a^b není definovaná.

4. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Když $a, b \geq 0$ a $(a, b) \neq (0, 0)$ nebo když $a > 0$, $b < 0$ a $b \notin \mathbb{Z}$, pak definujeme*

$$a^b = \lim_{n \to \infty} a^{b_n} \ ,$$

   kde $(b_n) \subset \mathbb{Q}$ je libovolná posloupnost zlomků s $\lim b_n = b$ (viz tvrzení 2.1.10) a $(\cdot)^{b_n}$ počítáme podle kroku 3. Máme $0^0 = 1$ podle kroku 1. Pro záporné $b \in \mathbb{Z}$ je a^b definovaná pro každé nenulové $a \in \mathbb{R}$ podle kroku 2. Jinak a^b není definovaná.

Mocnina a^b s $a, b \in \mathbb{R}$ tak není definovaná, právě když

$$(a = 0 \,\&\, b < 0) \vee (a < 0 \,\&\, b \notin \mathbb{Z}) \ .$$

Úloha 2.3.2. *Dokažte, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je $a^1 = a$, $a^0 = 1$ a pro $a \neq 0$ je $a^{-1} = 1/a$. Proč v kroku 4 zakazujeme dvojici $a = b = 0$ a v kroku 3 ne?*

Funkci mocniny tak budujeme postupně: od přirozeného exponentu, kdy mocnění je opakovaným násobením, přes celistvý exponent, kdy se v rámci tělesových operací využije dělení, dále přes zlomkový exponent, kdy odmocnina zapojí úplnost $\mathbb{R}$, až po obecný reálný exponent, kdy se vedle úplnosti $\mathbb{R}$ využije i hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$. Korektnost definice — kroky 1 a 2 se pro $b = \frac{p}{1} \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ překrývají s krokem 3, každé $b \in \mathbb{Q}$ má nekonečně mnoho vyjádření zlomky $\frac{p}{q}$, krok 3 se pro $b \in \mathbb{Q}$ překrývá s krokem 4 a limita $\lim a^{b_n}$ by nemusela existovat a hypoteticky by mohla záviset na volbě posloupnosti zlomků limitících k b — dokážeme(-te) v úlohách a v tvrzení 2.3.11. Ekvivalentní definice reálné mocniny exponenciálou se nachází v tvrzení 3.3.16 v oddílu 3.3.

Úloha 2.3.3. *(i) Ukažte, že pro $b = \frac{p}{1} \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a reálné $a \geq 0$ vyjde a^b spočítaná podle kroků 1 či 2 a podle kroku 3 stejně. (ii) Ukažte, že pro $p/q = r/s \in \mathbb{Q}$ s $q, s \in \mathbb{N}$ a reálné $a \geq 0$ v kroku 3 máme*

$$a^{p/q} = a^{r/s}$$

nebo jsou obě strany nedefinované. (iii) Ověřte, že modifikováním kroku 3 na $a^{p/q} := \sqrt[q]{a^p}$ pro reálné $a \geq 0$ se nic nezmění, takže $\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$ nebo jsou obě strany nedefinované. (iv) Konečně ověřte, že pro $b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ vyjde a^b spočítaná podle kroku 3 stejně jako spočítaná v kroku 4 pomocí posloupnosti $(b_n) = (b, b, \dots)$.

Zbývá ukázat, že hodnota a^b v kroku 4 existuje a nezávisí na volbě posloupnosti (b_n). Pro to ale potřebujeme vlastnosti mocninné funkce pro racionální exponent, které odvodíme nejdříve.

Tvrzení 2.3.4 (racionální mocninné identity). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Pak, jsou-li obě strany identity definované,*

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^\alpha &= a^\alpha \cdot b^\alpha \,, \\ a^{\alpha+\beta} &= a^\alpha \cdot a^\beta \,, \\ (a^\alpha)^\beta &= a^{\alpha \cdot \beta} \quad \text{pro } a \geq 0 \,. \end{aligned}$$

Druhá identita implikuje, že $a^{-\alpha} = 1/a^\alpha$ pro každé $a \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{Q}$, jsou-li obě strany definované. Pro $a < 0$ třetí identita obecně neplatí, například

$$1 = 1^{\frac{3}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{3}{2}} \neq (-1)^{2 \cdot \frac{3}{2}} = (-1)^{\frac{3}{1}} = (-1)^3 = -1 \,.$$

Úloha 2.3.5. *Může být jedna strana mocninné identity definovaná a druhá ne?*

Důkaz. 1. Dokazujeme, že $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$, jsou-li obě strany definované. Pro $\alpha = 0$ to platí podle kroku 1 definice 2.3.1, $1 = 1 \cdot 1$. První případ je, že některý základ a nebo b je záporný, třeba $a < 0$. Pak $\alpha \in \mathbb{Z}$. Pro $\alpha > 0$ identita plyne z asociativity a komutativity násobení v $\mathbb{R}$. Případ $\alpha = 0$ už je probraný a pro

$\alpha < 0$ nutně $b \neq 0$ a identita plyne z případu $\alpha \in \mathbb{N}$ podle kroku 2 definice 2.3.1 přechodem k převráceným hodnotám:

$$(ab)^\alpha = \frac{1}{(ab)^{-\alpha}} = \frac{1}{a^{-\alpha}b^{-\alpha}} = \frac{1}{a^{-\alpha}}\frac{1}{b^{-\alpha}} = a^\alpha b^\alpha \ .$$

Druhý případ je, že $a = 0$ nebo $b = 0$. Když $\alpha > 0$, je levá strana identity 0 a pravá, je-li definovaná, také (podle kroku 3 je $0^{p/q} = 0$ pro každý zlomek $\frac{p}{q} > 0$). Případ $\alpha = 0$ už je probraný a pro $\alpha < 0$ není ani jedna strana identity definovaná. Zbývající třetí případ je, že $a, b > 0$. Pak jsou obě strany identity vždy definované a pro $\alpha \in \mathbb{Z}$ je její platnost jasná (pro $\alpha > 0$ asociativitou a komutatitou násobení v $\mathbb{R}$, $\alpha = 0$ jsme už probrali a pro $\alpha < 0$ přechodem k reciprokým hodnotám jako výše). Nechť tedy $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$. Podle úlohy 1.7.37 máme $\sqrt[q]{ab} = \sqrt[q]{a}\sqrt[q]{b}$. Tedy

$$(ab)^\alpha = (\sqrt[q]{ab})^p = (\sqrt[q]{a}\sqrt[q]{b})^p = (\sqrt[q]{a})^p(\sqrt[q]{b})^p = a^\alpha b^\alpha \ ,$$

kde třetí rovnost platí díky již dokázanému případu $\alpha \in \mathbb{Z}$, a proto $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$ (všechny výrazy v řetězu rovností jsou definované a můžeme použít tranzitivitu, viz výklad na konci oddílu 2.1).

2. Dokazujeme, že $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$, jsou-li obě strany definované. Nechť $a < 0$. Pak $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathbb{Z}$ a identita plyne asociativitou násobení v $\mathbb{R}$ a případným přechodem k převrácené hodnotě pro záporný exponent. Například pro $\alpha < 0$ a $\alpha + \beta \geq 0$ máme

$$a^{\alpha+\beta}/a^\alpha = a^{\alpha+\beta}a^{-\alpha} = a^{(\alpha+\beta)+(-\alpha)} = a^\beta$$

a stačí převést a^α napravo. Ostatní případy jsou podobné. Nechť $a = 0$. Pro $\alpha + \beta = 0$ je vlevo 1 a pravá strana je taky 1 pro $\alpha = \beta = 0$ a jinak není definovaná. Pro $\alpha + \beta \neq 0$ má každá strana identity, je-li definovaná, hodnotu 0. Nechť tedy $a > 0$. Případ $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ se vyřídí jako pro $a < 0$. Nechť konečně $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Převedením na společný jmenovatel můžeme podle (ii) úlohy 2.3.3 předpokládat, že $\alpha = \frac{p}{q}, \beta = \frac{r}{q}$. Potom, díky definici a^b v kroku 3 a již dokázanému případu celistvých exponentů,

$$a^{\alpha+\beta} = a^{(p+r)/q} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^{p+r} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p \left(\sqrt[q]{a}\right)^r = a^\alpha a^\beta \ ,$$

a tak $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$ (všechny výrazy v řetězu rovností jsou definované a můžeme použít tranzitivitu, viz výklad na konci oddílu 2.1).

3. Dokazujeme, že $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$, když $a \geq 0$ a obě strany jsou definované. Nechť $a = 0$. Pak $\alpha \geq 0$ (aby byla levá strana definovaná). Když $\alpha = 0$, jsou obě strany rovné 1. Když $\alpha > 0$, pak $\beta \geq 0$ a obě strany jsou 1 pro $\beta = 0$ a 0 pro $\beta > 0$. Nechť $a > 0$, obě strany identity jsou pak vždy definované. Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ identita plyne z asociativity násobení v $\mathbb{R}$ a přechodem k převráceným hodnotám pro záporné exponenty. Například pro $\alpha, \beta < 0$ máme (všechny výrazy jsou definované)

$$(a^\alpha)^\beta = \frac{1}{(1/a^{-\alpha})^{-\beta}} = \frac{1}{((1/a)^{-\alpha})^{-\beta}} = \frac{1}{(1/a)^{\alpha\beta}} = \frac{1}{1/a^{\alpha\beta}} = a^{\alpha\beta}$$

a $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$. Ostatní případy jsou podobné. Nechť tedy $\alpha = \frac{p}{q}, \beta = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ (a $a > 0$). Pak jsou všechny následující výrazy definované (a můžeme tedy použít tranzitivitu):

$$(a^\alpha)^\beta = \left(\sqrt[s]{(\sqrt[q]{a})^p}\right)^r = \sqrt[s]{\sqrt[q]{(a^p)^r}} = \sqrt[qs]{a^{pr}} = \left(\sqrt[qs]{a}\right)^{pr} = a^{pr/qs} = a^{\alpha\beta}$$

a $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$. První rovnost je definiční, druhá plyne opakovaným užitím (iii) úlohy 2.3.3, třetí plyne z již probraného případu celistvých exponentů a z úlohy 1.7.38, čtvrtá opět z (iii) úlohy 2.3.3 a pátá je definiční. □

Úloha 2.3.6. *Dokažte, že třetí identita platí i pro $a < 0$, jsou-li obě strany definované, pokud $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.*

Budeme také potřebovat výsledky o monotonii mocninné funkce v racionálních exponentech. Částečně je opět přesuneme do úlohy.

Tvrzení 2.3.7 (monotonie a^b s $b \in \mathbb{Q}$). *Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ máme pravidla monotonie*

$$\begin{aligned} \alpha > 0,\ 0 < a < b \quad &\Rightarrow \quad 0 < a^\alpha < b^\alpha \quad a \\ a > 1,\ \alpha < \beta \quad &\Rightarrow \quad 0 < a^\alpha < a^\beta\ . \end{aligned}$$

Důkaz. První pravidlo je díky první a druhé hořejší identitě ekvivalentní s nerovností $c^\alpha > 1$ pro $c = b/a > 1$ a $\alpha > 0$, jež hned plyne ze speciálních případů $\alpha = p \in \mathbb{N}$ a $\alpha = 1/q$. Druhé pravidlo je díky druhé hořejší identitě ekvivalentní se stejnou nerovností $a^\gamma > 1$ pro $\mathbb{Q} \ni \gamma = \beta - \alpha > 0$ a $a > 1$. □

Úloha 2.3.8. *Dokažte tu nerovnost v oněch speciálních případech. Rozšiřte první pravidlo monotonie na případy $\alpha = 0$ a $\alpha < 0$ a druhé na $a = 1$, $0 < a < 1$ a $a = 0$.*

Dále se nám bude hodit vědět, že exponent jdoucí k nule posílá racionální mocninu k jedné. Plyne to z následujícího odhadu.

Tvrzení 2.3.9 (použití Bernoulliovy nerovnosti). *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $a \in \mathbb{R}$, $a \ge 1$. Pak*

$$0 \le a^{1/k} - 1 \le \frac{a}{k}\ .$$

Důkaz. Podle Bernoulliovy nerovnosti (tvrzení 1.5.1) a hořejších identit máme

$$a = (a^{1/k})^k = \left(1 + (a^{1/k} - 1)\right)^k \ge 1 + k(a^{1/k} - 1) \ge k(a^{1/k} - 1)\ (\ge 0)\ .$$

Odtud jednoduchou úpravou plyne odhad. □

Důsledek 2.3.10 ($a^{\to 0} \to 1$)**.** *Nechť $a > 0$ je reálné číslo a $(b_n) \subset \mathbb{Q}$ jde k 0. Pak*

$$\lim a^{b_n} = 1 \ .$$

Důkaz. Patrně $a^{b_n} \to 1 \iff 1/a^{b_n} = (1/a)^{b_n} \to 1$, tedy můžeme vzít $a \geq 1$. Když $-\frac{1}{k} < b_n < \frac{1}{k}$, pak podle nerovnosti v tvrzení 2.3.9 nebo jejího převrácení pro $b_n < 0$ máme

$$|a^{b_n} - 1| \leq \max(a/k, 1 - 1/(1 + a/k)) \to 0,\ k \to \infty \ ,$$

a limita je dokázaná. □

Teď už konečně dokážeme, že krok 4 definice 2.3.1 je korektní a nestane se, že by limita a^{b_n} neexistovala nebo pro různé posloupnosti $(b_n) \subset \mathbb{Q}$, $b_n \to b$, vycházela různě.

Tvrzení 2.3.11 (korektnost kroku 4). *Nechť $a > 0$ je reálné číslo a $(b_n) \subset \mathbb{Q}$ má limitu $b \in \mathbb{R}$. Pak existuje vlastní limita*

$$\lim a^{b_n} \ (=: a^b)$$

a závisí jen na b.

Důkaz. Posloupnost (a^{b_n}) je omezená (tvrzení 2.3.7) a pro indexy $m > n$ je $\lim_{n\to\infty} a^{b_m - b_n} = 1$ (cauchyovskost (b_n) a předchozí důsledek). Podle druhé identity tvrzení 2.3.4 tak pro $m > n$ díky násobení limitní nulou (tvrzení 2.1.22) máme

$$\lim_{n\to\infty} (a^{b_m} - a^{b_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{b_n}(a^{b_m - b_n} - 1) = 0 \ .$$

Tedy je (a^{b_n}) cauchyovská a podle věty 2.2.12 má vlastní limitu. Má-li $(c_n) \subset \mathbb{Q}$ také limitu b, opět $a^{c_n} - a^{b_n} = a^{b_n}(a^{c_n - b_n} - 1) \to 0$ týmž argumentem a $\lim a^{c_n} = \lim a^{b_n}$. □

Shrneme vlastnosti funkce zavedené definicí 2.3.1.

Věta 2.3.12 (vlastnosti reálné mocniny). *Funkce $f(a, b) = a^b$ s reálnými argumenty a hodnotou má následující vlastnosti.*

1. *Je definovaná, právě když*

   $$(a,\, b) \in ((0,\, +\infty) \times \mathbb{R}) \cup (\{0\} \times [0,\, +\infty)) \cup ((-\infty,\, 0) \times \mathbb{Z}) \ .$$

2. *Pro každé $a \in \mathbb{R}$ je $a^0 = 1$ (včetně $0^0 = 1$), pro každé $a \in (0, +\infty)$ je $0^a = 0$, pro každé $b \in \mathbb{R}$ je $1^b = 1$ a pro každé $b \in \mathbb{R}$ je $b^1 = b$.*

3. *Pro pevné $a \in (0, 1)$ (resp. $a > 1$) je a^b klesající (resp. rostoucí) v $b \in \mathbb{R}$. Pro pevné $b < 0$ (resp. $b > 0$) je a^b klesající v $a \in (0, +\infty)$ (resp. rostoucí v $a \in [0, +\infty)$).*

4. Jsou-li obě strany definované, pak pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ máme identity

$$\begin{aligned} (ab)^c &= a^c b^c \ , \\ a^{b+c} &= a^b a^c \ , \\ (a^b)^c &= a^{bc} \quad \textit{pro } a \ge 0 \ . \end{aligned}$$

5. Pokud $a > 0$, $a_n \to a$ a $b_n \to b$, pak $\lim f(a_n, b_n) = \lim a_n^{b_n} = a^b$.

Důkaz. Vlastnosti 1 a 2 plynou z definice 2.3.1. Monotonie 3 plyne z monotonie pro zlomkové exponenty v tvrzení 2.3.7 a v úloze 2.3.8 a z limitní definice a^b v kroku 4 definice 2.3.1, viz úloha 2.3.13. Dokážeme identity ve vlastnosti 4.

a) Máme $a, b, c \in \mathbb{R}$ a dokazujeme, že $(ab)^c = a^c b^c$, jsou-li obě strany definované. Můžeme předpokládat, že $a, b > 0$, ostatní případy jsme již vpodstatě probrali v úvodu důkazu části 1 tvrzení 2.3.4. Nechť $c_n \to c$ pro nějaké zlomky (c_n). Pak $(ab)^{c_n} = a^{c_n} b^{c_n}$ podle tvrzení 2.3.4 a $a^{c_n} \to a^c, b^{c_n} \to b^c$ podle definice a tvrzení 2.3.11. Tedy $(ab)^{c_n} \to a^c b^c$ podle tvrzení 2.1.20. Na druhou stranu $(ab)^{c_n} \to (ab)^c$ podle definice a tvrzení 2.3.11, takže $(ab)^c = a^c b^c$.

b) Máme $a, b, c \in \mathbb{R}$ a dokazujeme, že $a^{b+c} = a^b a^c$, jsou-li obě strany definované. Nechť $a > 0$, případ $a \le 0$ jsme již vpodstatě probrali v úvodu důkazu části 2 tvrzení 2.3.4. Nechť $b_n \to b, c_n \to c$ pro nějaké $(b_n), (c_n) \subset \mathbb{Q}$. Pak $a^{b_n + c_n} = a^{b_n} a^{c_n}$ podle tvrzení 2.3.4 a $a^{b_n} \to a^b, a^{c_n} \to a^c$ podle definice a tvrzení 2.3.11. Tedy $a^{b_n + c_n} \to a^b a^c$ podle tvrzení 2.1.20. Na druhou stranu $b_n + c_n \to b + c$ podle tvrzení 2.1.20 a tak $a^{b_n + c_n} \to a^{b+c}$ podle definice a tvrzení 2.3.11. Tedy $a^{b+c} = a^b a^c$.

c) Máme $a, b, c \in \mathbb{R}$ s $a \ge 0$ a dokazujeme, že $(a^b)^c = a^{bc}$, jsou-li obě strany definované. Nechť $a > 0$, případ $a = 0$ jsme již vpodstatě probrali v úvodu důkazu části 3 tvrzení 2.3.4. Nechť $b_n \to b, c_n \to c$ pro nějaké $(b_n), (c_n) \subset \mathbb{Q}$. Pak $(a^{b_n})^{c_n} = a^{b_n c_n}$ podle tvrzení 2.3.4, $b_n c_n \to bc$ podle tvrzení 2.1.20 a $(a^{b_n})^{c_n} \to a^{bc}$ podle definice a tvrzení 2.3.11. Na druhou stranu $(a^{b_n})^{c_n} = (a^b a^{b_n - b})^{c_n}$ podle druhé identity dokázané v předchozím odstavci, takže $(a^{b_n})^{c_n} = (a^b)^{c_n} \cdot a^{(b_n - b)c_n}$ podle tvrzení 2.3.4. První činitel jde k $(a^b)^c$ podle definice a tvrzení 2.3.11 a druhý jde k 1 díky tvrzení 2.1.20 a důsledku 2.3.10. Tedy i $(a^{b_n})^{c_n} \to (a^b)^c$ (podle tvrzení 2.1.20) a $(a^b)^c = a^{bc}$.

5. Pro velké n s $a_n > 0$ máme díky mocninným identitám

$$\left|a^b - a_n^{b_n}\right| = a_n^{b_n} \left|(a/a_n)^{b - b_n} - 1\right| \ .$$

Pro $n \to \infty$ tak podle monotonie mocniny, důsledku 2.3.10 a omezenosti $(a_n^{b_n})$ máme

$$\left|a^b - a_n^{b_n}\right| < a_n^{b_n} \max(\left|0.9^{b - b_n} - 1\right|, \left|1.1^{b - b_n} - 1\right|) \to 0 \ .$$

□

Úloha 2.3.13. *Dokažte podrobně vlastnost 3 monotonie.*

Úloha 2.3.14. *Rozšiřte část 5 na případ $a = 0$ a $b > 0$ (kde $a_n > 0$ pro $n > n_0$).*

A čemu se rovná $(a+b)^c$? I zde lze leccos říci. Jak algebraici dobře vědí, v jedné důležité situaci platí identita $(a+b)^c = a^c + b^c$.

Úloha 2.3.15 (charakteristika p). *Nechť R je libovolný okruh, v němž pro nějaké číslo $p \in \mathbb{N}$, nutně prvočíslo, platí rovnost*

$$\underbrace{1_R + 1_R + \cdots + 1_R}_{p\ \text{sčítanců}} = 0_R$$

a kratší (neprázdné) součty jsou $\neq 0_R$. Říkáme, že R má charakteristiku p. *Charakteristiku p má třeba každé konečné těleso $R = F$ s p^k prvky (úloha 1.6.13) nebo okruh polynomů $R = F[x]$ s koeficienty v něm. Dokažte, že pro každé $a, b \in R$ a $r \in \mathbb{N}_0$ platí, že*

$$(a+b)^{p^r} = a^{p^r} + b^{p^r}\ .$$

Když se vrátíme do $\mathbb{R}$, pak pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ a $c = n \in \mathbb{N}_0$ podle konečné binomické věty (úloha 1.8.5) máme

$$(a+b)^c = (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\ .$$

A pro obecný exponent c? Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$ s $a + b > 0$. Když $a = b$, pak $(a+b)^c = 2^c b^c$. Když, řekněme, $a > b$ (tedy $a > 0$), pak podle nekonečné binomické věty (věta 3.6.22) máme

$$\begin{aligned}(a+b)^c &= a^c(1+b/a)^c = a^c \sum_{k=0}^{\infty} \binom{c}{k} (b/a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{c}{k} b^k a^{c-k} \\ &= a^c + \frac{c}{1!} b a^{c-1} + \frac{c(c-1)}{2!} b^2 a^{c-2} + \dots\ .\end{aligned}$$

Věta 2.3.16 (řešení rovnice $(x+y)^z = x^z + y^z$). *Rovnice*

$$(x+y)^z = x^z + y^z$$

má tato a jen tato řešení $x, y, z \in \mathbb{R}$:

Důkaz.

□

Nyní zavedeme inverzní funkci k mocnině.

Věta 2.3.17 (logaritmus). *Nechť $a > 1$ je dané reálné číslo. Pak pro každé reálné $b > 0$ má rovnice*

$$a^c = b$$

právě jedno řešení $c \in \mathbb{R}$. Označíme ho

$$c = \log_a b$$

a nazveme logaritmem čísla b při základu a. Máme funkci $\log_a \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Důkaz. Díky tvrzení 1.7.40 stačí ukázat spojitost a^b pro $a > 1$ jako funkce b, jednoznačnost řešení c plyne z monotonie této funkce. Spojitost plyne z prvního odhadu tvrzení 2.3.9 a z mocninných identit: pro $b > b' > 0$ a malé $b - b'$ je i rozdíl $a^b - a^{b'} = a^{b'}(a^{b-b'} - 1)$ malý. $\Box$

Ze střední školy asi znáte *přirozený logaritmus*, jehož základem je podivuhodné číslo $e = 2.71828\ldots$. Značí se prostě $\log x$ a zavedeme ho později v definici 3.3.7.

Úloha 2.3.18 (základ menší jedné). *Rozšiřte předchozí větu na $a \in (0, 1)$.*

Úloha 2.3.19. *Pro reálná čísla $a, b > 1$, jaký je vztah mezi $\log_a b$ a $\log_b a$?*

Věta 2.3.20 (iracionalita logaritmu). *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ s $m, n \geq 2$ jsou dvě čísla s různými prvočiniteli, takže jedno je dělitelné nějakým prvočíslem, které druhé nedělí. Pak logaritmus*

$$\log_m n$$

je iracionální kladné číslo.

Důkaz. Připomeňme si základní vlastnost prvočísel: když $a, b \in \mathbb{Z}$ a prvočíslo p dělí ab, potom p dělí a nebo p dělí b (to plyne z úlohy 1.8.2, ale je to elementárnější věc). Kdyby $\log_m n = r/s > 0$ ($r, s \in \mathbb{N}$) byl zlomek, platilo by $m^{r/s} = n$ a $m^r = n^s$, takže každé prvočíslo dělící m by dělilo i n a naopak, ve sporu s předpokladem. Proto $\log_m n$ zlomek není. $\Box$

Úloha 2.3.21. *Popište pomocí prvočíselných rozkladů všechny dvojice čísel $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$, s iracionálním logaritmem $\log_m n$.*

Triviálně je součet i součin dvou racionálních čísel racionální a součet i součin racionálního a iracionálního čísla iracionální, samozřejmě až na násobení nulou. Součet i součin dvou iracionálních čísel může být racionální i iracionální — příklady si rozmyslete, nebudeme z toho dělat úlohu. A jak je tomu s mocninou? Pro racionální $a, b > 0$ může být a^b racionální i iracionální: $2^2 \in \mathbb{Q}$ a $2^{1/2} \notin \mathbb{Q}$. Stejně tak ve zbylých třech případech.

Věta 2.3.22 (iracionalita mocniny). *Hodnota mocniny a^b pro reálná $a, b > 0$ v každém z případů (i) $a \in \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}$, (ii) $a \notin \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$ a (iii) $a, b \notin \mathbb{Q}$ může být racionální i iracionální.*

Důkaz. (i) Máme $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$ podle věty 2.3.20, ale $2^{\log_2 3} = 3 \in \mathbb{Q}$. Funkce $b \mapsto 2^b$ z $[0, +\infty)$ do $[1, +\infty)$ je rostoucí a tedy prostá a na iracionálních b tak nabývá nespočetně mnoha hodnot, protože kladných iracionálních čísel je nespočetně mnoho. Protože $\mathbb{Q}$ je spočetná, skoro všechny tyto hodnoty jsou iracionální a tedy existuje $b \notin \mathbb{Q}$, že i $2^b \notin \mathbb{Q}$.

(ii) Víme, že $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ale $(\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}$. Ovšem $(\sqrt{2})^1 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(iii) Víme, že $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, a také $\log_{\sqrt{2}} 3 \notin \mathbb{Q}$ podle věty 2.3.20 (neboť $\log_{\sqrt{2}} 3 = 2\log_2 3$ podle identity $(a^b)^c = a^{bc}$), ale

$$(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 3 \in \mathbb{Q}\ .$$

Konečně že $\mathrm{irac.}^{\mathrm{irac.}}$ je někdy (vlastně skoro vždy) iracionální plyne stejným nespočetnostním argumentem jako v (i), místo 2 stačí vzít $\sqrt{2}$. □

Úloha 2.3.23. *Vypočtěte*

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$$

a dedukujte, že $\mathit{irac.}^{\mathit{irac.}}$ *je někdy racionální.*

Teď uvedeme jedno důležité použití mocninných identit a logaritmu v informatice.

Věta 2.3.24 (binární mocnění). *Nechť* $a \in \mathbb{R}$ *a* $n \in \mathbb{N}$*. Mocninu*

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \ (n \text{ činitelů})$$

lze vypočítat nejvýše $2\log_2 n$ *násobeními dvou reálných čísel.*

Důkaz. Exponent n napíšeme ve dvojkovém zápisu:

$$n = 2^k + b_{k-1}2^{k-1} + \cdots + b_1 2^1 + b_0,\ \ b_i \in \{0,1\}\ ,$$

kde $k \in \mathbb{N}_0$ splňuje $k \le \log_2 n < k+1$. Podle mocninných identit máme

$$\begin{aligned} a^n &= a^{2^k} a^{b_{k-1}2^{k-1}} \ldots a^{b_1 2^1} a^{b_0} \\ &= a^{2^k} \left(a^{2^{k-1}}\right)^{b_{k-1}} \ldots \left(a^2\right)^{b_1} a^{b_0} \end{aligned}$$

a, pro $j \in \mathbb{N}_0$,

$$a^{2^j} = (\ldots(a^2)^2 \ldots)^2 \ (j \text{ umocnění na druhou})\ .$$

Mocniny $a, a^2 = a \cdot a, a^4 = a^2 \cdot a^2, \ldots, a^{2^k} = a^{2^{k-1}} \cdot a^{2^{k-1}}$ tedy spočteme k násobeními dvou (v tomto případě stejných) čísel a číslo a^n spočteme zřejmým způsobem pomocí dalších $b_0 + b_1 + \cdots + b_{k-1} \le k$ násobení dvou čísel. Potřebujeme tak nejvýše $2k \le 2\log_2 n$ násobení dvou čísel. □

Úloha 2.3.25.

$$7^{1000} \ \mathit{modulo}\ 11 = ?$$

Spočtěte binárním mocněním. Dá se to rychle spočítat i jinak?

Podíváme se na mocninu $0^0 = 1$, alespoň tak jsme ji definovali.

Tvrzení 2.3.26 (zrádná 0^0). *Pro každé reálné číslo $\alpha \geq 0$ i $\alpha = +\infty$ existují takové posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, že*

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \ \text{ a } \ \lim a_n^{b_n} = \alpha\ .$$

Obě posloupnosti lze též zvolit tak, že $\lim a_n^{b_n}$ neexistuje.

Důkaz. Omezíme se na $\alpha \leq 1$, zbytek necháme jako následující úlohu. Nechť $\alpha \in [0, 1)$. Pak pro $a_n = \alpha^n$ a $b_n = 1/n$ je posloupnost $(a_n^{b_n}) = (\alpha)$ konstantní α a a_n i b_n jde k 0. Pro $\alpha = 1$ stačí vzít $a_n = b_n = 1/n$ (viz příklad před úlohou 2.1.6). Pokud $a_n = (1/2)^n$ pro sudé n, $a_n = (1/3)^n$ pro liché n a $b_n = 1/n$, pak a_n i b_n jde k 0, ale $\lim a_n^{b_n}$ neexistuje. □

Úloha 2.3.27. *Dokončete předchozí důkaz pro $\alpha > 1$.*

Výraz $(\to 0)^{\to 0}$ je tak vlastně neurčitý: pro $a_n \to 0$ a $b_n \to 0$ hodnota limity posloupnosti $(a_n^{b_n})$ zdaleka není určená.

2.4 Počítání s nekonečny, liminf a limsup

Aritmetika nekonečen a neurčitých výrazů. Limes superior a limes inferior.

Tvrzení 2.1.20 rozšíříme na nevlastní limity. Nejprve definujeme aritmetické operace s nekonečny, pro uspořádání jsme to již udělali.

Definice 2.4.1 (aritmetika nekonečen). *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$. Definujeme*

$$\begin{aligned}
a \neq -\infty:&\ \ a + (+\infty) = (+\infty) + a := +\infty\ ,\\
a \neq +\infty:&\ \ a + (-\infty) = (-\infty) + a := -\infty\ ,\\
a > 0:&\ \ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a := \pm\infty\ ,\\
a < 0:&\ \ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a := \mp\infty\ ,\\
a \neq \pm\infty:&\ \ \frac{a}{\pm\infty} := 0\ .
\end{aligned}$$

Zbylé výrazy

$$(+\infty) + (-\infty),\ (-\infty) + (+\infty),\ 0 \cdot (\pm\infty),\ (\pm\infty) \cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{a}{0}\ \ \text{pro}\ \ a \in \mathbb{R}^*$$

— součet dvou nekonečen s opačnými znaménky, součin nuly a nekonečna, podíl dvou nekonečen a každý podíl s nulou ve jmenovateli — ponecháváme nedefinované, jsou to neurčité výrazy.

Vysvětlíme termín *neurčitý výraz.* Výrazy $\sqrt{-1}$ a $\frac{0}{0}$ jsou v oboru $\mathbb{R}^*$ oba nedefinované, ale v jednom ohledu se liší. Prvnímu nelze konzistentně přiřadit žádnou hodnotu (z $\mathbb{R}^*$), ale druhému můžeme přiřadit hodnotu $\lim a_n/b_n$, kde $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, $b_n \neq 0$ pro každé n, jsou posloupnosti jdoucí k nule. Problém je ovšem v tom, že takových hodnot je více, v závislosti na obou posloupnostech, fakticky to může být cokoli (jak se k tomu níže vrátíme). Kdybyby vycházela jen jedna hodnota, pak bychom jí mohli výraz $\frac{0}{0}$ definovat. To nastává třeba pro výraz $2\cdot(+\infty)$, který není neurčitý a definovali jsme ho jako $+\infty$. Máme tak dva druhy nedefinovanosti: úplná nedefinovanost a neurčitý výraz. Pro aritmetické operace v $\mathbb{R}^*$ jsou všechny nedefinované výrazy neurčité, v případě mocnění jsou mocniny se záporným základem typicky (ne ale zcela vždy) úplně nedefinované.

Úloha 2.4.2. *Zjistěte, zda toto rozšíření sčítání a násobení na $\mathbb{R}^*$ je komutativní, asociativní a distributivní.*

Tvrzení 2.4.3 (aritmetika limit). *Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = b \in \mathbb{R}^*$. Potom*

1. $\lim (a_n + b_n) = a + b$, *je-li součet vpravo definován,*
2. $\lim (a_n b_n) = ab$, *je-li součin vpravo definován a*
3. *pokud $b \neq 0$, pak je (a_n/b_n) definovaná pro $n > n_0$ a $\lim (a_n/b_n) = a/b$, je-li podíl vpravo definován.*

Důkaz. Tvrzení 2.1.20 vyřídilo případ vlastních limit. Podíváme se na jeden případ nevlastních limit a ostatní necháme jako úlohu. Pro $\lim a_n = a > 0$ a $\lim b_n = -\infty$ spočteme $\lim a_n b_n$. Pro dané $c \in \mathbb{R}$, $c < 0$, vezmeme n_0, že pro $n > n_0$ je $a_n > a' > 0$ a $b_n < c/a' < 0$, kde $a' = \min(a/2, 1)$ (může být $a = +\infty$). Pak pro $n > n_0$ je $a_n b_n < a' b_n < a'(c/a') = c$ a $\lim a_n b_n = -\infty$. □

Úloha 2.4.4. *Dokažte zbylé případy předchozího tvzení.*

Tvrzení vlastně odůvodňuje aritmetiku nekonečen: pravidlo jako $a(-\infty) = +\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$ s $a < 0$ jen zaznamenává, že pro každé dvě posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ s $\lim a_n = a < 0$ a $\lim b_n = -\infty$ je $\lim a_n b_n = +\infty$.

Podobně rozšíříme funkci mocniny.

Definice 2.4.5 (mocnění nekonečen). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$. Pro $a, b \in \mathbb{R}$ hodnotu mocniny a^b definujeme či necháme nedefinovanou podle definice 2.3.1. Pro $a = -\infty$ hodnotu a^b nedefinujeme, stejně tak pro reálné $a \leq 0$ nebo $a = 1$ a $b = \pm\infty$. Nedefinujeme ani $(+\infty)^0$. Ve zbylých případech s nekonečnem v základu či exponentu klademe*

$$\begin{aligned} 0 < a < 1: \ a^{+\infty} = 0,\ a > 1: \ a^{+\infty} = +\infty\ , \\ 0 < a < 1: \ a^{-\infty} = +\infty,\ a > 1: \ a^{-\infty} = 0\ , \\ b > 0: \ (+\infty)^b = +\infty,\ b < 0: \ (+\infty)^b = 0\ . \end{aligned}$$

Výrazy

$$1^{\pm\infty} \ \text{ a } \ (+\infty)^0$$

— jedna umocněná na nekonečno a nultá mocnina plus nekonečna — jsou neurčité.

Tvrzení 2.4.6 (záměnnost nevlastní limity a mocniny). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a > 0$, a posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ mají limity $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Potom*

$$\lim a_n^{b_n} = a^b ,$$

je-li mocnina vpravo definovaná.

Důkaz. Část 5 věty 2.3.12 vyřídila případ $a, b \in \mathbb{R}$. Podíváme se na jeden případ nevlastních limit a ostatní necháme jako úlohu. Nechť $\lim a_n = +\infty$ a $\lim b_n = b \in \mathbb{R}^*$, $b < 0$, spočteme $\lim a_n^{b_n}$. Pro dané $\varepsilon \in (0, 1)$ vezmeme n_0, že pro $n > n_0$ je $a_n > \varepsilon^{1/b'} > 1$ a $b_n < b' < 0$, kde $b' = \max(b/2, -1)$ (můžeme mít i $b = -\infty$). Pak pro $n > n_0$ je $0 < a_n^{b_n} < (\varepsilon^{1/b'})^{b_n} < (\varepsilon^{1/b'})^{b'} = \varepsilon$, tudíž $\lim a_n^{b_n} = 0$. $\square$

Úloha 2.4.7. *Dokažte zbylé případy předchozího tvzení.*

Úloha 2.4.8. *Rozšiřte tvrzení 2.4.6 (a definici 2.4.5) na případ $a = 0$, $a_n > 0$ pro $n > n_0$, a $b = \pm\infty$.*

Tvrzení 2.3.26 a úloha 2.3.27 popisují chování neurčitého výrazu $(\to 0)^{\to 0}$. V následujících dvou tvrzeních shrneme popisy chování neurčitých aritmetických a mocninných výrazů. Důkazy většiny případů necháváme jako úlohy. Zkratky: OZ znamená „opačná znaménka“ a NN znamená „nebo neexistuje“.

Tvrzení 2.4.9 (neurčité aritmetické výrazy). *Pro neurčité aritmetické výrazy platí tato pravidla:*

$$\begin{aligned}
\textit{OZ: } \pm\infty + \mp\infty &= \textit{cokoli z } \mathbb{R}^* \textit{ NN}, \\
0(\pm\infty),\ (\pm\infty)0 &= \textit{cokoli z } \mathbb{R}^* \textit{ NN}, \\
0/0 &= \textit{cokoli z } \mathbb{R}^* \textit{ NN}, \\
a \in \mathbb{R}^* \backslash \{0\} :\ a/0 &= +\infty \textit{ nebo } -\infty \textit{ NN}, \\
+\infty / +\infty &= \textit{cokoli} \geq 0 \textit{ z } \mathbb{R}^* \textit{ NN}
\end{aligned}$$

a obdobně obecněji pro $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ se zřejmou volbou nerovnosti ≥ 0 nebo ≤ 0.

Důkaz. Ukážeme jen, že $\frac{-\infty}{+\infty}$ je cokoli ≤ 0 z $\mathbb{R}^*$ nebo neexistuje. Pro $a \in (-\infty, 0)$, $a_n = an$ a $b_n = n$ máme $a_n \to -\infty$, $b_n \to +\infty$ a $a_n/b_n = a$ pro každé n. Pro $a_n = -n$ a $b_n = n^2$ máme $a_n \to -\infty$, $b_n \to +\infty$ a $a_n/b_n \to 0$. Pro $a_n = -n^2$ a $b_n = n$ máme $a_n \to -\infty$, $b_n \to +\infty$ a $a_n/b_n \to -\infty$. Pro $a_n = -n$ pro sudé n, $a_n = -2n$ pro liché n a $b_n = n$ máme $a_n \to -\infty$, $b_n \to +\infty$ a posloupnost (a_n/b_n) nemá limitu. Konečně když $a_n \to -\infty$ a $b_n \to +\infty$, pak pro velké n je $a_n < 0$ a $b_n > 0$, tedy $a_n/b_n < 0$ a (a_n/b_n) nemůže mít kladnou limitu. $\square$

Úloha 2.4.10. *Dokažte zbylé případy předchozího tvzení.*

Tvrzení 2.4.11 (neurčité mocninné výrazy). *Pro neurčité mocninné výrazy platí tato pravidla:*

$$\begin{aligned} 1^{+\infty},\ 1^{-\infty} &= \textit{cokoli} \geq 0 \textit{ z } \mathbb{R}^* \textit{ NN}\,, \\ (+\infty)^0 &= \textit{cokoli} \geq 0 \textit{ z } \mathbb{R}^* \textit{ NN}\,. \end{aligned}$$

Důkaz. Ukážeme jen, že $1^{-\infty}$ je cokoli ≥ 0 z $\mathbb{R}^*$ nebo neexistuje. Pro $a \in (0, +\infty)$, $a_n = a^{-1/n}$ a $b_n = -n$ máme $a_n \to 1$, $b_n \to -\infty$ a $a_n^{b_n} = a$ pro každé n. Pro $a_n = n^{1/n}$ a $b_n = -n$ máme $a_n \to 1$, $b_n \to -\infty$ a $a_n^{b_n} = 1/n \to 0$. Pro $a_n = n^{-1/n}$ a $b_n = -n$ máme $a_n \to 1$, $b_n \to -\infty$ a $a_n^{b_n} = n \to +\infty$. Pro $a_n = 1$ pro sudé n, $a_n = 2^{1/n}$ pro liché n a $b_n = -n$ máme $a_n \to 1$, $b_n \to -\infty$ a posloupnost $(a_n^{b_n})$ nemá limitu. Konečně když $a_n \to 1$ a $b_n \to -\infty$, pak pro velké n je $a_n > 0$, tedy $a_n^{b_n} > 0$ a $(a_n^{b_n})$ nemůže mít zápornou limitu. □

Úloha 2.4.12. *Dokažte zbylé případy předchozího tvzení.*

Liminf a limsup

Definice 2.4.13 (hromadné body). *Pro posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *jako* $\mathrm{Hr}(a_n) \subset \mathbb{R}^*$ *označíme množinu vlastních i nevlastních limit všech jejích podposloupností. Prvkům* $\mathrm{Hr}(a_n)$ *říkáme hromadné body posloupnosti* (a_n)*.*

Například pro $a_n = n + (-1)^n(n + 1/n)$ je $\mathrm{Hr}(a_n) = \{0, +\infty\}$.

Úloha 2.4.14. *Sestrojte posloupnost, pro niž* $\mathrm{Hr}(a_n) = \mathbb{R}^*$*, to jest každé reálné číslo,* $-\infty$ *i* $+\infty$ *je její hromadný bod. Lze vzít* $(a_n) \subset \mathbb{Q}$*?*

V následující větě pro shora neomezenou množinu $A \subset \mathbb{R}$ bereme $\sup(A) = +\infty$ a pro posloupnost $(+\infty, +\infty, \dots)$ jako její limitu bereme též $+\infty$. Podobně pro posloupnost $(-\infty, -\infty, \dots)$ a infimum $-\infty$.

Věta 2.4.15 (o hromadných bodech). *Pro každou posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *je* $\mathrm{Hr}(a_n) \neq \emptyset$*, má nejmenší i největší prvek a ty splňují rovnosti*

$$\begin{aligned} \min \mathrm{Hr}(a_n) &= \lim_{n\to\infty} \inf(\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) \\ \max \mathrm{Hr}(a_n) &= \lim_{n\to\infty} \sup(\{a_n, a_{n+1}, \dots\})\,. \end{aligned}$$

Důkaz. $\mathrm{Hr}(a_n) \neq \emptyset$ podle tvrzení 2.2.8. Dokážeme poslední rovnost, s maximem a supremy, ta před ní se dokazuje podobně. Označíme $b_n = \sup(\{a_n, a_{n+1}, \dots\})$. Když (a_n) není shora omezená, je $b_n = +\infty$ pro každé n, pravá strana je $+\infty$ a levá také, protože shora neomezená posloupnost má podposloupnost s limitou $+\infty$. Nechť je (a_n) shora omezená, pak $(b_n) \subset \mathbb{R}$ a je nerostoucí. Takže $\lim b_n = b$ existuje (tvrzení 2.1.13) a $b \in \mathbb{R}$ nebo $b = -\infty$. Když je (c_n) podposloupností (a_n) a má limitu c, je (podle tvrzení 2.1.25) $c \leq b_n$ pro každé n, protože b_n je, až na konečně mnoho členů, horní mezí (c_n). Tedy (opět podle tvrzení 2.1.25) $c \leq b$ pro každé $c \in \mathrm{Hr}(a_n)$. Patrně $b \in \mathrm{Hr}(a_n)$: existuje posloupnost $1 = k_1 <$

$k_2 < \ldots$ a podposloupnost (c_n) v (a_n), že $c_n \in (b_{k_n} - 1/n, b_{k_n}]$ pro každé n, tedy $\lim c_n = \lim b_{k_n} = b$. Proto $b = \max \mathrm{Hr}(a_n)$. □

Následující definice tedy dává smysl.

Definice 2.4.16 (liminf a limsup). *Pro* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *hodnotu* $\min \mathrm{Hr}(a_n) \in \mathbb{R}^*$ *označíme* $\liminf a_n$, *je to limes inferior* a_n, *nejmenší limita podposloupnosti v* (a_n). *Dále* $\max \mathrm{Hr}(a_n) \in \mathbb{R}^*$ *označíme jako* $\limsup a_n$, *je to limes superior* a_n, *největší limita podposloupnosti v* (a_n).

Úloha 2.4.17. *Dokažte následující důsledek.*

Důsledek 2.4.18 (liminf, limsup a lim). *Pro každou posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *je* $\liminf a_n \le \limsup a_n$. *Rovnost nastává, právě když má* (a_n) *limitu* $\lim a_n$, *jež je pak rovna společné hodnotě* $\lim a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$.

Shrneme různé možné definice limsupu a liminfu.

Tvrzení 2.4.19 (tři podoby $\limsup$ a $\liminf$). *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *je posloupnost,* $\mathrm{Hr}(a_n)$ *jsou její hromadné body,* $b_n = \sup(\{a_n, a_{n+1}, \ldots\})$ *a* $L(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} \mid a_n > \alpha$ *pro nekonečně mnoho* $n \in \mathbb{N}\}$. *Pak*

$$\limsup a_n = \max \mathrm{Hr}(a_n) = \lim b_n = \sup L(a_n)$$

(obě suprema bereme v $\mathbb{R}^*$ *a poslední limitu v trochu rozšířeném smyslu zmíněném výše) a podobné rovnosti platí i pro* $\liminf a_n$.

Důkaz. První rovnost je v našem případě definiční. Druhou jsme dokázali ve větě 2.4.15. Dokážeme třetí. Když $\alpha \in L(a_n)$, pak má (a_n) podposloupnost s limitou, možná nevlastní, alespoň α (podle rozšířené B.–W. věty), takže $\max \mathrm{Hr}(a_n)$ je horní mezí $L(a_n)$ a $\max \mathrm{Hr}(a_n) \ge \sup L(a_n)$. Na druhou stranu když $\alpha = \max \mathrm{Hr}(a_n)$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ nastává $a_n > \alpha - \varepsilon$ pro nekonečně mnoho n (řádně vyloženo pro $\alpha = +\infty$ a $\alpha = -\infty$), takže $\alpha - \varepsilon \in L(a_n)$ a $\sup L(a_n) \ge \alpha = \max \mathrm{Hr}(a_n)$. Tedy $\sup L(a_n) = \max \mathrm{Hr}(a_n)$. □

Rovnost $\limsup a_n = \sup L(a_n)$ si lze představit lehkoatleticky: $\limsup a_n$ je nejvyšší laťka (přesněji, supremum takových latěk), kterou posloupnost (a_n) nekonečněkrát přeskočí.

Úloha 2.4.20. *Funguje to i pro třeba* $a_n = -n$, *kdy* $L(a_n) = \emptyset$, *protože* (a_n) *nepřeskočí nekonečněkrát žádnou laťku?*

2.5 Zobecněné limity

Ideál, limita posloupnosti podle ideálu, příklady. Šalátova–Tomova věta

Věta 2.5.1 (Šalát a Toma, 2003). *V následujícím označují* $(a_n) \subset (0, +\infty)$ *posloupnost kladných čísel a* $I \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *ideál. Pak*

$$\Big(\forall\, (a_n):\ \sum a_n < +\infty \Rightarrow \lim_I n a_n = 0\Big) \iff I \supset I_c\,.$$

Slovně: ideály I*, pro něž sčítance* a_n *kladné konvergentní řady vynásobené* n *vždy* I*-konvergují k* 0*, jsou právě ideály obsahující ideál množin* $A \subset \mathbb{N}$ *s konvergentními reciprokými součty (*$\sum_{n \in A} 1/n < +\infty$*).*

Důkaz.

□

2.6 Poznámky a další úlohy

Kdo byl druhý největší logik 20. století. Wilkieho identita. Početní příklady na limity posloupností.

Oddíl 2.1. Tvrzení 2.1.25 lze v české literatuře najít, jak se zdá (nedokázal jsem pochopitelně prohlédnout úplně vše), výhradně ve slabší podobě se shodnými indexy členů obou posloupností ($m = n$, v obou částech). Psychologickým důvodem by mohla být předcházející aritmetika limit, kde shodné indexy mají oprávnění. Jak ale vidíme v *této* učebnici, důkaz zůstává pro dva obecně různé indexy m, n úplně stejný a kromě setrvačnosti myšlení není žádný důvod se okrást, odvodit z předpokladu mnohem slabší závěr než je možné. Jako když se skokan do dálky rozeběhne se vší energií a odrazí se půl metru před odrazovou deskou. V anglicky psané literatuře jsem se s obdobou tvrzení 2.1.25 příliš nesetkal (ale opět jsem toho prohlédl nemnoho), vyskytují se pouze verze tvrzení 2.1.28 (jako “squeeze theorem”). Na vztah mezi limitou a uspořádáním se v ní asi nahlíží, do značné míry oprávněně, jako na trivialitu nestojící za samostatné tvrzení či větu. Prapůvod českého tvrzení o limitě a uspořádání lze snad dohledat ve V. Jarníkovi [70, věty 59 a 60] (jen má hypotéza). Záležitost uzavírám s tím, že jsem sám po řadu let samozřejmě automaticky učil „když $\lim a_n < \lim b_n$, tak pro každé $n > n_0$ máte $a_n < b_n$“, než jsem byl jednoho srpnového dne roku 2017 osvícen. Kolik podobných nesmyslů asi člověk za život navykládá … (viz tvrzení 4.1.23, týž příběh).

Oddíl 2.2. Erdősova–Szekeresova věta. O B. Bolzanovi píše Kraus [86, Kapitola V. Šťastným být a jiné blažit].

Oddíl 2.3. Reálnou mocninu sestrojuje podobně Jarník [70, kapitola III].

Další úlohy

Úloha 2.6.1 (k tvrzení 2.1.25 a úloze 2.1.26). *V intervalu* $[0, 1]$ *zvolíme náhodně a nezávisle na sobě čtyři body* a_1, a_2, b_1, b_2 *(dvě dvoučlenné posloupnosti). Spočtěte pravděpodobnost jevu* A*, že* $a_1 < b_1$ & $a_2 < b_2$*, a jevu* B*, že* $a_1, a_2 < b_1, b_2$*.*

Následující čtyři úlohy ukazují typické aplikace aditivního i multiplikativního Feketeho lemmatu (věta 2.2.13) v kombinatorice.

Úloha 2.6.2 (velikosti množin bez AP délky 3). *Nechť* $r(n) = \max |A|$*, kde* $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ *a neobsahuje aritmetickou posloupnost délky* 3 *(trojici čísel* $a, a+d, a+2d$ *s* $d \neq 0$*). Dokažte, že existuje vlastní limita*

$$R = \lim_{n\to\infty} r(n)/n\ .$$

Změní se něco pro delší zakázané aritmetické posloupnosti? Dá se dokázat, že $R = 0$*, ale je to těžké.*

Úloha 2.6.3 (počet π-prostých permutací). *Nechť* $\pi\colon [k] \to [k]$*,* $k \in \mathbb{N}$*, je bijekce, takže* π *je permutace čísel* $1, 2, \dots, k$*, a* $f(n)$ *je počet permutací* ρ *čísel* $1, 2, \dots, n$*, které neobsahují permutaci* π*:* $f(n)$ *je počet těch bijekcí* $\rho\colon [n] \to [n]$*, pro něž neexistuje* k*-tice indexů* $1 \le m_1 < m_2 < \dots < m_k \le n$*, že* $\rho(m_i) < \rho(m_j) \iff \pi(i) < \pi(j)$ *pro každé* $i, j \in [k]$*. Dokažte, že existuje vlastní nebo nevlastní limita*

$$P = \lim_{n\to\infty} f(n)^{1/n}\ .$$

Tato limita je vlastní, ale dokázat to není snadné.

Úloha 2.6.4 (počet meandrů). *NC (non-crossing, nekřížící se) párování na* $2n$ *vrcholech je graf* $G = (V, E)$*, kde* $V \subset \mathbb{N}$*,* $|V| = 2n$*,* $|E| = n$*, hrany jsou disjunktní a pro žádné dvě hrany* $\{a, b\}, \{c, d\} \in E$ *nenastává* $a < c < b < d$ *(to je ta NC podmínka, uspořádání vrcholů je tedy důležité). Meandr na* $2n$ *vrcholech je taková dvojice* (G_1, G_2) *dvou NC párování* $G_i = ([2n], E_i)$ *na společné množině vrcholů* $[2n] = \{1, 2, \dots, 2n\}$*, že graf* $([2n], E_1 \cup E_2)$ *(v němž má každý vrchol stupeň* 2*) je souvislý, tvoří ho jediný cyklus. Názorněji ale nepřesněji řečeno, meandr na* $2n$ *vrcholech je vzor tvořený uzavřenou a sebe sama neprotínající křivkou* C *a přímkou* ℓ *v rovině, když* C *kříží (nedotýká se pouze)* ℓ *ve* $2n$ *pevných bodech. Definujeme*

$$a_n = \#\{\textit{meandry na } 2n \textit{ vrcholech}\}\ .$$

Například $a_1 = 1$*,* $a_2 = 2$ *a* $a_3 = 8$*. Dokažte, že existuje vlastní či nevlastní limita*

$$M = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n}\ .$$

Dokažte, že $M \le 16$*. Přesná hodnota limity* M *není známa.*

Úloha 2.6.5 (počet cest ve čtvercové mřížce). *Nechť $G = (\mathbb{Z}^2, E)$ je nekonečný graf, v němž $\{(a,b),(c,d)\} \in E \iff |a-b|+|c-d| = 1$, je to tedy graf sousednosti v nekonečné rovinné čtvercové mřížce. Každý vrchol má v G stupeň 4. Připomeňme si, že cesta v (obecném) grafu je taková prostá posloupnost vrcholů, že dva po sobě jdoucí vrcholy jsou vždy spojené hranou. Definujeme*

$$p_n = \#\{\text{cesty v } G \text{ s } n \text{ hranami, začínající ve vrcholu } (0,0)\}\ .$$

Dokažte, že existuje vlastní či nevlastní limita

$$C = \lim_{n\to\infty} p_n^{1/n}\ .$$

Dokažte, že $C \le 3$. Přesná hodnota limity C je i není známa. Je známa proto, že je známý algoritmus, který umí C aproximovat s libovolnou předem danou přesností. Není známa proto, že jde o velmi pomalý algoritmus.

Úloha 2.6.6. *Nechť $f(n)$ je extremální funkce zavedená v důsledku 2.2.16. Dokažte, že $f(n) = 3n-2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $\lim f(n)/n = 3$.*

Úloha 2.6.7 (Wilkieho identita). *Dokažte, že pro každá tři kladná reálná čísla x, y, z platí identita*

$$((1+x)^y + (1+x+x^2)^y)^z \cdot ((1+x^3)^z + (1+x^2+x^4)^z)^y =$$
$$((1+x)^z + (1+x+x^2)^z)^y \cdot ((1+x^3)^y + (1+x^2+x^4)^y)^z\ .$$

* * *

Úloha 2.6.8. *Nechť $a > 0$ a $b > 1$ jsou reálná čísla. Dokažte, že*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n^a} = 0\ .$$

Úloha 2.6.9. *Spočtěte následující limity, pro $n \to \infty$.*

1. $$\lim \frac{n+1}{n-1},\quad \lim \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n-1}} \quad a \quad \lim\left(n^{3n+5} - (n-5)^{10n/3-7}\right)\ .$$

2. $$\lim\left(\frac{n^2-n+1}{n+1} - n - 5\right),\quad \lim \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} \quad a \quad \lim\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\ .$$

3. $$\lim\left(n\sin n - n^2\right),\quad \lim \frac{\log^3 n}{\sqrt{n}} \quad a \quad \lim\left(n^{-4}\left((n+2)^5 - (n+1)^5\right)\right)\ .$$

Úloha 2.6.10. *Nechť $a > 0$ a $b > 1$ jsou reálná čísla. Dokažte, že*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^a}{b^n} = +\infty \ .$$

Úloha 2.6.11. *Spočtěte následující limity, pro $n \to \infty$.*

1.
$$\lim \frac{3^n - 4^n}{4^n}, \quad \lim \frac{3^n - 4^n}{3^n} \quad a \quad \lim \frac{3^n - 4^n}{5^n} \ .$$

2.
$$\lim \left(\sqrt{(n+a)(n+n)} - \sqrt{n} \right), \quad \lim n^{\sin n} \quad a \quad \lim \left(1 + \sin n\right)^n \ .$$

3.
$$\lim \frac{\sin n}{n}, \quad \lim \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{2n+1} \right) \quad a \quad \lim \left(2^{\binom{n}{2}} - n^{n^{3/2}} \right) \ .$$

Kapitola 3

Řady

Oddíl 3.1 začneme základními pojmy: řada, částečný součet, součet a Cauchyova podmínka konvergence. Dokážeme nekonečnost počtu prvočísel. Probereme geometrickou řadu a zeta funkci. Dokážeme Leibnizovo kritérium konvergence, srovnávací kritérium a dvě klasická kritéria, odmocninové a podílové.

Oddíl 3.2 je věnován absolutní konvergenci řad. Pomocí Abelovy nerovnosti odvodíme Abelovo i Dirichletovo kritérium neabsolutní konvergence řady. Definujeme přerovnání řady a dokážeme, že se při něm součet absolutně konvergentní řady nezmění. Dokážeme Riemannovu větu, že součet neabsolutně konvergentní řady se přerovnáním libovolně změní. Dokážeme větu o násobení absolutně konvergentních řad a jako její důsledek znovu nekonečnost počtu prvočísel.

V oddílu 3.3 pomocí řady zavedeme exponenciální funkci e^x a násobením absolutně konvergentních řad dokážeme její základní vlastnost, že převádí součet na součin. Definujeme přirozený logaritmus. Odvodíme také mocninný a limitní tvar exponenciální funkce. Jako příklad užití exponenciály uvedeme Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti.

V následujícím oddílu 3.4 pomocí souřadnic bodů jednotkové kružnice definujeme funkce sinus a kosinus, uvedeme jejich vyjádření řadami (které dokážeme později pomoci derivací) a propojíme je s exponenciálou:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t\ .$$

Rovněž definujeme číslo π.

Oddíl 3.5 je věnován Basilejskému problému, rigorózně i nerigorózně dokážeme klasický Eulerův výsledek

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

Oddíl 3.6 ukazuje souvislost rozkladů množin s exponenciální funkcí a obsahuje další příklady užití řad v enumerativní kombinatorice, například dolní odhad maximálního počtu uspořádaných faktorizací

$$n = m_1 m_2 \ldots m_k,\ m_i \in \mathbb{N}\backslash\{1\}\ ,$$

čísla $n \in \mathbb{N}$.

Závěrečný oddíl 3.7 doplňuje odvození vzorce pro Fibonacciova čísla pomocí řad v oddílu 3.6 krátkým algebraickým odvozením.

3.1 Základní výsledky o řadách

Částečný součet a součet řady. Nezápornost a změna pár sčítanců. Divergence harmonické řady implikuje nekonečnost počtu prvočísel. Nutná a Cauchyova podmínka konvergence. Uzávorkování řady. Geometrická řada a zeta funkce. Leibnizovo kritérium. Srovnání řad. Kritéria konvergence řad od Cauchyho a d'Alemberta.

Místo o „nekonečných řadách" píšeme stručněji jen o „řadách".

Definice 3.1.1 (řada, částečný součet, součet). *Řada je vlastně posloupnost reálných čísel $(a_1, a_2, \dots) = (a_n) \subset \mathbb{R}$, ale uvedená v zápisech*

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

— nejčastěji budeme používat první. Její částečné součty $(s_n) \subset \mathbb{R}$ jsou konečné součty

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \dots\ .$$

Součet řady pak definujeme jako jejich limitu:

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots := \lim s_n = \lim\,(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \in \mathbb{R}^*\ .$$

Řada $\sum a_n$ konverguje, má vlastní součet, když posloupnost částečných součtů konverguje. Je-li $\lim s_n$ *nevlastní nebo neexistuje, řada diverguje.*

Řady můžeme sčítat i od jiného indexu než je 1, například $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, $\sum_{n=m}^{\infty} b_n$ a $\sum_{n \ge k} a_n$ (kde $m, k \in \mathbb{N}_0$ či $m, k \in \mathbb{Z}$), nebo i přes nějakou obecnou spočetnou množinu indexů I,

$$\sum_{n \in I} a_n\ .$$

Abychom se u takových řad mohli bavit o součtu podle definice 3.1.1, musí být daná nebo z kontextu zřejmá bijekce $f\colon \mathbb{N} \to I$. Součet této řady pak počítáme podle definice pomocí částečných součtů jako součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n,\quad \text{kde } b_n = a_{f(n)}\ .$$

Řady se vyznačují historicky vzniklou a ustálenou, avšak poněkud matoucí *dvojznačností značení.* Týž symbol $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$ se používá ve dvou různých významech, jednou pro zadání řady jako posloupnosti (a_n) a jindy pro označení jejího součtu, což je konkrétní reálné číslo či $\pm\infty$. Jako kdybychom limitu posloupnosti (a_n) označili opět (a_n) — to by asi trochu mátlo. A přesně to matematici zavedli pro řady, aby život nebyl nudný. Abychom však byli spravedliví — označit součet řady opět jako $a_1+a_2+\ldots$ je v jistém ohledu přirozené, rozšiřuje se tak obvyklé značení konečných součtů, kdežto limita posloupnosti žádnou konečnou operaci nerozšiřuje.

Uvedeme dvě jednoduchá ale užitečná pozorování.

Tvrzení 3.1.2 (nezápornost, změna pár sčítanců). *$\sum a_n$ buď řada.*

1. *Když pro každé n je $a_n \geq 0$, pak $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots$, takže $\sum a_n$ konverguje nebo $\sum a_n = +\infty$.*
2. *Když $\sum b_n$ je taková řada, že $a_n = b_n$ pro každé $n > n_0$, pak $\sum a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ konverguje, $\sum a_n = +\infty \Leftrightarrow \sum b_n = +\infty$ a $\sum a_n = -\infty \Leftrightarrow \sum b_n = -\infty$.*

Důkaz. 1. Monotonie částečných součtů je jasná. Použijeme tvrzení 2.1.13.

2. Nechť (s_n) jsou částečné součty řady $\sum a_n$ a (t_n) jsou částečné součty řady $\sum b_n$. Podle definice částečného součtu pro $n > n_0$ platí rovnost

$$t_n = s_n + (t_{n_0} - s_{n_0}), \quad \text{takže (tvrzení 2.4.3)} \quad \lim t_n = t_{n_0} - s_{n_0} + \lim s_n \ ,$$

existuje-li alespoň jedna z limit (vlastní či nevlastní). To dává, co se tvrdí. □

Změna konečně mnoha členů posloupnosti limitu nezmění. U řady změna konečně mnoha sčítanců součet obecně změní, nezmění ale jeho existenci ani konečnost.

Uvedeme několik příkladů řad a jejich součtů. Řada

$$\sum (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

diverguje, neboť částečné součty $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ nemají limitu. Naopak

$$\sum \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 \ ,$$

protože

$$\lim s_n = \lim\,(1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n) = \lim\,(1 - 1/2^n) = 1 \ .$$

Tato řada tedy konverguje a má součet 1. Podobně má součet 1 i

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots = 1 \ ,$$

protože

$$\lim s_n = \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \lim \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \lim\,(1 - 1/(n+1)) = 1 \ .$$

A proslulá *harmonická řada* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$? Ukážeme, že diverguje, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \ .$$

Pro každé $m = 1, 2, \ldots$ totiž máme nerovnost

$$\sum_{n=m+1}^{2m} \frac{1}{n} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \geq m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} \ .$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dáno a $r \in \mathbb{N}_0$ je maximální vzhledem k $2^r \leq n$. Pak $2^{r+1} > n$, takže $r > \log n / \log 2 - 1$. Podle uvedené nerovnosti máme

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq 1 + \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{r}{2} > \frac{\log n}{2 \log 2} - \frac{1}{2} \ ,$$

což pro $n \to \infty$ má limitu $+\infty$. Tedy $\lim s_n = +\infty$ (jeden strážník — úloha 2.1.29) a harmonická řada proto diverguje, má součet $+\infty$. Z této divergence hned vyplývá nekonečnost počtu prvočísel.

Důsledek 3.1.3 (Sylvesterova nerovnost). *Pro každé číslo $N \in \mathbb{N}$ je*

$$\prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

— vlevo násobíme přes všechna prvočísla nepřesahující N. Jak jsme právě dokázali, pro $N \to +\infty$ jde součet do nekonečna. Do nekonečna tak jde i součin a počet činitelů v něm neomezeně roste. Prvočísel je proto nekonečně mnoho.

Důkaz. Buď dáno $N \in \mathbb{N}$. Vyjdeme samozřejmě z toho, že každé číslo $m \in \mathbb{N}$ je součinem prvočísel: $m = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$ s různými prvočísly p_i a exponenty $n_i \in \mathbb{N}$. Jednoznačnost tohoto rozkladu nepotřebujeme. Dále použijeme odhad, že pro každé $y \in (0, 1)$ a $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$(1 - y)^{-1} > \frac{1 - y^{k+1}}{1 - y} = 1 + y + y^2 + \cdots + y^k \ .$$

Za y dosadíme $\frac{1}{p}$ pro p probíhající prvočísla nepřesahující N a za $k = k_p \in \mathbb{N}$ vždy dáme největší hodnotu, že $p^k \leq N$. Vynásobením všech těchto odhadů vznikne první nerovnost v

$$\prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \geq \prod_{p \leq N} \sum_{n=0}^{k_p} \frac{1}{p^n} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \ .$$

Druhá plyne prostým roznásobením. Výsledné jmenovatele jsou totiž přesně všechny součiny mocnin různých prvočísel p^k s $p^k \leq N$, které jistě zahrnují všechna čísla $n \in \mathbb{N}$ s $n \leq N$. □

Úloha 3.1.4. *V odhadu je ostrá nerovnost. Kde se tak nakonec v Sylvesterově nerovnosti vzala neostrá?*

James J. Sylvester (1814–1897) byl anglický matematik (působil v Oxfordu a také v Baltimoru v Americe, zavedl matematické termíny jako matrix (matice), graph (graf v kombinatorice) a discriminant (diskriminant)).

Hezkou vlastností harmonické řady je, že její *podřady* dají libovolný kladný součet. Platí to ale obecněji.

Úloha 3.1.5. *Nechť* $\sum a_n = +\infty$ *a* $\lim a_n = 0$. *Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo c existuje taková posloupnost přirozených čísel* $k_1 < k_2 < \ldots$, *že*

$$\sum a_{k_n} = c\ .$$

Řada

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

podobná harmonické však konverguje, jak dokážeme pomocí tvrzení 3.1.20. Nakonec triviální, ale důležitý příklad: když se v řadě $\sum a_n$ rovná sčítanec a_n nule pro všechna n s výjimkou konečně mnoha indexů, řekněme $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, pak $\sum a_n$ konverguje a má součet

$$\sum a_n = a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k}\ .$$

Operace součtu řady tedy rozšiřuje operaci konečného součtu.

Úloha 3.1.6. *Dokažte to přesně.*

Tvrzení 3.1.7 (podmínky konvergence řady). *Nechť* $\sum a_n$ *je řada.*

1. *(nutná podmínka konvergence)* $\sum a_n$ *konverguje* $\Rightarrow \lim a_n = 0$.
2. *(Cauchyova podmínka)* $\sum a_n$ *konverguje, právě když*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 :\ m > n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon\ .$$

Důkaz. 1. Nechť $\sum a_n = \lim s_n = s \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0$$

— viz úloha 3.1.8.

2. $\sum a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ (s_n) konverguje $\Leftrightarrow$ (s_n) je cauchyovská (věta 2.2.12). Podle definice částečných součtů pro $m > n$ máme

$$s_m - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m\ .$$

Cauchyova podmínka pro řady tedy jen rozepisuje Cauchyovu podmínku pro posloupnost částečných součtů. □

Úloha 3.1.8. *Zdůvodněte čtyři rovnosti výpočtu dokazujícího první část tvrzení. Které selžou pro* $s = \pm\infty$*?*

První část tvrzení se používá nejčastěji v kontrapozici: je-li dána řada $\sum a_n$, jejíž sčítanec nemá za limitu nulu (tj. $\lim a_n$ neexistuje nebo existuje, ale je nenulová), pak $\sum a_n$ diverguje. Opačná implikace $\Leftarrow$ obecně neplatí, jak jsme viděli na příkladu harmonické řady. Druhá část tvrzení však je ekvivalence.

Následující tvrzení popisuje závislost konvergence a součtu řady na uzávorkování.

Tvrzení 3.1.9 (uzávorkování řady). *Nechť* $\sum a_n$ *je řada a* $k_0 = 0 < k_1 < k_2 < \dots$ *je posloupnost celých čísel. Nová řada*

$$\sum b_n \quad s \quad b_n = a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \cdots + a_{k_n}$$

vznikne z původní řady odpovídajícím uzávorkováním

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}) + (a_{k_2+1} + \cdots + a_{k_3}) + \dots .$$

Kdy (ve smyslu součtů) platí

$$a_1 + a_2 + \cdots = b_1 + b_2 + \dots ?$$

1. *Když má* $\sum a_n$ *vlastní nebo nevlastní součet, pak má* $\sum b_n$ *stejný součet.*
2. *Když má* $\sum b_n$ *vlastní nebo nevlastní součet,* $\lim a_n = 0$ *a posloupnost délek závorek* $(k_1, k_2 - k_1, k_3 - k_2, \dots)$ *je omezená, pak má* $\sum a_n$ *stejný součet.*

Důkaz. Úloha 3.8.1, viz též úloha 3.8.2. □

První část tvrzení je trivialita, ale druhá se často hodí — danou řadu zjednodušíme uzávorkováním a ze součtu vzniklé řady usoudíme na součet původní řady. V této situaci jsme byli na začátku v úloze 1.1.3.

Následující dva druhy řad se dosti často vyskytují.

Tvrzení 3.1.10 (geometrická řada a zeta funkce). *Nechť* $q, s \in \mathbb{R}$. *Geometrická řada je řada*

$$\sum q^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \dots \quad |q| < 1 \\ +\infty & \dots \quad q \geq 1 \\ \textit{nemá součet} & \dots \quad q \leq -1 \end{cases}$$

a zeta funkce je funkce $\zeta\colon (1, +\infty) \to (1, +\infty)$ *daná součtem řady*

$$\zeta(s) = \sum n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \begin{cases} \textit{konverguje} & \dots \quad s > 1 \\ +\infty & \dots \quad s \leq 1\,. \end{cases}$$

Důkaz. Pro $|q| \ge 1$ geometrická řada diverguje — $\lim q^n$ není 0 (část 1 tvrzení 3.1.7). Více informací dají rovnosti

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \ (q \ne 1),\ \ s_n = n \ (q = 1)\ .$$

Z nich je jasné, že pro $q \ge 1$ je $\sum q^{n-1} = +\infty$ a že pro $q \le -1$ neexistuje vlastní ani nevlastní $\lim s_n$, protože s_n je střídavě ≥ 1 a ≤ 0. Pro $|q| < 1$ máme

$$\lim s_n = \frac{1 - \lim q^n}{1 - q} = \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}\ .$$

Co se týká zeta funkce $\zeta(s)$, pro $s \le 1$ je $s_n = 1 + 2^{-s} + \cdots + n^{-s} \ge 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ takže $\sum n^{-s} = +\infty$ podle divergence harmonické řady. Nechť $s > 1$. Dokážeme, že $\sum n^{-s}$ konverguje. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dáno a $r \in \mathbb{N}$ splňuje $2^{r+1} > n$. Pak, označíme-li $q = 2^{1-s} < 1$, podle vzorce pro součet geometrické řady máme

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^s} \le \sum_{k=0}^{r} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{i^s} < \sum_{k=0}^{r} \frac{2^k}{(2^k)^s} = \sum_{k=0}^{r} (2^{1-s})^k < \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}\ .$$

Posloupnost částečných součtů $s_1 < s_2 < \ldots$ má tedy horní mez $\frac{1}{1-2^{1-s}}$ a $\sum n^{-s}$ konverguje. (Proč platí první a druhá nerovnost? Sčítací obor $i = 1, 2, \ldots, n$ jsme pokryli disjunktními intervaly $2^k, 2^k + 1, \ldots, 2^{k+1} - 1$, kde $k = 0, 1, \ldots, r$. Počet sčítanců $\frac{1}{i^s}$ v k-tém intervalu je $2^{k+1} - 1 - 2^k + 1 = 2^k$ a největší z nich je $\frac{1}{(2^k)^s}$. Podobně jsme dokázali divergenci harmonické řady. Argument zobecňuje úloha 3.1.14.) □

Švýcarský matematik *Leonhard Euler (1707–1783)* (působil v Berlíně a Petrohradu, tehdy hlavním městě ruské říše, jeden z největších a nejplodnějších matematiků, nazývaný *analysis incarnate*) dokázal, že

$$\zeta(2) = \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4) = \sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

a odvodil podobné vzorce pro všechny „sudé“ součty $\zeta(2n)$. Vzorec pro $\zeta(2)$ dokážeme v oddílu 3.5.

Úloha 3.1.11. *Dokažte, že pro každé $m \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{R}$ s $|q| < 1$ je*

$$q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + \cdots = \frac{q^m}{1 - q}\ .$$

Úloha 3.1.12. *Petr a Pavel jsou od sebe vzdáleni $a \ge 0$ km a vyjdou proti sobě, každý rychlostí 5 km za hodinu. Pes Vektor mezi nimi pobíhá, od jednoho k druhému a zpět, rychlostí 10 km za hodinu. Spočtěte dráhu, kterou Vektor uběhne, než se Petr a Pavel setkají: a) jako součet řady sčítanců rovných délkám rovných úseků Vektorova běhu a b) jako součin Vektorovy rychlosti a doby, po kterou poběží. Mělo by vyjít totéž.*

Úloha 3.1.13. *Postupem podobným důkazu konvergence $\zeta(s)$ pro $s > 1$ a důkazu divergence $\zeta(1)$ dokažte následující kritérium.*

Tvrzení 3.1.14 (Cauchyho kondenzační kritérium). *Když $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$ jsou reálná čísla, pak řada $\sum 2^n a_{2^n} = 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum a_n$.*

Úloha 3.1.15. *Pro které $a \in \mathbb{R}$ konverguje řada*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a} \ ?$$

Tvrzení 3.1.16 (monotonie a spojitost $\zeta(s)$). *Zeta funkce*

$$\zeta\colon (1, +\infty) \to (1, +\infty)$$

je klesající, $\lim \zeta(1 + \frac{1}{n}) = +\infty$, $\lim \zeta(1 + n) = 1$, *a je spojitá:*

$$\forall\, \varepsilon > 0, s > 1\ \exists\, \delta > 0: \ s < t < s + \delta \Rightarrow \zeta(s) > \zeta(t) > \zeta(s) - \varepsilon\ .$$

Důkaz. Je jasné, že $1 < s < t \Rightarrow \zeta(s) > \zeta(t)$ (podle monotonie reálné mocniny). První limita plyne z $\lim m^{1+1/n} = m$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ (viz tvrzení 2.3.10) a z $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ (divergence harmonické řady). Pro dané (velké) $c > 0$ zvolíme $N \in \mathbb{N}$, že $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} > 2c$, a pak zvolíme n_0, že $n > n_0 \Rightarrow m^{1+1/n} < 2m$ pro každé $m = 1, 2, \dots, N$. Potom pro každé $n > n_0$ je $\frac{1}{1^{1+1/n}} + \frac{1}{2^{1+1/n}} + \dots > \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}) > c$.

Druhá limita se dokazuje podobně, viz úloha 3.1.17.

Dokážeme spojitost funkce ζ. Pro dané $s > 1$ a $\varepsilon \in (0, \zeta(s))$ vezmeme tak velké $N \in \mathbb{N}$, že $1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{N^s} > \zeta(s) - \frac{\varepsilon}{2}$. Pak vezmeme tak malé $\delta > 0$, že $\frac{\zeta(s) - \varepsilon/2}{N^\delta} > \zeta(s) - \varepsilon$. Pak pro každé $t \in (s, s + \delta)$ je

$$\zeta(s) > \zeta(t) > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{s+\delta}} \geq \frac{1}{N^\delta} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} > \zeta(s) - \varepsilon\ .$$

□

Úloha 3.1.17. *Dokažte, že* $\lim \zeta(1 + n) = \lim \zeta(n) = 1$.

Důsledek 3.1.18 (inverzní zeta). $\zeta((1, +\infty)) = (1, +\infty)$. *Pro každé reálné $t > 1$ tedy existuje právě jedno reálné $s > 1$, že $\zeta(s) = t$.*

Důkaz. Existence řešení plyne z předchozího tvrzení a tvrzení 1.7.40. Jeho jednoznačnost plyne z monotonie $\zeta(s)$. □

Tuto vlastnost zeta funkce budeme potřebovat později v oddílu 3.6

Pro důkaz Leibnizova kritéria níže potřebujeme lemma, které později v lemmatu 3.2.7 zobecníme.

Lemma 3.1.19 (střídavý součet). *Když jsou $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$ reálná čísla, pak*

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{n+1} b_n \in [0, b_1]\ .$$

Důkaz. Indukcí podle n. Pro $n = 1$ to platí, $b_1 \in [0, b_1]$. Nechť $n > 1$ a platí to pro každý střídavý součet s $n-1$ sčítanci. Pak $b_1 - b_2 + b_3 - \cdots + (-1)^{n+1} b_n = b_1 - c$, kde $c = b_2 - b_3 + b_4 - \cdots + (-1)^n b_n \in [0, b_2]$ podle indukčního předpokladu. Protože $b_2 \leq b_1$, je i $c \in [0, b_1]$. Tedy $b_1 - c \in [0, b_1]$. □

Tvrzení 3.1.20 (Leibnizovo kritérium). *Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ s $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ a $\lim a_n = 0$. Pak řada*

$$\sum (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \quad \textit{konverguje}\ .$$

Důkaz. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow 0 \leq a_n < \varepsilon$. Pro každé dva indexy $m > n > n_0$ pak platí, že

$$\left| \sum_{i=n+1}^{m} (-1)^{i+1} a_i \right| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots + (-1)^m a_m \leq a_{n+1} < \varepsilon\ ,$$

kde rovnost a následující nerovnost vyplývají z lemmatu 3.1.19. Proto řada $\sum (-1)^{n+1} a_n$ splňuje Cauchyho podmínku a podle části 2 tvrzení 3.1.7 konverguje. □

Kritérium nese jméno německého filozofa a matematika *Gottfrieda W. Leibnize (1646–1716)* (narodil se v Lipsku a zemřel v Hannoveru, spolu s I. Newtonem je tvůrcem matematické analýzy, mnohé značení v analýze má původ u Leibnize).

Úloha 3.1.21. *Dokažte Leibnizovo kritérium jiným způsobem pomocí monotonie posloupnosti částečných součtů.*

Typické příklady řad, jejichž konvergenci dokážeme Leibnizovým kritériem jsou

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \quad \text{a} \quad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ .$$

Tvrzení 3.1.22 (lineární kombinace řad). *Nechť $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ s $a \neq 0$ a $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou řady. Potom $\sum a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum a a_n$ konverguje a pro součty platí*

$$\sum a a_n = a \sum a_n\ .$$

Když $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergují, pak konverguje i $\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$ a pro součty platí

$$\sum (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n\ .$$

Úloha 3.1.23. *Dokažte předchozí tvrzení. Ukažte, že implikaci v jeho druhé části nelze obecně obrátit.*

Uvedeme jedno pěkné použití Leibnizova kritéria i lineární kombinace řad.

Věta 3.1.24 (rozšíření $\zeta(s)$). *Pro každé reálné $s > 1$ platí ve smyslu součtů řad rovnost*

$$(\zeta(s) =) \sum \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \ .$$

Díky tomu, že řada vpravo konverguje dokonce pro každé $s > 0$, rozšiřuje tento vzorec zeta funkci na definiční obor

$$\zeta\colon (0, +\infty) \backslash \{1\} \to \mathbb{R} \ .$$

Důkaz. Podle tvrzeni 3.1.22 pro každé $s > 1$ máme ve smyslu součtů řad rovnost

$$\left(1 - \frac{2}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots - \frac{2}{2^s} - \frac{2}{4^s} - \frac{2}{6^s} - \cdots = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \ ,$$

kterou vyřešíme pro $\zeta(s)$. Pak použijeme tvrzení 3.1.20. $\square$

Tvrzení 3.1.25 (srovnání řad). *Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ jsou posloupnosti s nezápornými členy.*

1. *Když pro každé $n > n_0$ je $0 \le a_n \le b_n$ a řada $\sum b_n$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum a_n$.*
2. *Nechť*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = l \ .$$

(i) když $0 < l < +\infty$, pak $\sum a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ konverguje,
(ii) když $l = 0$, pak $\sum b_n$ konverguje $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konverguje a
(iii) když $l = +\infty$, pak $\sum a_n$ konverguje $\Rightarrow$ $\sum b_n$ konverguje.

Důkaz. 1. Nechť s_n, resp. t_n, jsou částečné součty řady $\sum a_n$, resp. $\sum b_n$. Podle části 2 tvrzení 3.1.2 můžeme předpokládat, že $0 \le a_n \le b_n$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $s_n \le t_n$ pro každé n. Podle předpokladu a části 1 tvrzení 3.1.2 existuje $c > 0$, že $t_n < c$ pro každé n. Tedy i $s_n < c$ pro každé n a stejně tak řada $\sum a_n$ konverguje.

2. (i) Pro $n > n_0$ je $\frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2l$, tedy $a_n < 2lb_n$ a $b_n < \frac{2}{l} a_n$. Ekvivalence konvergencí řad $\sum a_n$ a $\sum b_n$ tedy plyne z první části (a tvrzení 3.1.22). (ii) Pro $n > n_0$ je $\frac{a_n}{b_n} < 1$, tedy $a_n < b_n$ a použijeme první část. (iii) Pro $n > n_0$ je $1 < \frac{a_n}{b_n}$, tedy $b_n < a_n$ a použijeme první část. $\square$

Důsledek 3.1.26 (Hadamardův součin řad). *Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ jsou posloupnosti s nezápornými členy. Když obě řady $\sum a_n$ a $\sum b_n$ konvergují, pak i $\sum a_n b_n$ konverguje.*

Důkaz. Máme $\lim b_n = 0$, takže $0 \le b_n \le 1$ pro každé $n > n_0$ a pak $0 \le a_n b_n \le a_n$. Řada $\sum a_n b_n$ konverguje srovnáním s řadou $\sum a_n$. $\square$

Úloha 3.1.27. *Jak se dá oslabit předpoklad konvergence $\sum a_n$, že řada $\sum a_n b_n$ stále konverguje?*

Úloha 3.1.28. *Ve smyslu součtů řad samozřejmě typicky*

$$\sum a_n b_n \neq \sum a_n \sum b_n \ .$$

Uveďte příklady, kdy platí nerovnost a kdy platí rovnost. Když $a_n, b_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jaká nastává nerovnost mezi $\sum a_n b_n$ a $\sum a_n \sum b_n$?

Hadamardův součin se někdy značí $\odot$ a nejčastěji se používá pro matice, ale používá se i pro mocninné řady ($\sum a_n x^n \odot \sum b_n x^n := \sum a_n b_n x^n$), a názvem odkazuje k francouzskému matematikovi *Jacquesi Hadamardovi (1865–1963)* (v matematice se nejvíce proslavil důkazem tzv. *prvočíselné věty* v r. 1896, že $\lim_{n\to\infty} \#\{p \mid p \le n \text{ a je prvočíslo}\}/(n/\log n) = 1$, jeho dva synové *Étienne (1897–1916)* a *Pierre (1894–1916)* padli v bitvě u Verdunu a poslední syn *Mathieu-Georges (1899–1944)* padl v Tripolsku v Libyi jako příslušník armády de Gaulleových Svobodných Francouzů). Jak ukazuje následující úloha, je nezápornost sčítanců pro $\odot$ i pro srovnání řad podstatná.

Úloha 3.1.29. *Sestrojte takové konvergentní řady $\sum a_n$ a $\sum b_n$, že řada $\sum a_n b_n$ diverguje. Sestrojte řady $\sum a_n$ a $\sum b_n$, že $\sum a_n$ konverguje, $\lim \frac{b_n}{a_n} = 1$, ale $\sum b_n$ diverguje. Návod: Leibnizovo kritérium.*

Uvedeme dvě klasická konvergenční kritéria řad s nezápornými členy.

Věta 3.1.30 (Cauchyho odmocninové kritérium). *Nechť má posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ nezáporné členy.*

1. *Když existují $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n > n_0$ je $a_n^{1/n} < q$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.*

2. *Když existuje $q > 0$, že pro nekonečně mnoho n je $a_n^{1/n} \ge q^{1/n}$, pak řada $\sum a_n$ diverguje. Speciálně, když pro nekonečně mnoho n je $a_n^{1/n} \ge 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.*

3. *Když $\limsup a_n^{1/n} < 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.*

4. *Když $\lim a_n^{1/n} < 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.*

5. *Když $\limsup a_n^{1/n} > 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.*

6. *Když $\lim a_n^{1/n} > 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.*

Důkaz. 1. Pro $n > n_0$ je tedy $a_n < q^n$ a podle první části tvrzení 3.1.25 řada $\sum a_n$ konverguje (srovnáme ji s konvergentní geometrickou řadou).

2. Pro tyto n je $a_n \ge q > 0$, takže a_n nejde k 0 a řada diverguje podle první části tvrzení 3.1.7.

3. Podle věty 2.4.15 existuje n_0 a číslo $q < 1$, že pro $n > n_0$ je $a_n^{1/n} < q$, takže jsme hotovi podle části 1.

4. Když limita existuje, rovná se limsupu, jsme hotovi podle části 3.

5 a 6. Plyne z části 2. □

Podobné kritérium platí i pro podíly. Všimněte si ale rozdílů ve druhé a páté části.

Věta 3.1.31 (d'Alembertovo podílové kritérium). *Nechť má posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *kladné členy.*

1. *Když existují* $q \in (0, 1)$ *a* $n_0 \in \mathbb{N}$*, že pro každé* $n > n_0$ *je* $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$*, pak řada* $\sum a_n$ *konverguje.*
2. *Když existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, že pro každé* $n > n_0$ *je* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$*, pak řada* $\sum a_n$ *diverguje.*
3. *Když* $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, pak řada* $\sum a_n$ *konverguje.*
4. *Když* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, pak řada* $\sum a_n$ *konverguje.*
5. *Pro* $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *nelze rozhodnout, řada* $\sum a_n$ *může konvergovat nebo divergovat.*
6. *Když* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$*, pak řada* $\sum a_n$ *diverguje.*

Důkaz. 1. Podle části 2 tvrzení 3.1.2 můžeme předpokládat, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Vynásobením n nerovností $a_1 \leq a_1$, $\frac{a_2}{a_1} < q$, $\frac{a_3}{a_2} < q, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}} < q$ dostaneme nerovnost $a_n \leq a_1 q^{n-1}$ a jsme hotovi podle části 1 tvrzení 3.1.25 (opět srovnáme s konvergentní geometrickou řadou).

2. Nechť $n > n_0+1$. Vynásobením nerovností $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$, $\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \geq 1, \ldots, \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \geq 1$ dostaneme nerovnost $a_n \geq a_{n_0+1}$, takže a_n nejde k 0 a řada diverguje podle první části tvrzení 3.1.7.

3 a 4. Dokazuje se stejně jako v předchozí větě.

5. Pro posloupnost $(b_n) = (1, 3, 1, 3, 1, 3, \ldots)$ uvažme řadu

$$\sum a_n = \sum b_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{3}{32} + \ldots .$$

Protože $0 \leq a_n \leq 3/2^{n-1}$, řada konverguje srovnáním s geometrickou řadou. Avšak $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2} > 1$. Příklad divergentní řady s $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ se najde lehce.

6. Plyne z části 2. □

Další kritérium konvergence je v úloze 3.8.3. Čtenářce je jistě jasné, že ve druhé části poslední věty nelze platnost pro $n > n_0$ nahradit platností pro nekonečně mnoho n.

Úloha 3.1.32. *Lze odmocninovým nebo podílovým kritériem rozhodnout o konvergenci řady* $\zeta(s) = \sum n^{-s}$*?*

Podílové kritérium je spjato se jménem francouzského matematika, mechanika, fyzika, filosofa, hudebního teoretika a encyklopedisty *Jeana-Baptisty le Ronda d'Alemberta (1717–1783)* (zabýval se vlnovou rovnicí, v mechanice je po něm nazván d'Alembertův princip a d'Alembertův paradox, zvaný také hydrodynamický).

Když se limsup nebo limita z $a_n^{1/n}$ či z $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ rovná 1, nelze podle kritéria rozhodnout a řada může konvergovat nebo divergovat. Nabízí se tak otázka, zda je někdy některé z obou kritérií silnější než druhé, dokazuje konvergenci či divergenci dané řady, ale podle druhého kritéria o ní nelze rozhodnout. Pojďme to pořádně zanalyzovat.

Věta 3.1.33 (srovnání odmocninového a podílového kritéria). *Nechť*

$$\sum a_n,\ a_n > 0\ ,$$

je libovolná řada kladných reálných čísel. Pokud její konvergenci či divergenci rozhoduje podílové kritérium, rozhoduje je i odmocninové kritérium (a pochopitelně stejně, jinak je spor v matematice). Naopak to neplatí, takže odmocninové kritérium je striktně silnější.

Důkaz. Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy, jejíž konvergence nebo divergence je rozhodnutá podílovým kritériem. Pro indexy $1 \le m < n$ máme vyjádření

$$a_n^{1/n} = \prod_{i=m}^{n-1}\left(\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)^{1/n} \cdot \left(a_1 \prod_{i=1}^{m-1}\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)^{1/n} =: \prod_{i=m}^{n-1}\left(\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)^{1/n} \cdot C(m)^{1/n}$$

(patrně vždy $C(m) > 0$). První možnost, jak podílové kritérium rozhodlo konvergenci nebo divergenci řady, je existence limity $\ell := \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 0$ různé od 1. Pro dané $\varepsilon > 0$ tak pro každé $n > n_0$ leží $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ v $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$. Vyjádření pro $n > m = n_0 + 1$ dává odhady

$$\max(0, \ell - \varepsilon)^{1-(n_0+1)/n} < \frac{a_n^{1/n}}{C(n_0+1)^{1/n}} < (\ell + \varepsilon)^{1-(n_0+1)/n}\ .$$

Přechod $n \to \infty$ ukazuje, že i $\lim a_n^{1/n} = \ell$. Tedy i odmocninové kritérium rozhoduje konvergenci či divergenci $\sum a_n$. Druhá možnost je, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ pro každé $n > n_0$ a řada diverguje podle části 2 věty 3.1.31. Vyjádření pro $n > m = n_0 + 1$ dává odhad

$$a_n^{1/n} \ge C(n_0+1)^{1/n}$$

a řada diverguje i podle části 2 věty 3.1.30. Poslední třetí možnost je, že řada konverguje podle části 1 (či, ekvivalentně, části 3) věty 3.1.31. Vyjádření s $n > m = n_0 + 1$ implikuje nerovnost

$$a_n^{1/n} < q^{1-(n_0+1)/n} C(n_0+1)^{1/n}\ ,$$

která dává konvergenci řady i podle části 1 věty 3.1.30. Lze-li použít podílové kritérium, lze vždy použít i odmocninové.

V řadě v části 5 věty 3.1.31 jsou podíly $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ střídavě $\frac{3}{2}$ a $\frac{1}{6}$ a o její konvergenci nelze podle podílového kritéria (věta 3.1.31) rozhodnout. Ale $\lim a_n^{1/n} = \frac{1}{2}$ a řada konverguje podle odmocninového kritéria (část 4 věty 3.1.30). Odmocninové kritérium je tedy striktně silnější než podílové. □

Úloha 3.1.34. *Pro každou dvojici reálných čísel α, β s $0 \le \alpha \le 1 \le \beta$ sestrojte konvergentní i divergentní řadu $\sum a_n$, $a_n > 0$, splňující*

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \quad a \quad \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \beta \ .$$

3.2 Absolutní a neabsolutní konvergence

Absolutní a neabsolutní konvergence. Abelovo a Dirichletovo kritérium konvergence řady. Olivierův test konvergence: $\sum \frac{1}{n}$ je rozhraní. Přerovnání absolutně a neabsolutně konvergentní řady. Obecná absolutně konvergentní řada na množině. Násobení absolutně konvergentních řad a jejich asociativita. Opět nekonečnost počtu prvočísel. Eulerova identita č. 1.

Zavedeme absolutní konvergenci řad, zesílení obyčejné konvergence.

Definice 3.2.1 (absolutní konvergence). *Řada $\sum a_n$ absolutně konverguje, konverguje-li řada $\sum |a_n|$, to jest existuje $c > 0$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je*

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| < c \ .$$

Řada $\sum a_n$ konverguje neabsolutně (též se říká podmíněně), pokud konverguje, ale ne absolutně, to jest

$$\lim\,(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \in \mathbb{R}, \quad ale \quad \lim\,(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|) = +\infty \ .$$

Například $\sum (-\frac{1}{2})^n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$ konverguje absolutně, stejně jako řady $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ a $\sum \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$, ale řada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje pouze neabsolutně.

Úloha 3.2.2. *Kdy konverguje absolutně geometrická řada $\sum q^{n-1}$, $q \in \mathbb{R}$?*

Úloha 3.2.3. *Pro jaké $s \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ absolutně? Pro jaké podmíněně? Kdy diverguje?*

Ukažme, že absolutní konvergence opravdu zesiluje obyčejnou konvergenci.

Tvrzení 3.2.4 (AK ⇒ K). *Když řada $\sum a_n$ absolutně konverguje, pak konverguje.*

Důkaz. Nechť $\sum a_n$ absolutně konverguje. Pro dané $\varepsilon > 0$ tak podle části 2 tvrzení 3.1.7 existuje n_0, že pro každé dva indexy $m > n > n_0$ je $\sum_{i=n+1}^{m} |a_i| = |\sum_{i=n+1}^{m} |a_i|| < \varepsilon$. Tedy, díky trojúhelníkové nerovnosti a vlastnostem absolutní hodnoty, pro tyto m, n máme i nerovnost

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} |a_i| < \varepsilon$$

a řada $\sum a_n$ konverguje podle části 2 tvrzení 3.1.7. □

Teprve absolutně konvergentní řady jsou tím správným rozšířením konečného sčítání na nekonečně mnoho sčítanců, které zachová pěkné vlastnosti operace. Ukážeme, že absolutně konvergentní řady splňují zákon komutativní (součet se nemění při přerovnání, věta 3.2.20), distributivní (po vynásobení dvou absolutně konvergentních řad se i součty vynásobí, věta 3.2.23) i asociativní (přeskupení sčítanců nemění součet, věta 3.2.26).

Každá řada s pouze konečně mnoha nenulovými sčítanci absolutně konverguje. Dále je jasné, že pro řadu s nezápornými sčítanci, obecněji pro řadu se skoro všemi — tedy až na konečně mnoho výjimek — sčítanci ≥ 0 či skoro všemi sčítanci ≤ 0 konvergence a absolutní konvergence splývají. Neabsolutně konvergentní řada má nekonečně mnoho kladných a nekonečně mnoho záporných sčítanců.

Úloha 3.2.5. *Dokažte, že když $\sum a_n$ podmíněně konverguje, pak*

$$\sum \min(0, a_n) = -\infty \quad a \quad \sum \max(0, a_n) = +\infty$$

— záporné sčítance řady mají součet $-\infty$ a kladné $+\infty$.

Většina kritérií konvergence řad v předchozím oddílu se týkala řad se sčítanci nezápornými či skoro všemi nezápornými, takže nerozlišovala mezi konvergencí a absolutní konvergencí: část 1 tvrzení 3.1.2 o nezápornosti, konvergence $\zeta(s)$ v tvrzení 3.1.10, Cauchyho kondenzační kritérium v tvrzení 3.1.14, srovnání řad v tvrzení 3.1.25 a odmocninové a podílové kritérium ve větách 3.1.30 a 3.1.31. Řad s kladnými i zápornými členy, tedy případu neabsolutní konvergence, se týkaly část 2 tvrzení 3.1.2 o změně sčítance, podmínky konvergence, zejména Cauchyho podmínka, v tvrzení 3.1.7, Leibnizovo kritérium v tvrzení 3.1.20 a lineární kombinace řad v tvrzení 3.1.22. Že se absolutní konvergence hezky chová k aritmetickým operacím vynikne v následující úloze ve srovnání s úlohou 3.1.29.

Úloha 3.2.6. *Dokažte, že když $\sum a_n$ konverguje a $\sum b_n$ absolutně konverguje, potom $\sum a_n b_n$ absolutně konverguje.*

Zobecníme Leibnizovo kritérium. Klíčem je opět vhodná nerovnost.

Lemma 3.2.7 (Abelova nerovnost). *Nechť $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, přičemž $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$. Položme $B_i := b_1 + b_2 + \cdots + b_i$. Potom*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq a_1 B, \quad \textit{kde} \quad B = \max_{1 \leq i \leq n} |B_i| \ .$$

Důkaz. Dodefinujeme hodnoty $B_0 = a_{n+1} = 0$. Pak, podle definice B_i a distributivity,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i (B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=1}^{n+1} a_i B_{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} B_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) B_i \ . \end{aligned}$$

Trojúhelníkovou nerovnost použijeme pro transformovaný součet a vzhledem k nezápornosti čísel $a_i - a_{i+1}$ a definici B máme

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) |B_i| \leq B \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) = B(a_1 - a_{n+1}) = B a_1 \ .$$

□

Úloha 3.2.8. *Proč jsme dodefinovali a_{n+1} a B_0 jako 0? Rozmyslete si přesně hodnoty sčítacích indexů v předchozím výpočtu.*

Věta 3.2.9 (Abelovo a Dirichletovo kritérium). *Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ jsou posloupnosti splňující*

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0 \ .$$

1. *(Dirichletovo kritérium) Když $\lim a_n = 0$ a řada $\sum b_n$ má omezené částečné součty, pak řada $\sum a_n b_n$ konverguje.*
2. *(Abelovo kritérium) Když řada $\sum b_n$ konverguje, pak řada $\sum a_n b_n$ konverguje.*

Důkaz. Podle Lemmatu 3.2.7 pro $m > n \geq 1$ a $B_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_i$ je

$$S := \left| \sum_{i=n+1}^{m} a_i b_i \right| \leq a_{n+1} \cdot \max_{n+1 \leq i \leq m} |B_i - B_n| \ .$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Jsou-li splněny předpoklady Dirichletova kritéria, existuje konstanta $c > 0$ a index n_0, že pro $n > n_0$ je $a_{n+1} < \varepsilon$ a pro každé i a n je $|B_i - B_n| \leq |B_i| + |B_n| < c$. Pro $n > n_0$ tedy $S < \varepsilon c$ a $\sum a_n b_n$ konverguje podle Cauchyho podmínky v tvrzení 3.1.7. Je-li splněn předpoklad Abelova kritéria, existuje index n_0, že pro $i > n > n_0$ je $|B_i - B_n| < \varepsilon$ (podle části 2 tvrzení 3.1.7). Pro $n > n_0$ tedy $S \leq a_{n+1}\varepsilon \leq a_1 \varepsilon$ a $\sum a_n b_n$ konverguje opět podle Cauchyho podmínky v tvrzení 3.1.7. □

Úloha 3.2.10. *Jak věta 3.2.9 zobecňuje Leibnizovo kritérium v tvrzení 3.1.20? Ukažte, že ve větě 3.2.9 stačí předpokládat, že posloupnost (a_n) je monotónní pro $n > n_0$ a omezená.*

Peter L. Dirichlet (1805–1859) byl německý matematik (dokázal, že každá aritmetická posloupnost $a, a+m, a+2m, \ldots$, kde $a, m \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná čísla, obsahuje nekonečně mnoho prvočísel, byl švagrem hudebního skladatele F. Mendelsohna-Bartholdyho, oženil se s jeho sestrou Rebeckou) a *Niels Henrik Abel (1802–1829)* byl norský matematik (dokázal obecnou neřešitelnost rovnic pátého stupně v odmocninách). Konvergence následujících řad plyne z věty 3.2.9.

1. $\sum \frac{\sin n}{n} = \sin 1 + \frac{\sin 2}{2} + \frac{\sin 3}{3} + \ldots$.
2. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{\log(n+1)} = \frac{1/2}{\log 2} - \frac{2/3}{\log 3} + \frac{3/4}{\log 4} - \ldots$.
3. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{n+1}}{\log(n+1)} = \frac{3/2}{\log 2} - \frac{4/3}{\log 3} + \frac{5/4}{\log 4} - \ldots$.
4. $\sum \frac{a_n}{n} = 1 + 1 - 1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} + \ldots$, kde $(a_n) = (1, 2, -3, 1, 2, -3, 1, \ldots)$ je 3-periodická posloupnost.

Úloha 3.2.11. *Dokažte konvergenci těchto čtyř řad. Dokažte konvergenci druhé a třetí řady bez věty 3.2.9.*

Řada $\sum \frac{1}{n}$ není „nejmenší“ divergentní kladná řada, to jest divergentní a se sčítanci nejrychleji jdoucími k 0 (taková řada ani neexistuje), třeba řada $\sum \frac{1}{n \log(n+1)}$ také diverguje. Nicméně $\sum \frac{1}{n}$ představuje v jistém smyslu ostré rozhraní konvergence *monotónních* řad.

Věta 3.2.12 (Olivierův test konvergence). *Pro každou řadu $\sum a_n$ platí:*

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0,\ \sum a_n < +\infty \Rightarrow \lim \frac{a_n}{1/n} = 0\,.$$

Na druhou stranu pro každou posloupnost $(b_n) \subset (0, +\infty)$ jdoucí k 0 existuje taková řada $\sum a_n$, že

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0,\ \sum a_n < +\infty \quad a \quad \limsup \frac{a_n}{b_n/n} > 0\,.$$

V každé konvergentní řadě s nezápornými a nerostoucími členy tak členy jdou k 0 rychleji než $\frac{1}{n}$, ale pro žádnou posloupnost jdoucí k 0 rychleji než $\frac{1}{n}$ to už není pravda.

Důkaz. Nechť posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je nerostoucí, nezáporná a $\lim \frac{a_n}{1/n}$ není 0. Existuje tedy konstanta $c > 0$ a posloupnost indexů $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots$, že

$$a_{k_n} > \frac{c}{k_n},\ n = 1, 2, \ldots\,.$$

Z této posloupnost vybereme takovou podposloupnost $k_{j_1}, k_{j_2}, \ldots$ s $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots$, že pro každé $n \geq 2$ je $k_{j_n} \geq 2k_{j_{n-1}}$. To je pro nekonečnou posloupnost snadné (u konečné by to obecně nešlo). Pak díky monotonii a_n pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme (položíme $k_{j_0} = 0$)

$$\sum_{i=1}^{k_{j_n}} a_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=k_{j_{i-1}}+1}^{k_{j_i}} a_l \geq \sum_{i=1}^{n} (k_{j_i} - k_{j_{i-1}}) a_{k_{j_i}} > \sum_{i=1}^{n} \frac{(k_{j_i} - k_{j_{i-1}})c}{k_{j_i}} \geq \frac{nc}{2} ,$$

protože $k_{j_{i-1}}/k_{j_i} \leq \frac{1}{2}$. Tedy $\sum a_n = +\infty$.

Nechť je naopak dána popsaná posloupnost (b_n). Vybereme z ní takovou podposloupnost s indexy $1 = k_1 < k_2 < \ldots$, že $b_{k_1} > b_{k_2} > \ldots$ (> 0) a $\sum b_{k_n} < +\infty$, což je zřejmě možné. Posloupnost (a_n) definujeme jako

$$a_1 = \frac{b_1}{1} = \frac{b_{k_1}}{k_1},\ a_2 = a_3 = \cdots = a_{k_2} = \frac{b_{k_2}}{k_2},\ a_{k_2+1} = \cdots = a_{k_3} = \frac{b_{k_3}}{k_3}$$

a tak dál. Tato posloupnost je jistě kladná, nerostoucí a protože $\frac{a_{k_n}}{b_{k_n}/k_n} = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, máme $\limsup \frac{a_n}{b_n/n} \geq 1$. Dále podle definice a_n pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme (položíme $k_0 = 0$)

$$\sum_{i=1}^{k_n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=k_{i-1}+1}^{k_i} a_l = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=k_{i-1}+1}^{k_i} \frac{b_{k_i}}{k_i} < \sum_{i=1}^{n} b_{k_i} < c$$

pro nějakou konstantu $c > 0$, protože $\sum b_{k_n}$ konverguje. Tedy řada $\sum a_n$ konverguje. □

Přejdeme k vlivu přerovnání řady na její konvergenci a součet.

Definice 3.2.13 (přerovnání řady). *Přerovnáním řady $\sum a_n$ pomocí permutace $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (p je bijekce) rozumíme řadu*

$$\sum a_{p(n)} = a_{p(1)} + a_{p(2)} + \ldots .$$

Dokážeme, že přerovnání může libovolně změnit součet neabsolutně konvergentní řady, ale nikdy nezmění součet absolutně konvergentní řady. Budeme potřebovat obecný výsledek o řadách, který jsme mohli uvést už v předešlém oddílu.

Tvrzení 3.2.14 (zbytek řady). *Nechť $\sum a_n$ je řada. Jejím m-tým zbytkem pro $m \in \mathbb{N}$ rozumíme řadu $\sum_{n>m} a_n$.*

1. *Když $\sum a_n$ konverguje, pak konverguje i každý její zbytek a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že*

$$m > n_0 \Rightarrow \left| \sum_{n>m} a_n \right| < \varepsilon .$$

2. Když $\sum a_n = \pm\infty$, pak pro každé $m \in \mathbb{N}$ je

$$\sum_{n>m} a_n = \sum a_n \ (= \pm\infty) \ .$$

Důkaz. 1. Každý zbytek řady konverguje podle tvrzení 3.1.2 ($a_1, \ldots, a_m$ nahradíme nulami). Nechť $\sum a_n$ konverguje, takže $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$, a je dáno $\varepsilon > 0$. Existuje tedy index n_0, že pro každé $m > n_0$ je $|s_m - s| < \varepsilon$. Podle tvrzení 2.1.20 pak pro každé pevné $m > n_0$ je

$$\left| \sum_{n>m} a_n \right| = |\lim_{n\to\infty} (s_n - s_m)| = |\lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_m| = |s - s_m| < \varepsilon \ .$$

2. Nechť $\sum a_n = \lim s_n = \pm\infty$. Podle tvrzení 2.4.3 pro každé pevné m je

$$\sum_{n>m} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_m) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_m = \sum a_n - s_m = \sum a_n \ .$$

□

Věta 3.2.15 (Riemannova o přerovnání řady). *Nechť řada $\sum a_n$ neabsolutně konverguje. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^*$ existuje taková permutace $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že*

$$\sum a_{p(n)} = \alpha \ .$$

Existuje i přerovnání řady $\sum a_n$, které nemá součet.

Důkaz. Nechť řada $\sum a_n$ neabsolutně konverguje a je dáno číslo $\alpha \in \mathbb{R}$. Případy $\alpha = \pm\infty$ a neexistujícího součtu odsouváme do úlohy 3.2.16. Identická posloupnost $I = (1, 2, 3, \ldots)$ se podmínkami $a_{b_n} \ge 0$ a $a_{c_n} < 0$ jednoznačně rozkládá na dvě podposloupnosti $B = (b_n) \subset \mathbb{N}$ a $C = (c_n) \subset \mathbb{N}$, . Podle úlohy 3.2.5 je B i C nekonečná. B i C vyjádříme jako zřetězení konečných neprázdných posloupností $I_i \subset \mathbb{N}$ a $J_i \subset \mathbb{N}$,

$$B = (I_1, I_2, I_3, \ldots) \ \text{ a } \ C = (J_1, J_2, J_3, \ldots) \ ,$$

které definujeme následovně. I_1 je nejkratší (neprázdný) počáteční úsek v B, že

$$\sum_{n \in I_1} a_n > \alpha \ ,$$

J_1 je nejkratší počáteční úsek v C, že

$$\sum_{n \in I_1 \cup J_1} a_n < \alpha \ ,$$

I_2 je nejkratší úsek v B po I_1, že

$$\sum_{n \in I_1 \cup J_1 \cup I_2} a_n > \alpha \ ,$$

J_2 je nejkratší úsek v C po J_1, že

$$\sum_{n\in I_1\cup J_1\cup I_2\cup J_2} a_n < \alpha$$

a tak dál. Protože $\sum a_{b_n} = +\infty$ a $\sum a_{c_n} = -\infty$ (úloha 3.2.5), podle části 2 tvrzení 3.2.14 vždy požadovaný konečný úsek I_i v B a J_iv C v každém kroku nalezneme a jeho definice je korektní. Permutaci $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definujeme jako posloupnost vzniklou „prolnutím“ B a C:

$$(p(1), p(2), p(3), \dots) = (K_1, K_2, K_3, \dots) = (I_1, J_1, I_2, J_2, I_3, J_3, \dots)\ ,$$

tj. $K_{2n-1} = I_n$ a $K_{2n} = J_n$. Protože B a C rozkládají I, posloupnost $(p(n))$ je permutace $\mathbb{N}$. Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$ s $n \ge |K_1|$ ($|K_i|$ označuje délku úseku). Pak máme jednoznačné $j \in \mathbb{N}$, že $|K_1| + |K_2| + \dots + |K_j| \le n < |K_1| + |K_2| + \dots + |K_{j+1}|$. Z minimality délek úseků I_i a J_i plyne, že pro sudé (resp. liché) $j+1$ nastává

$$\sum_{i=1}^{n} a_{p(i)} \in \big[\alpha, \alpha + a_{\ell(K_j)}\big] \quad \big(\text{resp. } \dots \in [\alpha + a_{\ell(K_j)}, \alpha]\big)\ ,$$

kde $\ell(\cdot)$ označuje poslední člen úseku. Je jasné, že pro $n \to \infty$ i $j \to \infty$ a tedy $a_{\ell(K_j)} \to 0$, protože $\sum a_n$ konverguje. Tudíž $\sum a_{p(n)} = \alpha$ a $\sum a_{p(n)}$ je hledané přerovnání řady $\sum a_n$ se součtem α. □

Řadou, na níž lze použít Riemannovu větu, je střídavá harmonická řada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2\ ,$$

s kterou jsme se setkali už v oddílu 1.1.

Úloha 3.2.16. *Pro neabsolutně konvergentní řadu $\sum a_n$ nalezněte permutace p přirozených čísel, že $\sum a_{p(n)} = -\infty$, $\sum a_{p(n)} = +\infty$ a $\sum a_{p(n)}$ neexistuje.*

Úloha 3.2.17. *Proč v důkazu věty omezujeme n nerovností $n \ge |K_1|$?*

Úloha 3.2.18. *Nechť $\sum a_n$ je neabsolutně konvergentní a p je permutace $\mathbb{N}$ složená z dvojcyklů prohazujících $2n-1$ a $2n$. Co se dá říci o součtu přerovnání $\sum a_{p(n)}$?*

Věta 3.2.19 (W. Brian, dětská verze, 2018). *Nechť*

$$\sum a_n \quad a \quad \sum b_n$$

jsou dvě libovolné neabsolutně konvergentní řady. Pak existuje taková množina indexů $X \subset \mathbb{N}$, že

$$\sum_{n\in X} a_n = \pm\infty \quad \textit{a také} \quad \sum_{n\in X} b_n = \pm\infty$$

— obě podřady s indexy sčítanců v X mají součet $+\infty$ nebo $-\infty$ (ne nutně stejný).

Důkaz. Nechť $X^{+,-} \subset \mathbb{N}$ jsou ty n, že $a_n > 0$ a $b_n \le 0$. Podobně definujeme množiny $X^{+,+}, X^{-,+}$ a $X^{-,-}$. Pro $X \subset \mathbb{N}$ řady $\sum_{n \in X} a_n$ a $\sum_{n \in X} b_n$ označíme jako $A(X)$ a $B(X)$. Místo $B(X^{-,+})$ píšeme jednodušeji $B(-,+)$ a podobně. Platí lemma, že

> alespoň jedna z řad $A(+,+)$ a $A(+,-)$ má součet $+\infty$ a je-li to jen jedna, druhá absolutně konverguje.

Obě řady totiž tvoří rozklad podřady kladných sčítanců řady $\sum a_n$, kterážto podřada má součet $+\infty$. Analogické lemma platí pro další tři dvojice řad

$$A(-,+) \text{ a } A(-,-),\ B(+,+) \text{ a } B(-,+),\ B(-,-) \text{ a } B(+,-)\,.$$

Pokud pro alespoň jednu ze čtyř množin $X^{\cdot,\cdot}$ mají obě řady $A(\cdot,\cdot)$ a $B(\cdot,\cdot)$ součet $\pm\infty$, jsme hotovi. Předpokládejme proto, že pro každou z těchto čtyř množin $X^{\cdot,\cdot}$ alespoň jedna z obou řad nemá součet $\pm\infty$.

Takže $A(+,+)$ nebo $B(+,+)$ nemá součet $+\infty$. Pak podle lemmatu alespoň jedna z obou řad absolutně konverguje. Řekněme, že absolutně konvergují obě. Lemma implikuje, že $A(+,-) = B(-,+) = +\infty$. Podle našeho předpokladu pak $B(+,-)$ i $A(-,+)$ absolutně konvergují. Pak ale lemma dává $B(-,-) = A(-,-) = -\infty$, ve sporu s naším předpokladem. Tudíž z řad $A(+,+)$ a $B(+,+)$ jedna absolutně konverguje a druhá má součet $+\infty$. Pomocí lemmatu a našeho předpokladu dostáváme dvě možnosti:

1. $A(+,+) = +\infty$, $B(+,+)$ a. k., $A(-,+)$ a. k., $B(-,+) = +\infty$, $A(+,-)$ a. k., $B(+,-) = -\infty$, $A(-,-) = -\infty$ a $B(-,-)$ a. k. a
2. $A(+,+)$ a. k., $B(+,+) = +\infty$, $A(-,+) = -\infty$, $B(-,+)$ a. k., $A(+,-) = +\infty$, $B(+,-)$ a. k., $A(-,-)$ a. k. a $B(-,-) = -\infty$.

V obou případech však pro $X = X^{+,+} \cup X^{+,-}$ obě řady $A(X)$ a $B(X)$ mají součet $\pm\infty$. □

Jak uvádíme v závěrečných poznámkách, „dospělá“ verze věty platí pro tři neabsolutně konvergentní řady. Důkaz je ale podstatně složitější.

Ukážeme, že pro sčítání absolutně konvergentních řad platí komutativní zákon.

Věta 3.2.20 (o přerovnání absolutně konvergentní řady). *Když $\sum a_n$ absolutně konverguje a $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je permutace, pak i $\sum a_{p(n)}$ absolutně konverguje a součet se nemění,*

$$\sum a_{p(n)} = \sum a_n\,.$$

Důkaz. Nechť $\sum a_{p(n)}$ je přerovnání řady $\sum a_n$. Protože $\sum a_n$ absolutně konverguje, existuje $c > 0$, že $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| < c$ pro každé n. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dané. Pak existuje $m \in \mathbb{N}$, že $\{p(1), p(2), \ldots, p(n)\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, tudíž i

$$|a_{p(1)}| + |a_{p(2)}| + \cdots + |a_{p(n)}| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m| < c$$

a $\sum a_{p(n)}$ absolutně konverguje. Dokážeme, že $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$ (součty). Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle části 1 tvrzení 3.2.14 vezmeme n_0, že $\sum_{n>n_0} |a_n| < \varepsilon$ i $\sum_{n>n_0} |a_{p(n)}| < \varepsilon$. Pak vezmeme tak velké n_1, $n_1 > n_0$, že ($[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$)

$$\{p(1), p(2), \ldots, p(n_0)\} \subset [n_1] \ \text{ i } \ [n_0] \subset \{p(1), p(2), \ldots, p(n_1)\} \ .$$

Pro dané $n \in \mathbb{N}$ s $n > n_1$ definujeme

$$A = [n] \backslash \{p(1), p(2), \ldots, p(n)\} \ \text{ a } \ B = \{p(1), p(2), \ldots, p(n)\} \backslash [n] \ .$$

Podle volby n_1 je $\min A, \min B > n_0$. Díky definici n_0 a Δ-ové nerovnosti,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_{p(i)} \right| = \left| \sum_{i \in A} a_i - \sum_{i \in B} a_{p(i)} \right| \le \sum_{i>n_0} |a_i| + \sum_{i>n_0} |a_{p(i)}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \ .$$

Tedy $\lim (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \lim (a_{p(1)} + a_{p(2)} + \cdots + a_{p(n)})$ a obě řady mají stejný součet. □

Přívlastek „absolutní“ v sousloví „absolutní konvergence“ proto poukazuje nejen na absolutní hodnotu $| \ldots |$ v definici 3.2.1, ale také na nezávislost součtu řady $\sum a_n$ na pořadí sčítanců. Absolutně konvergentní řady tak lze definovat obecně pro libovolnou spočetnou množinou indexů, třeba $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ a podobně.

Definice 3.2.21 (absolutně konvergentní řada na množině). *Nechť X je spočetná množina. Řada na množině X je zobrazení $a\colon X \to \mathbb{R}$, zapsáno*

$$\sum_{i \in X} a_i \ .$$

Absolutně konverguje, když pro nějakou, podle věty 3.2.20 ekvivalentně každou, bijekci $f : \mathbb{N} \to X$ řada $\sum a_{f(n)}$ absolutně konverguje. Její součet pak definujeme jako součet řady $\sum a_{f(n)}$.

Podle předchozí věty tento součet existuje a nezávisí na volbě f, takže definice je korektní.

Tvrzení 3.2.22 (kritérium absolutní konvergence). *Nechť $\sum_{i \in X} a_i$ je řada na spočetné množině X. Pak $\sum_{i \in X} a_i$ absolutně konverguje, právě když pro nějaké $c > 0$ pro každou konečnou podmnožinu $A \subset X$ máme*

$$\sum_{i \in A} |a_i| \le c \ .$$

Důkaz. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to X$ je libovolná bijekce. Když $\sum_{i \in X} a_i$ splňuje uvedenou podmínku, máme pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $|a_{f(1)}| + |a_{f(2)}| + \cdots + |a_{f(n)}| \le c$, takže $\sum_{i \in X} a_i$ absolutně konverguje. Když $\sum_{i \in X} a_i$ absolutně konverguje, jsou částečné součty řady $\sum |a_{f(n)}|$ omezené nějakou konstantou $c > 0$. Pro danou konečnou podmnožinu $A \subset X$ stačí vzít tak velké $n \in \mathbb{N}$, že $A \subset \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$. Pak $\sum_{i\in A} |a_i| \le \sum_{m=1}^{n} |a_{f(m)}| \le c$ a $\sum_{i\in X} a_i$ splňuje uvedenou podmínku. □

Abolutně konvergentní řada na spočetné množině je tedy spočetný soubor reálných čísel s omezenou „váhou" všech konečných podsouborů. Pro sčítání absolutně konvergentních řad dokážeme distributivní zákon.

Věta 3.2.23 (násobení absolutně konvergentních řad). *Nechť $\sum_{i\in X} a_i$ a $\sum_{j\in Y} b_j$ jsou absolutně konvergentní řady. Jejich součinová řada absolutně konverguje a součty tří řad splňují vztah*

$$\sum_{(i,j)\in X\times Y} a_i b_j = \sum_{i\in X} a_i \cdot \sum_{j\in Y} b_j \ .$$

Důkaz. Nechť $Z \subset X \times Y$ je libovolná konečná podmnožina. Máme konečné podmnožiny $U \subset X$ a $V \subset Y$, že $Z \subset U \times V$. Pro nějakou konstantu $c > 0$ díky tvrzení 3.2.22 je

$$\sum_{(i,j)\in Z} |a_i b_j| \le \sum_{(i,j)\in U\times V} |a_i| \cdot |b_j| = \sum_{i\in U} |a_i| \sum_{j\in V} |b_j| < c^2 \ .$$

Součin obou řad proto absolutně konverguje.

Nechť $a = \sum_{i\in X} a_i$ a $b = \sum_{j\in Y} b_j$ jsou součty obou řad. Ukážeme, že součinová řada má součet ab. Lze předpokládat, že $X = Y = \mathbb{N}$. Označíme

$$c_{(k,l)} = a_k b_l \ .$$

Vezmeme nějakou bijekci $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a libovolnou konstantu $c \in \mathbb{R}$ větší než součty $\sum |a_n|$ a $\sum |b_n|$. Pro dané $\varepsilon \in (0,1)$ vezmeme tak velké $N \in \mathbb{N}$, že

$$\left|\sum_{i=1}^{N} a_i - a\right| < \varepsilon,\ \left|\sum_{i=1}^{N} b_i - b\right| < \varepsilon,\ \sum_{i>N} |a_i| < \varepsilon \ \text{ a } \ \sum_{i>N} |b_i| < \varepsilon \ ,$$

což lze podle $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ a absolutní konvergence obou řad (viz tvrzení 3.2.14). Pro každé tak velké $n \in \mathbb{N}$, že $k, l \le N \Rightarrow p^{-1}((k,l)) \le n$, potom máme $(|\delta_1|, |\delta_2| < \varepsilon)$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} c_{p(i)} - ab\right| &\le \left|\sum_{i=1}^{n} c_{p(i)} - \sum_{k=1}^{N} a_k \sum_{l=1}^{N} b_l\right| + \left|\sum_{k=1}^{N} a_k \sum_{l=1}^{N} b_l - ab\right| \\
&\le \sum_{k>N} |a_k| \sum_{l=1}^{\infty} |b_l| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{l>N} |b_l| + |(a+\delta_1)(b+\delta_2) - ab| \\
&< 2c\varepsilon + \varepsilon(|a| + |b|) + \varepsilon^2 < \varepsilon(2c + |a| + |b| + 1) \ .
\end{aligned}$$

Ve druhé nerovnosti jsme odečetli všechny součiny $a_k b_l$ s $k, l \le N$. Tedy

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_k b_l = ab \ .$$

□

Úloha 3.2.24 (zobecnění). *Zobecněte předchozí větu na součin více než dvou absolutně konvergentních řad.*

Úloha 3.2.25 (asociativita implikuje distributivitu). *Odvoďte větu 3.2.23 jako důsledek následující věty.*

Dokážeme asociativní zákon pro sčítání absolutně konvergentních řad.

Věta 3.2.26 (asociativita absolutně konvergentních řad). *Nechť X je spočetná množina,*

$$\sum_{n\in X} a_n$$

je absolutně konvergentní řada a $P = \{X_1, X_2, \dots\}$ je nejvýše spočetný rozklad množiny X na nejvýše spočetné bloky X_i. Pak jsou všechny řady

$$\sum_{n\in X_1} a_n,\ \sum_{n\in X_2} a_n,\ \dots$$

absolutně konvergentní a jejich součty $b_i = \sum_{n\in X_i} a_n$ tvoří absolutně konvergentní řadu se součtem

$$b_1 + b_2 + \dots = \sum_{n\in X} a_n\ .$$

Důkaz. Absolutní konvergence řad $\sum_{n\in X_i} a_n$ plyne z absolutní konvergence řady $\sum_{n\in X} a_n$ podle tvrzení 3.2.22. Součty b_i jsou tedy dobře definovány. Položíme

$$c_i = \sum_{n\in X_i} |a_n|\ .$$

Zřejmě $|b_i| \le c_i < +\infty$. Ukážeme, že $c_1 + c_2 + \dots$ konverguje a tedy $b_1 + b_2 + \dots$ absolutně konverguje. Kdyby $c_1 + c_2 + \dots = +\infty$, pak pro každou konstantu $c > 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ je $c_1 + c_2 + \dots + c_k > 2c$. Pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ pak vezmeme takovou konečnou podmnožinu $Y_i \subset X_i$, že

$$\sum_{n\in Y_i} |a_n| \ge \frac{c_i}{2}$$

a dostaneme

$$\sum_{n\in Y_1\cup\dots\cup Y_k} |a_n| \ge \frac{c_1 + \dots + c_k}{2} > c\ ,$$

v rozporu s absolutní konvergencí řady $\sum_{n\in X} a_n$. Proto $c_1 + c_2 + \dots$ (absolutně) konverguje.

Dokážeme rovnost součtů

$$s := b_1 + b_2 + \dots \ \text{ a }\ t := \sum_{n\in X} a_n\ .$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme takové $k \in \mathbb{N}$, že

$$|s - b_1 - b_2 - \cdots - b_k| < \frac{\varepsilon}{4} \ \text{ a } \ c_{k+1} + c_{k+2} + \cdots < \frac{\varepsilon}{4}\ .$$

Vezmeme libovolnou bijekci $p\colon \mathbb{N} \to X$. Díky absolutní konvergenci řad $\sum_{n\in X_i} a_n$ a $\sum_{n\in X} a_n$ existuje takové $N \in \mathbb{N}$, že

$$\Big|b_i - \sum_{j\le N,\, p(j)\in A_i} a_{p(j)}\Big| < \frac{\varepsilon}{4k},\ i = 1, 2, \ldots, k, \ \text{ a } \ \Big|t - \sum_{j=1}^{N} a_{p(j)}\Big| < \frac{\varepsilon}{4}\ .$$

Pak díky volbám k a N a Δ-ové nerovnosti máme

$$\begin{aligned}
|s - t| &\le |s - b_1 - \cdots - b_k| + \Big|\sum_{i=1}^{k} b_i - \sum_{j=1}^{N} a_{p(j)}\Big| + \Big|\sum_{j=1}^{N} a_{p(j)} - t\Big| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{i=1}^{k}\Big|b_i - \sum_{j\le N,\, p(j)\in A_i} a_{p(j)}\Big| + \Big|\sum_{j\le N,\, p(j)\in A_{k+1}\cup A_{k+2}\cup\ldots} a_{p(j)}\Big| + \frac{\varepsilon}{4} \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + k\frac{\varepsilon}{4k} + (c_{k+1} + c_{k+2} + \ldots) + \frac{\varepsilon}{4} \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Tedy $s = t$. □

Tvrzení 3.2.27 (skoro opačná implikace). *Nechť X a $P = \{X_1, X_2, \ldots\}$ jsou jako v předešlé větě a $\sum_{n\in X} a_n$ je řada. Jsou-li všechny řady*

$$\sum_{n\in X_1} a_n,\ \sum_{n\in X_2} a_n,\ \ldots$$

absolutně konvergentní a řada $c_1 + c_2 + \ldots$, kde $c_i := \sum_{n\in X_i} |a_n|$, absolutně konverguje, potom i celá řada

$$\sum_{n\in X} a_n$$

absolutně konverguje.

Důkaz. Pro libovolnou konečnou množinu $Y \subset X$ je

$$\sum_{n\in Y} |a_n| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n\in Y\cap X_i} |a_n| \le c_1 + c_2 + \cdots < +\infty$$

a $\sum_{n\in X} a_n$ absolutně konverguje podle tvrzení 3.2.22. □

Úloha 3.2.28. *Ukažte, že po vypuštění absolutní hodnoty v definici c_i tvrzení neplatí.*

Uvedeme druhý důkaz nekonečnosti počtu prvočísel pomocí řad, tentokrát pomocí násobení absolutně konvergentních řad.

Důsledek 3.2.29 (nekonečnost počtu prvočísel). *Množina prvočísel je nekonečná.*

Důkaz. Pro spor buď množina prvočísel P konečná. Pak

$$\mathbb{R} \ni \prod_{p\in P} \frac{1}{1-p^{-1}} = \prod_{p\in P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} \geq \sum \frac{1}{n} = +\infty \text{ — spor} .$$

Úvodní náležení do $\mathbb{R}$ je triviální: součin konečně mnoha reálných čísel je reálné číslo. První rovnosti plyne ze vzorce pro součet geometrické řady s kvocientem $\frac{1}{p}$. Klíčová nerovnost plyne z věty 3.2.23 a jejího zobecnění v úloze 3.2.24 a z faktu, že každé přirozené číslo je součinem nějakých prvočísel (roznásobením konečně mnoha řad $1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\dots$ pro $p \in P$ dostaneme každý sčítanec $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$). Druhá rovnost plyne z divergence harmonické řady. $\square$

Úloha 3.2.30. *A proč tedy výše platí ona nerovnost? Podíváme-li se na ni jako na inkluzi $\supset$ mezi řadami (multimnožinami jejich členů), neplatí dokonce jako rovnost řad?*

Lze dokonce dokázat, že řada převrácených hodnot prvočísel diverguje, ale to necháme do oddílu 5.5 o Taylorově rozvoji (důsledek 5.5.9). Nyní uvedeme vztah mezi prvočísly a zeta funkcí od L. Eulera, naznačený už v předchozím důsledku. Pro jeho formulaci však potřebujeme pojem hodnoty *nekonečného součinu.* Pro naše účely ho zavedeme takto. Je-li $(a_n \in \mathbb{R} \mid n \in X)$ posloupnost indexovaná nekonečnou podmnožinou $X \subset \mathbb{N}$, pak definujeme

$$\prod_{n\in X} a_n := \lim_{n\to\infty} \prod_{k\in X,\, k\leq n} a_k .$$

Pak můžeme vyslovit Eulerovu identitu zachycující vztah mezi prvočísly a $\zeta(s)$.

Věta 3.2.31 (Eulerova identita č. 1). *Nechť P je množina prvočísel. Pro každé $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, platí rovnost hodnoty nekonečného součinu a součtu řady*

$$\prod_{p\in P} \frac{1}{1-1/p^s} = \sum \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \in \mathbb{R} .$$

Důkaz. Podle Základní věty aritmetiky v úloze 1.8.2 je vyjádření přirozeného čísla n součinem mocnin různých prvočísel jako $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ jednoznačné. Podle věty 3.2.23 a jejího zobecnění v úloze 3.2.24 tak pro každé $N \in \mathbb{N}$ máme rovnost (reálných čísel)

$$\prod_{p\in P,\, p\leq N} \frac{1}{1-1/p^s} = \prod_{p\in P,\, p\leq N} \left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\dots\right) = \sum_{n\in S(N)} \frac{1}{n^s} ,$$

kde $S(N) = \{n \in \mathbb{N} \mid p \,|\, n \Rightarrow p \le N\}$. Jistě $S(N) \supset \{1, 2, \dots, N\}$. Tedy

$$0 < \sum \frac{1}{n^s} - \prod_{p \in P,\, p \le N} \frac{1}{1 - 1/p^s} \le \sum_{n > N} \frac{1}{n^s} \to 0 \ \text{ pro } \ N \to \infty$$

(zbytek řady $\zeta(s)$ jde k 0) a identita je dokázána. □

3.3 Exponenciála

Kouzlo s řadou. Exponenciála, převádí součet na součin. Reálné sčítání a kladné reálné násobení od sebe nelze rozeznat. Přirozený logaritmus. Tři podoby exponenciály. Číslo e. Poissonovo rozdělení.

$$1 + \frac{(-100)^1}{1!} + \frac{(-100)^2}{2!} + \frac{(-100)^3}{3!} + \cdots = 1 - 100 + 5000 - \frac{500000}{3} + \cdots = ?$$

Z podílového kritéria (část 4 věty 3.1.31) plyne, že řada absolutně konverguje. K jakému součtu? Pro $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ sčítanec $\frac{(-100)^n}{n!}$ prudce osciluje mezi kladnými a zápornými hodnotami, v absolutní hodnotě stále se zvětšujícími. Například pro $n = 10, 11$ je alespoň $\pm 10^{10}$. Největší absolutní hodnotu nabyde pro $n = 100$ a pak, pro $n > 100$, začne $n!$ mocně tlačit $(-100)^n$ na lopatky a sčítanec se rychle zmenšuje k 0.

Úloha 3.3.1. *Ukažte, že maximum v absolutní hodnotě nabývá sčítanec právě pro $n = 100$. Umíte jeho hodnotu nějak odhadnout?*

Nezasvěcenec by si mohl myslet, že tak odlišná čísla a vzdálená od 0 se nemohou nasčítat na něco hezkého, dokonce blízkého nule. Jako kouzlem se to však stane, sčítance se navzájem skoro zruší a vyjde kladné číslo velmi blízké nule.

Důsledek 3.3.2 (kouzlo). *Platí rovnost*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!} = \frac{1}{1 + \frac{100^1}{1!} + \frac{100^2}{2!} + \frac{100^3}{3!} + \dots} \in (0, 10^{-10})\ .$$

Toto kouzlo dokážeme jako důsledek obecnější identity ve větě 3.3.4.

Definice 3.3.3 (exponenciála jako řada). *Exponenciální funkci*

$$e^x,\ \exp(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definujeme pro $x \in \mathbb{R}$ součtem řady

$$e^x = \exp(x) := 1 + \sum \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots\ .$$

Jak jsme už uvedli, pro každé $x \in \mathbb{R}$ řada absolutně konverguje podle podílového kritéria díky

$$\frac{|x^{n+1}/(n+1)!|}{|x^n/n!|} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \ \text{ pro } \ n \to \infty \ ,$$

a exponenciální funkce je tak definovaná na celém $\mathbb{R}$. Patrně $e^0 = 1$, $e^x \geq 1$ pro $x \geq 0$ a e^x je pro $x \geq 0$ rostoucí. Písmeno e ve značení e^x zatím bereme jen jako symbol. Za chvíli ukážeme, že existuje takové reálné číslo $e \in (1, +\infty)$, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí rovnost $e^x = \exp(x)$, přičemž vlevo je reálná mocnina ve smyslu definice 2.3.1. Exponenciálu tak lze zavést i prostřednictvím reálné mocniny. Jak uvidíme, lze také naopak definovat reálnou mocninu pomocí exponenciály. Srovnáme-li druhé identity v tvrzení 2.3.4 a v části 4 věty 2.3.12 s identitou v následující větě, je spřízněnost reálné mocniny a exponenciály zřejmá.

Věta 3.3.4 (exponenciála převádí součet na součin). *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí rovnost*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \ .$$

Důkaz. Spočítáme to a pak kroky výpočtu zastoupené jednotlivými rovnostmi zdůvodníme. Pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ máme:

$$\begin{aligned}
\exp(x)\exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{y^m}{m!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+m=k} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{y^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n y^{k-n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \exp(x+y) \ .
\end{aligned}$$

První rovnost je podle definice exponenciální funkce. V druhé aplikujeme větu 3.2.23 o násobení absolutně konvergentních řad. Ve třetí rovnosti jsme pro sečtení vzniklé řady vzali bijekci mezi $\mathbb{N}_0$ a $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, která začne indexem $(0,0)$, pak projde množinu indexů $\{(1,0), (0,1)\}$, pak množinu indexů $\{(2,0), (1,1), (0,2)\}$ a tak dále, fakticky jsme použili větu 3.2.20. Čtvrtá rovnost je úprava založená na rovnostech $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$ a $m = k - n$. V páté jsme použili konečnou binomickou větu (úloha 1.8.5). Tím jsme se dostali k závěrečné šesté rovnosti, opět definici exponenciální funkce. □

Speciálně

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1 \ \text{ a } \ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \ \text{ pro každé } \ x \in \mathbb{R} \ .$$

Pro $x = 100$ tak dostáváme důsledek 3.3.2. Tudíž $\exp(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $\exp(x)$ je rostoucí funkce na celém $\mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$ (protože pak $\exp(y) = \exp(x)\exp(y-x)$ s $\exp(y-x) > 1$). Dále je jasné, že

$$\lim \exp(n) = +\infty \ \text{ a } \ \lim \exp(-n) = 0 \ .$$

Tvrzení 3.3.5 (spojitost exponenciály). *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ s $|x| \leq \frac{1}{2}$ je*

$$|\exp(x) - 1| \leq 2|x| \ .$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $\delta \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ je

$$|\exp(x+\delta) - \exp(x)| \leq 2|\delta| \exp(x) \ .$$

Důkaz. První odhad plyne ze součtu geometrické řady:

$$|\exp(x) - 1| \leq \sum \frac{|x|^n}{n!} \leq \sum |x|^n = \frac{|x|}{1-|x|} \leq 2|x| \ .$$

Druhý plyne z prvního pomocí věty 3.3.4. □

Tvrzení 3.3.6 (obraz exponenciály). *Obraz funkce* $\exp(x)$ *je* $(0, +\infty)$.

Důkaz. Toto plyne z předchozího tvrzení a tvrzení 1.7.40. □

Exponenciála je tedy bijekce mezi $\mathbb{R}$ a $(0, +\infty)$. Díky tomu má inverzní funkci $\exp^{-1}(x)\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Definice 3.3.7 (přirozený logaritmus). *Funkci (přirozeného) logaritmu*

$$\log(x)\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

definujeme jako inverzní funkci k exponenciále,

$$\log(x) = \log x := \exp^{-1}(x) \ .$$

Díky větě 3.3.4 pro každé reálné $x, y > 0$ platí rovnost

$$\log(xy) = \log x + \log y \ .$$

Z vlastností exponenciály plyne, že $\log(x)$ je na $(0, +\infty)$ rostoucí, $\lim \log n = +\infty$ a $\lim \log(\frac{1}{n}) = -\infty$.

Z věty 3.3.4 plyne, že operace sečtení dvou reálných čísel se nedá algebraicky odlišit od operace vynásobení dvou kladných reálných čísel: příslušné struktury jsou izomorfní, nerozlišitelné, prvky v nich se jen jinak „jmenují“. Těmto algebraickým strukturám se říká *Abelovy grupy.*

Definice 3.3.8 (Abelova grupa). *Abelova grupa $A = (A, *)$ je množina A s komutativní a asociativní binární operací $*$, která má neutrální prvek $e \in A$ (pro každé $a \in A$ je $a * e = a$) a inverzní prvek $a^{-1} \in A$ ke každému prvku $a \in A$ (platí, že $a * a^{-1} = e$).*

Základním příkladem Abelovy grupy jsou celá čísla $(\mathbb{Z}, +)$ s obvyklým sčítáním. Další příklady jsou $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, reálná čísla s obvyklým sčítáním a kladná reálná čísla $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ s obvyklým násobením. Poslední dvě Abelovy grupy jsou ovšem jen různé zápisy grupy jediné.

Důsledek 3.3.9 (sčítání v $\mathbb{R}$ versus násobení v $\mathbb{R}^+$). *Abelovy grupy* $(\mathbb{R},+)$ *a* $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ *jsou izomorfní.*

Důkaz. Zobrazení $\exp\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ je izomorfismus obou grup: je to bijekce, pro každá dvě čísla $x,y\in\mathbb{R}$ podle věty 3.3.4 platí $\exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$ a $\exp(0)=1$. $\square$

Můžeme vzít i všechna nenulová reálná čísla $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ nebo se omezit jen na zlomky ($\mathbb{Q}^+=\mathbb{Q}\cap(0,+\infty)$), pak ale dostaneme neizomorfní grupy.

Úloha 3.3.10. *Dokažte, že Abelovy grupy* $(\mathbb{R},+)$ *a* $(\mathbb{R}^\times,\cdot)$ *nejsou izomorfní. Dokažte, že Abelovy grupy* $(\mathbb{Q},+)$ *a* $(\mathbb{Q}^+,\cdot)$ *nejsou izomorfní.*

Hodnotu exponenciály vyjádříme limitou posloupnosti celistvých mocnin.

Tvrzení 3.3.11 (exponenciála jako limita). *Pro každé* $x\in\mathbb{R}$ *platí rovnost*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\exp(x)\ .$$

Důkaz. Pro $x=0$ rovnost platí. Předpokládáme, že $x>0$ a případ $x<0$ později převedeme na $x>0$. Z $\binom{n}{k}=\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$ máme díky $x>0$ horní odhad

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\underbrace{\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)}_{\in(0,1]}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}<e^x\ .$$

Pro dolní odhad k danému $\varepsilon>0$ vezmeme tak velké $l\in\mathbb{N}$, že $\sum_{k=0}^{l}\frac{x^k}{k!}>e^x(1-\varepsilon)$. Pak vezmeme $n_0>l$, že $n>n_0\Rightarrow\prod_{i=0}^{l-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)>1-\varepsilon$. Pro $n>n_0$ pak máme, díky kladnosti x,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n>\sum_{k=0}^{l}\frac{x^k}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)>\sum_{k=0}^{l}\frac{x^k}{k!}(1-\varepsilon)>e^x(1-\varepsilon)^2>e^x(1-2\varepsilon)\ .$$

Tedy $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$. Ukážeme, že pro $x>0$ i $\lim\frac{1}{(1-x/n)^n}=e^x$. Z aritmetiky limit a věty 3.3.4 odtud plyne $\lim\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=e^{-x}$, což dokazuje rovnost i pro $x<0$. Protože $\frac{1}{1-x/n}=1+\frac{x}{n-x}$, stačí dokázat, že $\lim\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^n=e^x$. Nechť $r\in\mathbb{N}$, $r>x$, je pevné. Pak ($x>0$ a $n\to\infty$)

$$e^x\leftarrow\left(1+\frac{x}{n}\right)^n<\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^n<\left(1+\frac{x}{n-r}\right)^{n-r}\left(1+\frac{x}{n-r}\right)^r\to e^x\cdot 1\ .$$

Podle tvrzení 2.1.28, $\lim\frac{1}{(1-x/n)^n}=\lim\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^n=e^x$. $\square$

Hodnotu exponenciály vyjádříme jako hodnotu reálné mocniny.

Tvrzení 3.3.12 (exponenciála jako mocnina). *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí rovnost*

$$\left(1 + \sum \frac{1}{n!}\right)^x = \exp(x)\ .$$

Důkaz. Z věty 3.3.4 plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ je $\exp(x)^{p/q} = \exp(\frac{p}{q}x)$. Protože základ mocniny $1 + \sum 1/n! = \exp(1)$, uvedená rovnost platí pro každé racionální x. Obecné $x \in \mathbb{R}$ napíšeme jako limitu zlomků $\lim a_n = x$, $(a_n) \subset \mathbb{Q}$, a pro každé a_n vezmeme rovnost $\exp(1)^{a_n} = \exp(a_n)$. Pro $n \to \infty$ pak levá strana jde, podle definice mocniny, k $\exp(1)^x$. Pravá strana jde, podle odhadu v tvrzení 3.3.5, k $\exp(x)$. □

Pro exponenciálu tak máme tři různá vyjádření pomocí limit.

Důsledek 3.3.13 (tři podoby exponenciály). *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí rovnosti*

$$\exp(x) = 1 + \sum \frac{x^n}{n!} = \left(1 + \sum \frac{1}{n!}\right)^x = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\ .$$

Další vyjádření exponenciály uvádíme v závěrečných poznámkách.

Definice 3.3.14 (Eulerovo číslo e). *Hodnota*

$$\exp(1) = 1 + \sum \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.718281828459045\ldots$$

se označuje jako Eulerovo číslo e.

Úloha 3.3.15. *Dokažte, že číslo e je iracionální. Návod: pro každé $a \in \mathbb{N}$ existují $b, c \in \mathbb{N}$, že $0 < be - c < 1/a$ (tedy $ae \notin \mathbb{N}$).*

Nyní naopak každou reálnou mocninu zapíšeme jako hodnotu exponenciály.

Tvrzení 3.3.16 (mocnina jako exponenciála). *Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, platí rovnost*

$$a^b = \exp(b \log a)\ .$$

Důkaz. Z předešlého důkazu a definice logaritmu víme, že tato rovnost platí pro racionální b. Obecné $b \in \mathbb{R}$ napíšeme jako limitu zlomků a limitním přechodem podle definice mocniny a pomocí tvrzení 3.3.5 dostaneme platnost rovnosti pro reálné b. □

Exponenciála jako limita vystupuje v tak zvaném *Poissonově rozdělení pravděpodobnosti.* Představme si trojrozměrnou krychličku (nádobu) $K = [0, 1]^3$ s jednotkovým objemem, v níž se všemi směry pohybuje $N \approx 10^{20}$ částic. (Částice mají třeba všechny tutéž rychlost, vzájemně se nesrážejí a od stěn K se odrážejí dovnitř K pružnými srážkami, ale to teď není podstatné.) Předpokládáme, že se částice pohybují náhodně: je-li $L \subset K$ jakákoli podkrychlička s objemem vol(L) (nebo i obecnější množina s definovaným objemem), pak každou z částic nalezneme v L s pravděpodobností $\frac{\mathrm{vol}(L)}{\mathrm{vol}(K)} = \mathrm{vol}(L)$. Vybereme-li si totiž libovolnou částici a pozorujeme-li její pohyb v K po časový interval $[0, t]$, pak — označíme-li si dobu, kdy se částice nalézá v L, jako t_L — pro $t \to +\infty$ máme $\frac{t_L}{t} \to \mathrm{vol}(L)$. Dále předpokládáme, že výskyty částic v L jsou na sobě vzájemně nezávislé (pravděpodobnosti nezávislých jevů se násobí). Pro $k \in \mathbb{N}_0$, s jakou pravděpodobností nalezneme v malé podkrychličce L s objemem úměrným $\frac{1}{N}$ právě k částic?

Tvrzení 3.3.17 (Poissonovo rozdělení). *Nechť $\lambda > 0$ je pevné, $L \subset K$ je podkrychlička s objemem λ/N, kde $N \in \mathbb{N}$ je počet částic, a $k \in \mathbb{N}_0$. Pak, ve výše popsané situaci,*

$$\lim_{N \to \infty} \Pr(\textit{v } L \textit{ je } k \textit{ částic}) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\ .$$

Důkaz. Přesně totiž máme

$$\Pr(\text{v } L \text{ je } k \text{ částic}) = \binom{N}{k} \cdot (\lambda/N)^k \cdot (1 - \lambda/N)^{N-k}$$

— binomický koeficient počítá možnosti výběru neuspořádané k-tice ze všech N částic, druhý činitel počítá pravděpodobnost, že tato k-tice je v L, a třetí pravděpodobnost, že z ostatních $N - k$ částic žádná není v L; využili jsme tu podstatně nezávislost jevů (že daná částice padne do L) a také to, že pravděpodobnost sjednocení disjunktních jevů je součtem jejich pravděpodobností. Což se rovná

$$\frac{N(N-1)\dots(N-k+1)}{N^k} \cdot (1 - \lambda/N)^{-k} \cdot (1 - \lambda/N)^N \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\ .$$

Lehce se vidí, že pro $N \to \infty$ první dva činitele jdou k 1. Třetí činitel jde podle tvrzení 3.3.11 k $e^{-\lambda}$. Dostáváme tak uvedenou limitu. □

Úloha 3.3.18. *Zkontrolujte, že pro k probíhající $\mathbb{N}_0$ se právě spočtené pravděpodobnosti sečtou na 1, jak by to správně mělo být.*

Úloha 3.3.19. *S jakou pravděpodobností v % se v podkrychličce s objemem $1/N$ pro velké N nenalézá žádná částice?*

Diskrétní náhodná veličina X s hodnotami v $\mathbb{N}_0$ má *Poissonovo rozdělení (s parametrem $\lambda > 0$)*, když pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ je $\Pr(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Tvrzení 3.3.17 uvádí příklad situace vedoucí na takovou náhodnou veličinu. Toto rozdělení pravděpodobnosti je nazváno podle francouzského matematika, inženýra a fyzika *Siméona D. Poissona (1781–1840)* (zabýval se elektřinou a magnetismem, také nebeskou mechanikou, pozoruhodný je jeho sumační vzorec z teorie řad, jenž zmiňujeme v poznámkách).

3.4 Kosinus a sinus

Další kouzlo s řadou. Hodiny, co jdou pozpátku. Rovina je orientovaná plocha. Délka oblouku kružnice. Číslo π. *Přesná geometrická definice kosinu a sinu. Definice řadou, důkaz později. Kosinus a sinus v lehké atletice. Eulerova identita č. 2. Problém osamělého běžec. Věta o třech mezerách.*

Pro $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040} + \cdots = ?$$

Podle podílového kritéria (část 4 věty 3.1.31) řada pro každé t absolutně konverguje a určuje tak nějakou funkci z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Jakou?

Důsledek 3.4.1 (další kouzlo). *Pro každé* $t \in \mathbb{R}$ *součet*

$$\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots \in [-1, 1]$$

a je to y*-ová souřadnice toho bodu na jednotkové kružnici*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} ,$$

v němž skončí úsečka délky $|t|$*, když ji zachytíme jedním koncem v* $(1, 0)$ *a navineme na* C*, pro* $t > 0$ *proti směru hodinek a pro* $t < 0$ *v jejich směru. Nahradíme-li posloupnost* $(1, 3, 5, \dots)$ *v exponentech a jmenovatelích posloupností* $(0, 2, 4, \dots)$*, dostaneme řadu se součtem rovným* x*-ové souřadnici uvedeného bodu. Funkce definovaná první řadou se nazývá sinus a druhou kosinus.*

Že $t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots \in \mathbb{R}$ dává funkci periodicky oscilující nekonečněkrát od -1 do 1 je opravdové kouzlo. S konečným polynomem $a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ se něco takového nikdy nepodaří: jako funkce je buď konstantní nebo na obou koncích $\pm\infty$ ubíhá do nekonečna.

Kosinus a sinus zavedeme geometricky a odvodíme jejich vztah s exponenciálou. Vyjádření nekonečnými řadami dokážeme až později pomocí derivací ve větě 5.5.10.

Definice 3.4.2 (sinus a kosinus neformálně). *Nechť* $t \in \mathbb{R}$. *Hodnoty funkcí kosinus a sinus jsou souřadnice*

$$(\cos t, \sin t) = P \in C$$

koncového bodu P *orientovaného oblouku na jednotkové kružnici* C. *Oblouk má délku* $|t|$*, začíná v bodě* $(1, 0)$*, běží proti směru hodinových ručiček pro* $t > 0$*, v jejich směru pro* $t < 0$ *a pro* $t = 0$ *se rovná bodu* $(1, 0)$.

Jde o neformální definici, protože jsme zatím přesně neřekli, co je to oblouk na C a jak je definovaná jeho délka. Další potíží je i určení směru „hodinovými ručičkami“ — co to přesně znamená a jak se to řekne v matematičtině? Navíc, všechny neběží stejným směrem.

Úloha 3.4.3. *Kde v Praze najdeme hodiny s ručičkami běžícími proti směru hodinových ručiček?*

Směr otáčení v rovině se matematicky definuje následovně.

Definice 3.4.4 (orientace trojic v rovině). *Nechť*

$$A = (a_1, a_2),\ B = (b_1, b_2),\ C = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

jsou tři různé nekolineární body v rovině,

$$(a, b) := B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \ \text{ a } \ (c, d) := C - A = (c_1 - a_1, c_2 - a_2)\ .$$

Řekneme, že trojice (A, B, C) je orientovaná kladně (proti směru hodinových ručiček), pokud

$$ad - bc > 0\ .$$

Pokud $ad - bc < 0$, je trojice (A, B, C) orientovaná záporně (ve směru hodinových ručiček).

Úsečka AB se tedy do úsečky AC otáčí kolem A podle znaménka výrazu $ad-bc$, v prvním případě proti směru a ve druhém po směru hodinových ručiček.

Úloha 3.4.5. *Nemůže se stát, že $ad - bc = 0$?*

Ještě dvě úlohy o vlastnostech právě definované orientace rovinných trojic.

Úloha 3.4.6. *Nechť $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je volný rovinný pohyb, tedy posunutí složené s otočením kolem nějakého středu, a $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ jsou tři různé nekolineární body. Potom trojice*

$$(A, B, C) \ \text{ a } \ (F(A), F(B), F(C))$$

mají vždy stejnou orientaci.

Přemísťováním trojúhelníku v rovině tedy není možné změnit jeho orientaci. Totéž platí, když ho přemísťujeme po povrchu koule nebo toru. Na jiné ploše to ale možné je.

Úloha 3.4.7. *Na které ploše je možné přemístit kladný trojúhelník do záporného?*

Ale teď zpět k obloukům a jejich délkám a k sinu a kosinu.

Definice 3.4.8 (polorovina a oblouk). *Polorovina $H \subset \mathbb{R}^2$ s hraniční přímkou ℓ je množina bodů roviny ležících na ℓ a na téže straně od ℓ. Oblouk (jednotkové kružnice C) je každá množina O splňující*

$$(C \cap H) \backslash (\ell \cap C) \subset O \subset C \cap H\ ,$$

kde H je nějaká polorovina s hraniční přímkou ℓ. Oblouky jsou tedy průniky polorovin a C, zmenšené případně o jeden či oba průsečíky C a hraniční přímky.

Úloha 3.4.9. *Definujte přesně „na téže straně od“.*

Úloha 3.4.10. *Popište jednotlivé typy oblouků.*

Jiná ekvivalentní definice oblouků říká, že to jsou právě souvislé podmnožiny C. Do přesné definice souvislosti se nebudeme pouštět, ale intuitivně znamená, že se daná množina nerozpadá na dvě neprázdné oddělené části.

Průměr $d(O)$ oblouku $O \subset C$ je supremum

$$d(O) = \sup_{A,B \in O} |AB| \ ,$$

kde $|AB|$ je délka úsečky AB spojující body $A = (a,b), B = (c,d) \in \mathbb{R}^2$:

$$|AB| := \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \ .$$

Pro *malý oblouk O* — ne větší než polovina C, tedy vnitřek poloroviny H určující O neobsahuje počátek — se $d(O)$ patrně rovná vzdálenosti konců O.

Definice 3.4.11 (délka oblouku). *Délku $|O| \in [0,+\infty)$ oblouku $O \subset C$ definujeme jako supremum*

$$|O| := \sup_P d(P) := \sup_{P=\{O_1,O_2,\dots,O_k\}} \sum_{i=1}^{k} d(O_i) \ ,$$

kde $P = \{O_1, O_2, \dots, O_k\}$ probíhá konečné rozklady oblouku O na oblouky O_i.

Jinými slovy, $|O|$ je supremum délek lomených čar vepsaných do O, které spojují konce O a jejichž body zlomu běží po O jedním směrem. V následujících čtyřech úlohách uvádíme některé důležité vlastnosti obloukové délky.

Úloha 3.4.12 (o obloukové délce). *O, O' a O_i buďte oblouky. Dokažte, že funkce délky oblouku $|O|$ má následující vlastnosti.*

1. *Vždy $0 \le |O| < +\infty$, prázdný a jednobodový O mají $|O| = 0$ a $O \subset O'$ implikuje $|O| \le |O'|$. Má-li O více než jeden bod, pak $|O| > 0$.*
2. *Je-li $O = O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_k$ konečný rozklad oblouku na oblouky, pak $|O| = |O_1| + |O_2| + \dots + |O_k|$.*
3. *Otočení zachovávají oblouky a nemění jejich délky: pro každou rotaci $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kolem počátku je $F(O)$ oblouk a $|O| = |F(O)|$.*

Úloha 3.4.13. *Jak se v lineární algebře definuje rotace roviny kolem počátku?*

I přes naši dosti omezující definici podmnožin C — oblouků — s definovanou délkou je možné vytvářet jejich nekonečné rozklady.

Úloha 3.4.14. *Je-li* $O = O_1 \cup O_2 \cup \ldots$ *spočetný rozklad oblouku na oblouky, pak*

$$|O| = \sum |O_n| \ .$$

Srovnejte vlastnosti délky oblouků popsané v úlohách 3.4.12 a 3.4.14 s důsledkem 1.3.10.

Úloha 3.4.15. *Pro malý oblouk* $O \subset C$ *určený polorovinou* H *s hraniční přímkou* ℓ *jako* h *označíme jeho výšku:* $h = 1 - |AB|$*, kde* $A = (0, 0)$ *a* B *je střed úsečky* DE *určené body* $\{D, E\} = \ell \cap C$*. Dokažte, že*

$$|DE| < |O| < |DE| + 2h \ .$$

Tento odhad použijeme později v tvrzení 5.1.37 pro nalezení derivace kosinu a sinu. Teď ale zavedeme základní konstantu matematické analýzy.

Definice 3.4.16 (horní polokružnice a číslo π). *Oblouk*

$$C/2 := \{(x, y) \in C \mid y \geq 0\}$$

nazveme horní polokružnicí jednotkové kružnice. Definujeme

$$\pi := |C/2| = 3.14159\ldots$$

jako její délku. Číslu π *se někdy říká Ludolphovo číslo. Obvod celé* C *tak je* $|C| = 2\pi$*. Explicitně,*

$$\pi = \sup_{-1=a_0<a_1<\cdots<a_k=1} \sum_{i=1}^{k} \sqrt{(a_i - a_{i-1})^2 + (b_i - b_{i-1})^2}, \quad \text{kde } b_i = \sqrt{1 - a_i^2}$$

a supremum se bere přes všechna dělení intervalu $[-1, 1]$*. Body* $(a_i, b_i) \in C/2$*,* $i = 0, 1, \ldots, k$*, jsou body zlomu lomené čáry vepsané do* $C/2$ *a spojující její konce* $(-1, 0)$ *a* $(1, 0)$*. Číslo* π *je tak supremum délek těchto lomených čar.*

Úloha 3.4.17. *Dokažte, že*

$$2.828\cdots = 2\sqrt{2} < \pi < 2(2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 3.364\ldots \ .$$

Úloha 3.4.18. *Spočítejte podle neformální definice* $\cos(-3\pi/4)$ *a* $\sin(-3\pi/4)$*.*

Pro $t \in \mathbb{R}$ definujeme $t \bmod 2\pi \in [0, 2\pi)$ jako $t - k \cdot 2\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je největší číslo s $t - k \cdot 2\pi \geq 0$.

Tvrzení 3.4.19 (bod P). *Pro každé* $t \in \mathbb{R}$ *existuje právě jeden bod* $P_t \in C$ *na jednotkové kružnici, že délka oblouku* $O_{P_t} \subset C$ *ležícího nad přímkou procházející body* $(1, 0)$ *a* P_t *a na ní (tedy oblouku jdoucího kladným směrem z* $(1, 0)$ *do* P_t*) splňuje*

$$|O_{P_t}| = t \bmod 2\pi.$$

Důkaz. Pro t mod $2\pi = 0$ je $P_t = (1, 0)$. Funkce $f\colon [-1,1] \to [0,\pi]$, $f(x) = |O_{(x,\sqrt{1-x^2})}|$ je klesající a spojitá, jak se lehce ukáže z definice délky oblouku, takže pro $0 \le t$ mod $2\pi \le \pi$ plyne existence a jednoznačnost bodu P_t z tvrzení 1.7.40. Pro $\pi < t$ mod $2\pi < 2\pi$ použijeme podobnou funkci, kdy $\sqrt{1-x^2}$ nahradíme $-\sqrt{1-x^2}$. □

Teď je vše připraveno pro přesnou definici funkcí kosinus a sinus.

Definice 3.4.20 (kosinus a sinus geometricky). *Hodnoty funkcí*

$$\cos, \sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

definujeme pro $t \in \mathbb{R}$ jako souřadnice bodu

$$P_t = (\cos t, \sin t) \in C$$

garantovaného tvrzením 3.4.19.

Rovnou připomeneme další funkce odvozené od sinu a kosinu.

Definice 3.4.21 (tangens a inverzy). *Funkce tangens je definovaná jako*

$$\tan\colon \mathbb{R}\backslash\{(k+1/2)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\ .$$

Nechť $\sin_0(x)$ je sinus zúžený na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos_0(x)$ kosinus na $[0, \pi]$ a $\tan_0(x)$ tangens na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. První a třetí funkce jsou rostoucí a druhá klesající (viz následující důsledek), můžeme tak k nim definovat inverzní funkce arkus sinus, arkus kosinus a arkus tangens jako

$$\arcsin = \sin_0^{-1}\colon [-1,\ 1] \to [-\pi/2,\ \pi/2],\ \arccos = \cos_0^{-1}\colon [-1,\ 1] \to [0,\ \pi]$$

a

$$\arctan = \tan_0^{-1}\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2,\ \pi/2)\ .$$

Tři poslední inverzní funkce jsou bijekce mezi uvedenými intervaly.

Z geometrické definice plyne řada obecně známých vlastností kosinu a sinu.

Důsledek 3.4.22 (vlastnosti sinu a kosinu). *Funkce $\sin t, \cos t\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ mají následující vlastnosti.*

1. *Jsou spojité a periodické s periodou 2π.*
2. *Pro každé $t \in \mathbb{R}$ je $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.*
3. *Pro každé $t \in \mathbb{R}$ je $\cos t = \sin(t + \pi/2)$.*
4. *Na $[0, \frac{\pi}{2}]$ sinus roste od 0 do 1, na $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ klesá od 1 do 0 a na $[0, \frac{\pi}{2}]$ je $\sin t = \sin(\pi - t)$. Na $[\pi, 2\pi]$ je $\sin t = -\sin(t - \pi)$. Průběh kosinu dostaneme posunem sinu podle 3.*

5. *Pro každé $t \in \mathbb{R}$ je $\cos t = \cos(-t)$ a $\sin t = -\sin(-t)$.*

6. *Nulové body obou funkcí jsou $\{t \in \mathbb{R} \mid \sin t = 0\} = \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ a $\{t \in \mathbb{R} \mid \cos t = 0\} = \{\pi \frac{2n-1}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$.*

Důkaz. 1 — spojitost jsme již použili a plyne z definice délky oblouku, konkrétněji pomocí odhadu v úloze 3.4.15. Periodicita je jasná. Mohlo by se zdát, že část 2 plyne z Pythagorovy věty, ale není to tak, plyne to čistě z definice jednotkové kružnice C. Část 3 je jasná, rotace o $\pi/2$ kolem počátku vyměňuje souřadnice. Části 4 a 5 jsou také jasné z geometrické definice. Část 6 plyne ze čtvrté části. □

Pythagoras ze Samu (asi −570 až asi −510) byl legendární řecký matematik, filozof, astronom a kněz (připisuje se mu po něm nazvaná matematická věta z geometrie a zavedení pojmu *filosofie*).

Krásné propojení geometrie a analýzy nekonečnými řadami pro kosinus a sinus, které jsme uvedli v důsledku 3.4.1, teď zopakujeme ve větě. Dokážeme ji, až se naučíme derivovat (věta 5.5.10).

Věta 3.4.23 (sinus a kosinus analyticky). *Pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí rovnosti*

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

a

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots .$$

Geometrickou a analytickou tvář kosinu a sinu nahlédneme ještě jednou z trochu jiného úhlu.

Důsledek 3.4.24 (sinus a kosinus lehkoatleticky). *Vystartuje-li běžkyně z bodu $(1, 0)$ a běží-li po jednotkové kružnici C konstantní jednotkovou rychlostí proti směru hodinek, jak se běhává, pak se v čase $t > 0$ nachází v bodu dráhy s kartézskými souřadnicemi*

$$\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots,\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots\right) .$$

Řady kosinu a sinu vypadají, až na znaménka, jako sudá a lichá polovina řady pro exponenciálu. Souvislost s exponenciálou se jasně vyjeví v oboru komplexních čísel. Vydejme se proto do $\mathbb{C}$.

Věta 3.4.25 (Eulerova identita č. 2). *Nechť $i = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí v oboru $\mathbb{C}$ rovnost*

$$\exp(it) = \cos t + i \sin t \in \mathbb{C} .$$

Zde jsme definici 3.3.3 exponenciály řadou rozšířili z $\mathbb{R}$ *na* $\mathbb{C}$. *Geometricky identita říká, že číslo*

$$\exp(it) = 1 + \sum \frac{(it)^n}{n!} \in \mathbb{C}$$

leží na jednotkové kružnici v komplexní rovině a má reálnou část $\cos t$ *a imaginární* $\sin t$.

Důkaz. Máme

$$\begin{aligned}
\exp(it) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{n \in 2\mathbb{N}_0} \frac{i^n t^n}{n!} + \sum_{n \in (2\mathbb{N}_0+1)} \frac{i^n t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos t + i \sin t \,.
\end{aligned}$$

V první rovnosti řada absolutně konverguje podle zobecnění podílového kritéria na řady s komplexními sčítanci. Druhá rovnost řady lineárně kombinuje a třetí využívá, že se hodnoty $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$ a tak dále opakují s periodou 4. Poslední rovnost používá zatím nedokázanou větu 3.4.23. $\square$

Úloha 3.4.26 (sinus a kosinus exponenciálou). *Pro* $t \in \mathbb{R}$ *vyjádřete* $\sin t$ *a* $\cos t$ *pomocí komplexní exponenciály.*

Úloha 3.4.27 (sinus a kosinus komplexního čísla). $\sin i = ?$ *a* $\cos i = ?$

Běhání po oválech a kružnicích přivedlo matematiky vedle důsledku 3.4.24 (a tzv. paradoxu běžkyně, o němž bude řeč později) i k následujícímu stále nevyřešenému problému.

Problém 3.4.28 (osamělého běžce (lonely runner conjecture)). *Z bodu* $(1, 0)$ *na jednotkové kružnici* C *vyběhne* $n \in \mathbb{N}$ *běžců. Běží po* C *proti směru hodinek konstantními a kladnými a vzájemně různými rychlostmi. Dokažte, že každý běžec bude někdy „osamělý“, v nějakém čase* $t > 0$ *bude mít od každého z ostatních* $n - 1$ *běžců obloukovou vzdálenost alespoň* $2\pi/n$.

Bylo to dokázáno pro každé $n \leq 7$.

Úloha 3.4.29. *Vyřešte problém osamělého běžce pro tři běžce.*

Závěrem oddílu ještě jeden krásný výsledek, na který lze přijít při pobíhání po kružnici nebo po oválu. Naše běžkyně teď na oválu běhá „úseky“. Dostala reálné číslo $\alpha > 0$ a křídu. Vystartuje a uběhne úsek délky α, udělá na oválu značku křídou, znovu uběhne (stejným směrem) úsek délky α, opět udělá na oválu značku, a tak trénuje dál, uběhne řekněme $n \in \mathbb{N}$ úseků délky α a po každém udělá na oválu značku křídou. Co se dá říci o vzdálenostech mezi sousedními značkami? Jak je dobře známo a jak není těžké dokázat, není-li α racionální násobek délky obvodu oválu (obvykle 400 metrů), značky se neopakují a pro $n \to \infty$ vyplní ovál hustě, jakýkoli oblouk oválu, jakkoli krátký, bude obsahovat značku. Kdo by ale proto hádal, že vzdálenosti mezi sousedními značkami se chovají chaoticky a náhodně, hádal by špatně. Ve skutečnosti mají vždy (pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$) jen nejvýše tři různé hodnoty. Jako domněnku to uvedl polský matematik *Hugo Steinhaus (1887–1972)* (působil na Lvovské univerzitě, v období německé okupace této části Polska v letech 1941–45 se skrýval v ilegalitě poblíž Zámostí a Berdechówa, byl spoluzakladatelem rigorózní teorie pravděpodobnosti, pokusil se, před A. Kolmogorovem, o její axiomatizaci) a v r. 1958 to nezávisle dokázali (i publikovali) maďarská matematička, maďarský matematik a polský matematik, které uvádíme níže. Výsledku se logicky říká *Věta o třech mezerách.*

Věta 3.4.30 (Sós–Surányi–Świerczkowski, 1958). *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a*

$$Z = \{\{k\alpha\} \mid k = 1, 2, \ldots, n\} = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_m\},\ 0 \le a_1 < a_m < 1\ ,$$

jsou seřazené značky a_i na oválu (ovál má obvod s délkou 1 a $\{k\alpha\} \in [0, 1)$ je zlomková část $k\alpha$, k-tá značka). Potom mají mezery mezi značkami vždy jen nejvýše tři různé délky:

$$|M| := |\{a_{i+1} - a_i \mid i = 1, 2, \ldots, m-1\} \cup \{1 - a_m + a_1\}| \le 3\ .$$

Důkaz. Pro $\alpha = 0$ to platí, pak $Z = \{0\}$ a $M = \{1\}$. Také vždy $\{k\{\alpha\}\} = \{k\alpha\}$ a můžeme tedy předpokládat, že $\alpha \in (0, 1)$. Na množině vrcholů

$$V = \{(a_i,\, a_{i+1}) \mid i = 1, 2, \ldots, m-1\} \cup \{(a_m,\, a_1)\} \subset Z \times Z$$

definujeme orientovaný graf $G = (V, E)$ s hranami $E \subset V \times V$ takto ($u, v \in V$):

$$(u,\, v) \in E \iff u + \alpha = v\ ,$$

přičemž

$$u + \alpha = (x,\, y) + \alpha = (\{x + \alpha\},\, \{y + \alpha\})$$

(posun α se přičítá modulo 1). Jinak řečeno, z mezery $u \in V$ uděláme šipku do mezery $v \in V$, právě když u posunem o α přejde ve v. I tento G má jistou šipkovou vlastnost (jako graf v důkazu věty 1.4.18): z každého vrcholu ve V vychází nejvýše jedna šipka a do každého také nejvýše jedna vchází. Komponenty takového grafu jsou orientované cykly a orientované cesty (úloha 3.4.31). Všechny mezery (vrcholy) v jedné komponentě mají zřejmě stejnou délku (liší se jen posunem). Zbývá tak jen dokázat, že G má nejvýše tři komponenty.

Jeden případ nastává, je-li některá z komponent grafu G orientovaný cyklus C. Hned uvidíme, že pak se celý G rovná C a tedy $|M| = 1$. Nechť mezera $u = (x, y) \in V$ leží v cyklu C délky $l \in \mathbb{N}$. Posunem o α opakovaným l krát se u převede v sebe: $x + l\alpha = x$ modulo 1. Tedy $l\alpha \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{Q}$. Nechť $\alpha = \frac{a}{b}$ s nesoudělnými $a, b \in \mathbb{N}$. Tedy je l násobek čísla b a množina x-ových souřadnic vrcholů v C se rovná $B := \{\frac{0}{b}, \frac{1}{b}, \dots, \frac{b-1}{b}\}$ (úloha 3.4.32) a totéž platí pro y-ové souřadnice. Ovšem $Z \subset B$, takže $Z = B$ a $C = G$.

Ve zbývajícím případě jsou všechny komponenty grafu G orientované cesty a $a_1 > 0$ ($a_1 = 0$ dává úvahou podobnou předchozí, že $G = C$ je cyklus). Jejich počet je stejný jako počet *stoků*, vrcholů, z nichž nevychází žádná šipka (v nich cesty končí). Kdy je vrchol (mezera) $u = (x, y) \in V \subset Z \times Z$ stok? Právě když

$$u + \alpha \notin Z \times Z \ \text{ anebo } \ u + \alpha \in (Z \times Z) \backslash V \, .$$

V první klauzuli disjunkce $\{x + \alpha\} \notin Z$ nebo $\{y + \alpha\} \notin Z$. Tedy $x = \{n\alpha\}$ nebo $y = \{n\alpha\}$. Ve druhé klauzuli disjunkce uvnitř posunuté mezery $(x, y) + \alpha$ leží značka $p \in Z$. Před posunem v mezeře (x, y) ovšem neležela, takže $\{p - \alpha\} \notin Z$ a nutně $p = \{1\alpha\} = \alpha$. Před posunem mezera (x, y) přecházela přes $0 = 1$ a $(x, y) = (a_m, a_1)$. Je-li $u = (x, y)$ stok, je $x = \{n\alpha\}$ nebo $y = \{n\alpha\}$ nebo $(x, y) = (a_m, a_1)$. Existují tedy nejvýše tři stoky, G má nejvýše tři komponenty a $|M| \leq 3$. □

Úloha 3.4.31. *Dokažte, že v konečném orientovaném grafu, v němž do každého vrcholu vede nejvýše jedna šipka a z každého také nejvýše jedna vychází, jsou komponenty pouze orientované cykly a orientované cesty.*

Úloha 3.4.32. *Dokažte, že když $a, b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}_0$, a, b jsou nesoudělná čísla a $l \in \mathbb{N}$, $l \geq b$, pak*

$$a + c,\ 2a + c,\ \dots,\ la + c \, ,$$

redukovány modulo b do $\{0, 1, \dots, b-1\}$, dávají celou množinu $\{0, 1, \dots, b-1\}$.

3.5 Basilejský problém

Elementární důkaz rovnosti $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Kotangens a převrácené čtverce. Trigonometrická identita pro kotangens. Jeden z Viètových vztahů. Hardyho „důkaz“ Eulerova vzorce.

V oddílu 1.1 jsme se setkali se součty nekonečných řad

$$\sum \frac{1}{n^2 + n} = 1 \ \text{ a } \ \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \, .$$

První rovnost plyne hned z „dalekohledového“ (anglicky *telescoping*) vyjádření $\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Úloha 3.5.1. *Proč „dalekohledové“?*

Důkaz druhé je mnohem těžší a je předmětem tohoto oddílu. Hlavní roli v něm sehraje nepříliš známá trigonometrická funkce kotangens, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Úloha 3.5.2. *A co jsou trigonometrické funkce sekans a kosekans?*

Využijeme tři pomocná tvrzení.

Tvrzení 3.5.3 (převrácené čtverce a kotangens). *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti*

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right) < \frac{\pi^2 n}{(2n+1)^2} \ .$$

Důkaz. Pro každé $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ je $\sin\theta < \theta < \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (úloha 3.5.4), a tak

$$\cot^2\theta = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta \ .$$

Vezmeme hodnoty $\theta = \frac{\pi k}{2n+1}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, sečteme n odpovídajících nerovností, výsledek vynásobíme $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$ a výraz obsahující součet čtverců kotangent přesuneme na druhou stranu. Dostaneme uvedené nerovnosti. □

Úloha 3.5.4. *Pro $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ dokažte nerovnosti $\sin\theta < \theta < \tan\theta$.*

Tvrzení 3.5.5 (trigonometrická identita). *Nechť $n \in \mathbb{N}$, číslo $\theta \in \mathbb{R}$ není celistvý násobek π a*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2n-2k} x^{n-k} \in \mathbb{Z}[x]$$

je celočíselný polynom stupně n. Potom

$$\frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}\theta} = P(\cot^2\theta) \ .$$

Kořeny polynomu $P(x)$ jsou tedy právě čísla $\cot^2(\frac{\pi k}{2n+1})$, $1 \le k \le n$.

Důkaz. Použijeme exponenciálu v komplexním oboru (tedy větu 3.3.4, již jsme dokázali jen pro reálné argumenty, důkaz v komplexním oboru je ale skoro stejný) a Eulerovu identitu č. 2 (větu 3.4.25). Tedy

$$\cos((2n+1)\theta) + i\sin((2n+1)\theta) = e^{(2n+1)\theta i} = \left(e^{\theta i}\right)^{2n+1} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{2n+1}$$

a pomocí konečné binomické věty (úloha 1.8.5) porovnáním imaginárních částí na obou stranách dostáváme

$$\sin((2n+1)\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k \cos^{2(n-k)}\theta \cdot \sin^{2k+1}\theta \ .$$

Dělíme $\sin^{2n+1}\theta$ a máme uvedenou identitu. Pro n čísel $\theta = \frac{\pi k}{2n+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, se sinus v čitateli zlomku vynuluje (část 6 tvrzení 3.4.22) a jiné kořeny $P(x)$ nemá (úloha 1.8.13). $\square$

Pro následující identitu, dobře známou z algebry, si připomeneme, že $\alpha \in \mathbb{C}$ je *kořenem* polynomu $p \in \mathbb{C}[x]$ s komplexními koeficienty, když platí kterákoli strana ekvivalence

$$p(\alpha) = 0 \iff \exists\, q \in \mathbb{C}[x] :\ p(x) = (x - \alpha)q(x)$$

(viz úloha 1.8.13 a její řešení), a že α je k-násobným kořenem polynomu $p(x)$, $k \in \mathbb{N}_0$, pokud

$$p(x) = (x - \alpha)^k q(x),\ q \in \mathbb{C}[x] \ \text{ a } \ q(\alpha) \neq 0\ .$$

Tvrzení 3.5.6 (jeden z Viètových vztahů). *Nechť*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

je polynom s komplexními koeficienty a_i, stupněm n (tedy $a_n \neq 0$) a kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, uvedenými s násobnostmi (k-násobný kořen se opakuje k krát). Pak

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}\ .$$

Důkaz. Podle definice kořene máme faktorizaci na kořenové činitele

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 &= a_n \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i) \\ &= a_n x^n - a_n x^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \ldots \end{aligned}$$

a porovnání koeficientů u x^{n-1} na obou stranách dává uvedenou identitu. $\square$

Na vztahy mezi kořeny polynomu a jeho koeficienty přišel francouzský matematik, právník a poradce králů Jindřicha III a Jindřicha IV *François Viète (1540–1603)* (jako jeden z prvních zavedl užití písmen jako parametrů v rovnicích a také vyjádřil číslo π nekonečným součinem, který uvádíme v úloze 3.8.11) a proto nesou jeho jméno.

Úloha 3.5.7. *Uveďte a dokažte tyto Viètovy vztahy.*

Teď už snadno dokážeme rovnost součtu převrácených čtverců a čísla $\frac{\pi^2}{6}$.

Věta 3.5.8 (Euler, 1734).

$$\sum \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

Důkaz. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Podle tvrzení 3.5.5 má $P(x)$ za kořeny čísla $\cot^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)$, $1 \le k \le n$, a podle tvrzení 3.5.6 proto mají součet

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right) = -\frac{-\binom{2n+1}{2n-2}}{\binom{2n+1}{2n}} = \frac{2n(2n-1)}{6} = \frac{2n^2-n}{3}\ .$$

Po dosazení do nerovností v tvrzení 3.5.3 máme

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2(2n^2-n)}{3(2n+1)^2} < \frac{\pi^2 n}{(2n+1)^2}\ .$$

Pro $n \to \infty$ jde poslední zlomek k 0 a předposlední k $\frac{\pi^2}{6}$ a jsme hotovi. $\square$

Tento známý Eulerův výsledek a právě dokončený důkaz komentujeme v závěrečných poznámkách.

Oddíl uzavřeme nerigorózním odvozením $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ze součtu geometrické řady podle knihy G. H. Hardyho. Použijeme komplexní čísla ($e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$) a integraci. Počítáme:

$$\begin{aligned}
1 + x + x^2 + \dots &= \frac{1}{1-x} \quad (x \in \mathbb{C} \text{ s } |x| < 1), \text{ tedy} \\
1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots &= \frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} \quad (0 < \theta < 2\pi) \\
1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots &= \frac{1 + i\cot(\theta/2)}{2} \quad \text{(zase kotangens)} \\
\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos(2\theta) + \dots &= 0 \quad \text{(reálná část)} \\
\frac{1}{2} - \cos\theta + \cos(2\theta) - \dots &= 0 \quad (\theta := \theta + \pi, \text{ teď } -\pi < \theta < \pi) \\
\sin\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} + \frac{\sin(3\theta)}{3} - \dots &= \frac{\theta}{2} \quad (\textstyle\int_0^\phi \text{ a pak } \phi = \theta)
\end{aligned}$$

a vidíme, že poslední řada konverguje. Ještě jednou zintegrujeme podle θ přes $[0, \phi]$ a položíme $\phi = \theta$:

$$1 - \cos\theta - \frac{1-\cos(2\theta)}{2^2} + \frac{1-\cos(3\theta)}{3^2} - \dots = \frac{\theta^2}{4}\ .$$

Za θ dosadíme π (po tolika zločinech už na dalším nesejde) a máme

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}\ .$$

Levá strana je i $\zeta(2) - \frac{\zeta(2)}{2^2} = \frac{3\zeta(2)}{4}$, takže

$$\sum \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

3.6 Řady v enumerativní kombinatorice

Enumerativní kombinatorika a řady. Stirlingova a Bellova čísla. Wilfova domněnka. Fibonacciova čísla. Rovnost koeficientů mocninných řad. Obyčejné a exponenciální generující funkce. Vzorec pro Stirlingova čísla. Kompozice, uspořádané faktorizace a uspořádané rozklady, dolní odhady pro počty posledních dvou. Nekonečná binomická věta. Reciprocita binomických koeficientů. Dirichletovy řady.

Enumerativní kombinatorika je disciplína diskrétní matematiky zabývající se počítáním konečných struktur a objektů. Typicky máme dánu posloupnost

$$(a_n) \subset \mathbb{N}_0$$

počtů zkoumaných objektů velikosti n a hledáme přesný či přibližný vzorec pro a_n jako funkci n. Mocným a často využívaným nástrojem pro jeho nalezení je přiřazení vhodné nekonečné řady posloupnosti (a_n). Nejspíš jiné, než je sama $(a_n) = \sum a_n$, protože ta skoro nikdy nekonverguje (jen když $a_n = 0$ pro $n > n_0$, ale pak je úloha triviální). Používají se například *obyčejné generující funkce*

$$\sum a_n x^n \ \text{ s } \ x \in \mathbb{R}$$

(a většinou spíše $x \in \mathbb{C}$). Ale jsou i jiné druhy řad, které se posloupnostem (a_n) přiřazují a z jejichž chování lze odvodit hledaný vzorec pro a_n. Ukážeme si několik příkladů použití tohoto obratu.

Začneme identitami svazujícími řady odvozené od exponenciály s počty rozkladů konečných množin.

Definice 3.6.1 (Stirlingova čísla). *Pro $k, n \in \mathbb{N}$ definujeme Stirlingovo číslo $s_{n,k}$ jako 0 pro $k > n$ a pro $1 \le k \le n$ jako počet rozkladů nějaké n-prvkové množiny na k bloků.*

Například $s_{3,2} = 3$, neboť všechny rozklady množiny $\{1, 2, 3\}$ na dva bloky jsou

$$\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \ \{\{2\}, \{1, 3\}\} \ \text{ a } \ \{\{3\}, \{1, 2\}\}\ .$$

Dále $s_{2,2} = 1$, jediný rozklad $\{1, 2\}$ na dva bloky je $\{\{1\}, \{2\}\}$, ale $\binom{2}{1} = \binom{2}{1,1} = 2$: $(\{1\}, \{2\})$ a $(\{2\}, \{1\})$ jsou všechny uspořádané rozklady dvoubodovky na dvě jednobodovky (viz úloha 1.8.6).

Tvrzení 3.6.2 (Stirlingova čísla a exponenciála). *Ve smyslu součtu řady splňují Stirlingova čísla $s_{n,k}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $k \in \mathbb{N}$ identitu*

$$\sum \frac{s_{n,k} x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}\ .$$

Důkaz. Máme

$$\begin{aligned}
\frac{(e^x-1)^k}{k!} &= \sum_{n_1,\dots,n_k\geq 1} \frac{1}{k!}\cdot\frac{x^{n_1}}{n_1!}\cdot\frac{x^{n_2}}{n_2!}\cdot\ldots\cdot\frac{x^{n_k}}{n_k!} \\
&= \sum \frac{1}{n!}\left(\sum_{n_i\geq 1,\, n_1+\cdots+n_k=n} \frac{1}{k!}\binom{n}{n_1,\, n_2,\, \dots,\, n_k}\right)x^n \\
&= \sum \frac{s_{n,k}x^n}{n!}\ .
\end{aligned}$$

V první rovnosti jsme použili definici exponenciály a větu 3.2.23 spolu s úlohou 3.2.24, ve druhé jsme zvolili vhodné pořadí sčítání řady podle věty 3.2.20 a vynásobili jsme a vydělili $n!$ a ve třetí jsme použili vzorec pro počet rozkladů s předepsanými velikostmi bloků z úlohy 1.8.7. □

Spočítáme-li všechny rozklady n-prvkové množiny bez ohledu na počet bloků, dostaneme následující číselnou posloupnost.

Definice 3.6.3 (Bellova čísla). *Pro $n \in \mathbb{N}_0$ definujeme n-té Bellovo číslo b_n jako $b_0 = 1$ a pro $n \geq 1$ jako počet všech rozkladů nějaké n-prvkové množiny.*

Zřejmě $b_n = \sum_{k=1}^n s_{n,k}$. Posloupnost *Bellových čísel* začíná

$$(b_n) = (b_1, b_2, \dots) = (1,\ 2,\ 5,\ 15,\ 52,\ 203,\ 877,\ 4140,\ 21147,\ \dots) \subset \mathbb{N}\ .$$

Například toto je všech pět rozkladů tříprvkové množiny $\{1,2,3\}$:

$$\{\{1\},\{2\},\{3\}\},\ \{\{1,2\},\{3\}\},\ \{\{1,3\},\{2\}\},\ \{\{2,3\},\{1\}\},\ \{\{1,2,3\}\}\ .$$

Úloha 3.6.4. *Dokažte, že se Bellova čísla řídí rekurencí $b_0 = 1$ a*

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}b_k,\ n \geq 1\ .$$

Úloha 3.6.5. *Přečtěte si o posloupnosti Bellových čísel v OEIS.*

Tvrzení 3.6.6 (Bellova čísla a exponenciála). *Ve smyslu součtu řady splňují Bellova čísla b_n pro každé $x \in \mathbb{R}$ identitu*

$$B(x) := 1 + \sum \frac{b_n x^n}{n!} = e^{e^x-1}\ .$$

Důkaz. Máme

$$\begin{aligned}
1+\sum\frac{b_n x^n}{n!} &= 1 + \sum\sum_{k=1}^{n}\frac{s_{n,k}x^n}{n!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum\frac{s_{n,k}x^n}{n!} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(e^x-1)^k}{k!} = \exp(e^x-1)\ .
\end{aligned}$$

V první rovnosti jsme Bellova čísla vyjádřili Stirlingovými čísly. Ve druhé jsme díky absolutní konvergenci uvažované řady vyměnili pořadí sčítání podle n a k, což je vlastně speciální případ asociativity z věty 3.2.26, a také jsme využili, že $s_{n,k} = 0$ pro $n < k$. Třetí rovnost plyne z předešlého tvrzení. Poslední rovnost je jen definice exponenciály. $\square$

Úloha 3.6.7. *V důkazech obou předchozích tvrzení jsme se odvolávali na absolutní konvergenci. Vysvětlete, proč jsou použité řady absolutně konvergentní.*

Úloha 3.6.8. *Pro $n \in \mathbb{N}_0$ nechť $u_0 := 1$ a pro $n \geq 1$,*

$$u_n := \#\{\textit{rozklady } [n] \textit{ se sudým } \# \textit{ bloků}\} - \#\{\textit{rozklady } [n] \textit{ s lichým } \# \textit{ bloků}\}$$

(zde $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$). Dokažte, že (pro každé $x \in \mathbb{R}$) platí identita

$$U(x) := 1 + \sum \frac{u_n x^n}{n!} = e^{1-e^x} \ .$$

Čísla u_n počítají přebytek rozkladů n-prvkové množiny se sudým počtem bloků nad rozklady s lichým počtem bloků a jejich posloupnost začíná takto:

$$(u_n) = (-1,\ 0,\ 1,\ 1,\ -2,\ 9,\ -9,\ 50,\ 267,\ 413,\ -2180,\ -17731,\ \ldots) \subset \mathbb{Z}\ .$$

Například $u_3 = 1$, protože tříprvková množina má tři rozklady se sudým počtem bloků, totiž dvěma bloky, a dva s lichým, jeden s jedním blokem a jeden se třemi bloky, viz výše. Dále $u_2 = 0$: ze dvou rozkladů dvoubodovky je jeden„sudý“ a druhý „lichý“. Čísla jsme označili písmenem „u“, protože kromě názvu *doplňková Bellova čísla* se pro ně používá i název *Uppuluriho–Carpenterova čísla*. Všimněte si, že funkce $B(x)$ a $U(x)$ jsou reciproké, $B(x)U(x) = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Následující úloha je pěknou ukázkou účinnosti metody generujících funkcí (v tomto případě tzv. exponenciální generující funkce) a potažmo nekonečných řad v kombinatorice: jak byste přímo z kombinatorické definice čísel u_n dokazovali, že počet sudých a lichých rozkladů n-prvkové množiny se pro nekonečně mnoho n liší?

Úloha 3.6.9. *Dokažte, že $u_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$. Návod: úloha 3.6.8.*

Úloha 3.6.10. *Dokažte, že $u_n > 0$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ a rovněž $u_n < 0$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$. Návod: úlohy 3.6.9 a 3.6.4.*

Jsou kromě $u_2 = 0$ ještě některé další hodnoty u_n nulové? Zdá se, že ne, ale zatím to neumíme dokázat.

Problém 3.6.11 (Wilfova domněnka, stále otevřená). *Dokažte, že $u_n = 0$ pouze pro $n = 2$.*

Podíváme se na *Fibonacciova čísla* f_n, i když příklady s nimi jsou již trochu otřepané (což asociuje půvabný citát z [114, str. 1], připsaný H. M. Edwardsovi: *The story of "Fermat's last theorem" has been told so often it hardly bears retelling.*). Jejich posloupnost

$$(f_n) = (f_1, f_2, \ldots) = (1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots) \subset \mathbb{N}$$

je zadána rekurencí $f_0 = f_1 = 1$ a $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Pomocí nekonečných řad pro ně odvodíme explicitní vzorec.

Tvrzení 3.6.12 (Binetův vzorec). *Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí rovnost*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) .$$

Úloha 3.6.13. *Dokažte Binetův vzorec indukcí.*

Úloha 3.6.14. *Posloupnost Fibonacciových čísel $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ rozšiřte pomocí jejich rekurence na funkci $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Jaký je vztah mezi f_n a f_{-n}? Pro která $n \in \mathbb{Z}$ je $f_n = 0$?*

Leonardo Bonacci (asi 1170 – asi 1250), zvaný též *Fibonacci* (syn Bonacciho), byl italský matematik, nejvýznamnější středověký matematik Západu své doby (ve spisu *Liber quadratorum* se zabýval diofantickými rovnicemi pro čtverce). *Jacques P. M. Binet (1786–1856)* byl francouzský matematik, fyzik a astronom (zabýval se maticovou algebrou a klasickou mechanikou), vzorec po něm nazvaný však byl znám již o století dříve.

Posloupnosti (f_n) přiřadíme řadu

$$F = 1 + \sum f_n x^n,\ |x| < 1/2 .$$

Díky indukci je $f_n \leq 2^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, a tak v uvedeném oboru x řada absolutně konverguje (srovnáním s geometrickou řadou) a její součty definují funkci $F\colon (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$. Lineární kombinace řad dává pro $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ rovnost

$$\begin{aligned}(1-x-x^2)F &= F - \sum f_{n-1}x^n - \sum_{n\geq 2} f_{n-2}x^n \\ &= 1 + x - x + \sum_{n\geq 2}(f_n - f_{n-1} - f_{n-2})x^n = 1 .\end{aligned}$$

Tedy

$$F = F(x) = \frac{1}{1-x-x^2},\ |x| < 1/2 .$$

Pro vhodné konstanty $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, které jsou potenciálně z $\mathbb{C}$, máme rozklad této funkce na *parciální zlomky*

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{a}{1-\alpha x} + \frac{b}{1-\beta x} = \frac{a(1-\beta x) + b(1-\alpha x)}{1-\alpha x-\beta x+\alpha\beta x^2} .$$

Tyto konstanty určíme ze vztahů $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$, $a+b=1$ a $a\beta+b\alpha=0$. První dva říkají, že $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-x-1$, takže po vyřešení kvadratické rovnice máme

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \text{ a }\ \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ .$$

Ze třetího a čtvrtého plyne, že $a(\alpha-\beta)=\alpha$ a $b(\beta-\alpha)=\beta$. Díky $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ je $a=\frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ a $b=-\frac{\beta}{\sqrt{5}}$. Tedy

$$\begin{aligned}F &= 1+\sum f_n x^n=\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{a}{1-\alpha x}+\frac{b}{1-\beta x}\\ &= \sum(a\alpha^{n-1}+b\beta^{n-1})x^{n-1}\ \text{(součet geom. řady a lin. kombinace řad)}\\ &= \sum\frac{(\alpha^n-\beta^n)x^{n-1}}{\sqrt{5}},\ |x|<1/2\ .\end{aligned}$$

Porovnání koeficientů u x^n v této řadě a v řadě F dává Binetův vzorec

$$f_n=\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}-\frac{\beta^{n+1}}{\sqrt{5}},\ n\in\mathbb{N}_0\ ,$$

z tvrzení 3.6.12. Odvození však není úplné, závěrečný krok „Porovnání koeficientů u …“ je nekorektní, zatím jsme jen dokázali rovnost funkcí

$$\sum f_n x^n=\sum\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}x^n$$

definovaných na intervalu $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Korektnost přechodu k rovnosti koeficientů plyne z následující základní věty o tzv. mocninných řadách.

Věta 3.6.15 (o rovnosti koeficientů). *Nechť $\delta>0$ je reálné a $(a_n),(b_n)\subset\mathbb{R}$ jsou dvě posloupnosti. Když*

$$\sum a_n x^n=\sum b_n x^n$$

platí ve smyslu součtů řad pro každé $x\in(-\delta,\delta)$ (předpokládáme, že pro tato x obě mocninné řady konvergují), pak $a_n=b_n$ pro každé $n\in\mathbb{N}$.

Důkaz. Po vydělení rovnosti $\sum a_n x^n=\sum b_n x^n$ nenulovým x a úpravách dostaneme pro každé nenulové $x\in(-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2})$ nerovnost

$$|a_1-b_1|\le|x|\sum_{i\ge 2}(|b_i|+|a_i|)\left(\frac{\delta}{2}\right)^{i-2}=|x|c\ .$$

Tedy $|a_1-b_1|<\varepsilon$ pro každé $\varepsilon>0$ a $a_1=b_1$. Když už je dokázáno, že $a_i=b_i$ pro $i=1,2,\ldots,n$, od rovnosti $\sum a_n x^n=\sum b_n x^n$ odečteme rovnost $\sum_{i=1}^n a_i x^i=$

$\sum_{i=1}^n b_i x^i$, vydělíme x^{n+1} pro nenulové x a po úpravách dostaneme pro každé nenulové $x \in (-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})$ nerovnost

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| \le |x| \sum_{i \ge n+2} (|b_i| + |a_i|) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{i-n-2} = |x| c\,.$$

Tedy $|a_{n+1} - b_{n+1}| < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$ a $a_{n+1} = b_{n+1}$. Indukce ukazuje, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. □

Teď už je odvození Binetova vzorce úplné. Přes veškeré autorovo fandění řadám musí uznat, že toto odvození není zase až tak krátké a jednoduché. Proto se k němu ještě v následujícím posledním oddílu vrátíme.

Úloha 3.6.16. *Pro platnost implikace*

$$(\forall x \in (-\delta, \delta):\ \sum a_n x^n = \sum b_n x^n) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}:\quad a_n = b_n)$$

stačí splnit rovnost v předpokladu namísto intervalu $(-\delta, \delta)$ i menší množinou čísel x. Jakou?

Definice 3.6.17 (MŘ, OGF a EGF). *Mocninnou řadou rozumíne řadu*

$$\sum a_n x^n,\quad \textit{kde } (a_n) \subset \mathbb{R} \textit{ a } x \in \mathbb{R}\,.$$

Obyčejnou generující funkcí (OGF) posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$ rozumíme mocninnou řadu $\sum a_n x^n$ a její exponenciální generující funkcí (EGF) rozumíme mocninnou řadu

$$\sum a_n \frac{x^n}{n!}\,.$$

V OGF a EGF se často sčítá od nulového indexu, pracuje se s řadami $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!}$.

Pomocí EGF a OGF jsme odvodili identity pro Stirlingova a Bellova čísla a explicitní vzorec pro Fibonacciova čísla. Nebudeme ale před čtenářem zatajovat, že velká část našeho úsilí vložená do použití konvergence a absolutní konvergence řad byla zbytečná, neboť tyto výpočty lze stejně dobře a správně a jednodušeji provést tzv. *formální metodou (postupem)*, kdy se mocninná řada $\sum a_n x^n$ nepojímá jako funkce $\sum a_n x^n : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, ale jako algebraický objekt, posloupnost koeficientů $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots)$. O konvergenci se pak nemusíme starat (přesněji řečeno, pracuje se s jednodušším typem konvergence, tzv. formální konvergencí). Popisem kalkulu formálních mocninných řad bychom se však dostali do hájemství algebry, a proto se do něj nebudeme pouštět (i tak už dost odbočujeme). Z následujících tří příkladů v tvrzeních 3.6.26, 3.6.27 a 3.6.29 lze výpočet provést formální metodou v prvním, ale ve zbylých dvou je pojetí mocninné řady (v tvrzení 3.6.27 jde o řadu jiného druhu) jako funkce podstatné a nedá se jednoduše nahradit formálním postupem.

Definice 3.6.18 (kompozice). *Kompozicí čísla $n \in \mathbb{N}$ rozumíme uspořádanou k-tici*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$$

splňující $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$. Počet kompozic čísla n s k částmi označíme jako $c_{n,k}$. Jako $c_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}$ označíme počet všech kompozic čísla n.

Například $c_3 = 4$, $c_{3,1} = 1$, $c_{3,2} = 2$ a $c_{3,3} = 1$ vzhledem ke kompozicím

$$(3),\ (2,1),\ (1,2)\ \text{ a }\ (1,1,1)$$

čísla 3. Posloupnost počtů kompozic začíná

$$(c_n) = (c_1,\ c_2,\ \ldots) = (1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ \ldots)\ .$$

Obecný vzorec pro c_n a pokračování této posloupnosti je pro každého jistě (slovem dávného učitele rekurze na MFF O. Demutha) nabíledni.

Úloha 3.6.19 (trocha filozofie nikoho nezabije). *Co myslíte, souhlasil by filozof L. Wittgenstein s tím, že pokračování hořejší posloupnosti (c_n) je nabíledni?*

Definice 3.6.20 (uspořádaná faktorizace). *Uspořádaná faktorizace přirozeného čísla $n \geq 2$ je uspořádaná k-tice*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in (\mathbb{N}\backslash\{1\})^k$$

splňující $a_1 a_2 \ldots a_k = n$. Počet uspořádaných faktorizací čísla n označíme jako f_n (nespleteme si je s Fibonacciovými čísly) a definujeme $f_1 = 1$.

Máme $f_{12} = 8$ vzhledem k uspořádaným faktorizacím

$$(12),\ (2,6),\ (6,2),\ (3,4),\ (4,3),\ (2,2,3),\ (2,3,2)\ \text{ a }\ (3,2,2)$$

čísla 12. Posloupnost počtů uspořádaných faktorizací začíná

$$(f_n) = (f_1,\ f_2,\ \ldots) = (1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 4,\ 2,\ 3,\ 1,\ 8,\ 1,\ 3,\ 3,\ \ldots)\ .$$

Pro každé prvočíslo $n = p$ je $f_p = 1$, což je minimální možná hodnota. Jak velké může f_n maximálně být? Za chvíli uvidíme.

Definice 3.6.21 (uspořádaný rozklad). *Uspořádaný rozklad množiny X je uspořádaná k-tice neprázdných disjunktních množin*

$$(X_1, X_2, \ldots, X_k)$$

splňujících $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k = X$. Počet uspořádaných rozkladů n-prvkové množiny označíme jako r_n.

S uspořádanými rozklady jsme se již setkali v důkazu tvrzení 3.6.6 a v úloze 1.8.6. Máme $r_2 = 3$ vzhledem k uspořádaným rozkladům

$$(\{1, 2\}),\ (\{1\}, \{2\}) \ \text{ a } \ (\{2\}, \{1\})$$

množiny $\{1, 2\}$. Posloupnost počtů uspořádaných rozkladů začíná

$$(r_n) = (r_1,\, r_2,\, \dots) = (1,\, 3,\, 13,\, 75,\, 541,\, 4683,\, 47293,\, 545835,\, \dots)\,.$$

Pomocí nekonečných řad odvodíme přesné vzorce pro c_n a $c_{n,k}$ a dolní odhady pro f_n a r_n. Pro odvození vzorců pro c_n a $c_{n,k}$ pomocí OGF budeme potřebovat zobecnění klasické konečné binomické věty (úloha 1.8.5) na případ libovolného reálného exponentu. Toto zobecnění dokážeme později ve větě 5.5.11 jako jeden ze speciálních případů Taylorovy řady.

Věta 3.6.22 (nekonečná binomická věta). *Pro každé $x \in (-1, 1)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí rovnost*

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n =: 1 + \sum \binom{\alpha}{n} x^n\,.$$

Definice 3.6.23 (zobecněný binomický koeficient). *Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ veličiny*

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n}(\alpha - i)$$

nazýváme zobecněnými binomickými koeficienty. Definujeme $\binom{\alpha}{0} = 1$ a $\binom{\alpha}{n} = 0$ pro $n > \alpha \in \mathbb{N}_0$.

Pro $\alpha \in \mathbb{N}_0$ se klasický a zobecněný binomický koeficient shodují. Pro $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ale $\binom{\alpha}{n} \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a řada ve větě je skutečně nekonečná. Zobecněné binomické koeficienty splňují reciproční identitu svazující jejich hodnoty pro kladné a záporné α.

Lemma 3.6.24 (reciprocita pro $\binom{\alpha}{n}$). *Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ je*

$$\binom{-\alpha}{n} = (-1)^n \binom{\alpha + n - 1}{n}\,.$$

Důkaz. Ze součinu n čísel v čitateli zlomku $\binom{-\alpha}{n}$ vytkneme $(-1)^n$ a dostaneme výraz vpravo. □

Vzorce pro c_n a $c_{n,k}$ se snadno z hořejší posloupnosti uhádnou. Pak je lze dokázat třeba indukcí.

Úloha 3.6.25 (vzorce pro počty kompozic). *Dokažte indukcí i kombinatoricky vhodnou bijekcí, že*

$$c_n = 2^{n-1} \ \text{ a } \ c_{n,k} = \binom{n-1}{k-1}\,.$$

Sečtení přes $k = 1, 2, \ldots, n$ a klasická binomická věta pro $(1+1)^{n-1}$ ukazují, že $c_n = 2^{n-1}$ plyne ze vzorce pro $c_{n,k}$. Ten teď odvodíme pomocí OGF a nekonečné binomické věty.

Tvrzení 3.6.26 (kompozice pomocí OGF). *Pro každé $x \in (-1, 1)$ a $k \in \mathbb{N}$ platí*

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^k = (x + x^2 + x^3 + \ldots)^k = \sum c_{n,k} x^n \ ,$$

což implikuje vzorec $c_{n,k} = \binom{n-1}{k-1}$.

Důkaz. První rovnost plyne ze součtu geometrické řady. Druhá z věty 3.2.23 a úlohy 3.2.24 o násobení absolutně konvergentních řad a věty 3.2.20 o přerovnání absolutně konvergentních řad (a pochopitelně také z definice $c_{n,k}$). Na druhou stranu věta 3.6.22 použitá pro $(\frac{x}{1-x})^k = x^k(1-x)^{-k}$ s $\alpha = -k$, věta 3.6.15 a lemma 3.6.24 dávají

$$c_{n,k} = \text{koef. u } x^n \text{ v } x^k(1-x)^{-k} = \binom{-k}{n-k}(-1)^{n-k} = \binom{n-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1} \,.$$

□

Ve dvou posledních a nejpokročilejších použitích metody nekonečných řad v enumerativní kombinatorice odvodíme dolní odhady pro počty uspořádaných faktorizací a počty uspořádaných rozkladů.

Tvrzení 3.6.27 (maximální počet uspořádaných faktorizací). *Nechť f_n je počet uspořádaných faktorizací čísla $n \in \mathbb{N}$ (viz definice 3.6.20) a*

$$s = \kappa = 1.72864\ldots$$

je jediné řešení rovnice $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} = 2$ (viz důsledek 3.1.18). Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, že

$$f_n > n^{\kappa-1-\varepsilon} = n^{0.72864\cdots-\varepsilon} \,.$$

Důkaz. Následující výpočet lze provést formálně, ale pro odhad f_n potřebujeme rovnost ve smyslu součtů, a tak výpočet v závěru zdůvodníme pomocí absolutní konvergence. Pro každé $s > \kappa$ platí rovnosti

$$\frac{1}{2-\zeta(s)} = 1 + \sum(\zeta(s)-1)^n = 1 + \sum\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots\right)^n = \sum \frac{f_n}{n^s} \,.$$

Jak z nich plyne odhad pro f_n? Pro dané $\varepsilon > 0$ nechť pro spor $f_n \le n^{\kappa-1-\varepsilon}$ pro každé $n > n_0$. Pak

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{f_n}{n^s} \le n^{\kappa-1-\varepsilon-s}$$

a srovnání se $\zeta(s)$ (viz tvrzení 3.1.10) dává absolutní konvergenci řady $\sum \frac{f_n}{n^s}$ pro $s > \kappa - \varepsilon$. Když $s > \kappa$, má součet dokonce omezen absolutní konstantou

$$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{f_n}{n^\kappa} + \sum_{n>n_0} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < +\infty \; .$$

To je ale ve sporu s tím, že pro s větší než κ a neomezeně se blížící ke κ jde výchozí zlomek $\frac{1}{2-\zeta(s)}$ do $+\infty$ (díky tvrzení 3.1.16).

Zdůvodníme jednotlivé rovnosti ve výpočtu. V první jsme použili vzorec pro součet geometrické řady (pro $s > \kappa$ je $0 < \zeta(s) - 1 < 1$) a monotonii $\zeta(s)$ a ve druhé pouze definici $\zeta(s)$. Podrobně vysvětlíme klíčovou třetí rovnost. Figurují v ní jen kladné sčítance a místo absolutní konvergence tak stačí používat konvergenci. Pro $s > \kappa$ řada $2^{-s} + 3^{-s} + \dots$ konverguje, můžeme ji tak podle věty 3.2.23 a přesněji úlohy 3.2.24 umocnit v $(2^{-s} + 3^{-s} + \dots)^n$ a vzniklá řada má součet rovný n-té mocnině součtu $b(s) := 2^{-s} + 3^{-s} + \dots$. Protože pro $s > \kappa$ je $0 < b(s) < 1$, máme $\sum b(s)^n < +\infty$ a můžeme použít tvrzení 3.2.27. Díky němu řada

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in(\mathbb{N}\setminus\{1\})^n} \frac{1}{k_1^s} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{k_n^s} \; ,$$

vzniklá umocněními z řady $1 + \sum(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots)^n$ konverguje a obě řady mají stejné součty. Tuto řadu přeskupíme tak, že do jedné skupiny dáme sčítance s týmž součinem $k_1 k_2 \dots k_n$, který označíme zase jako n, sčítance v každé skupině sečteme a podle věty 3.2.26 a definice čísel f_n dostaneme řadu $\sum \frac{f_n}{n^s}$ s týmž součtem. □

Zajímavá identita svazující počty f_n s počty jistých aditivních rozkladů přirozených čísel je uvedená v úloze 3.8.9. V předchozím tvrzení jsme se také seznámili s dalším typem nekonečných řad používaných v enumerativní kombinatorice a, častěji, v analytické teorii čísel. Zobecňují $\zeta(s)$.

Definice 3.6.28 (Dirichletova řada). *Dirichletovou řadou posloupnosti čísel* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *rozumíme řadu*

$$\sum \frac{a_n}{n^s}, \;\; s \in \mathbb{R} \; .$$

Uspořádané rozklady odhadneme pomocí nám už známé EGF. Budeme postupovat jako pro uspořádané faktorizace, pouze Dirichletovu řadu $\zeta(s)$ nahradí EGF $\exp(x)$.

Tvrzení 3.6.29 (maximální počet uspořádaných rozkladů). *Nechť* r_n *je počet uspořádaných rozkladů n-prvkové množiny (viz definice 3.6.21) a*

$$x = \log 2 = 0.69314\dots$$

je jediné řešení rovnice $e^x = 1 + \sum \frac{x^n}{n!} = 2$ *(viz tvrzení 3.3.6). Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje nekonečně mnoho* $n \in \mathbb{N}$*, že*

$$r_n > \left(\frac{1}{\log 2} - \varepsilon\right)^n n! = (1.44269\ldots - \varepsilon)^n n! \; .$$

Důkaz. Následující výpočet opět platí formálně, ale my ho potřebujeme ve smyslu rovnosti součtů. Pro každé $x > \log 2$ je

$$\frac{1}{2-e^x} = 1 + \sum (e^x - 1)^n = 1 + \sum \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)^n = 1 + \sum \frac{r_n x^n}{n!}\ .$$

Odhad r_n odtud plyne jako pro f_n. Pro dané $\varepsilon \in (0,1)$ nechť pro spor $r_n \le (\frac{1}{\log 2} - \varepsilon)^n n!$ pro každé $n > n_0$. Pak pro $x > 0$ máme

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{r_n x^n}{n!} \le \left(\left(\frac{1}{\log 2} - \varepsilon\right) x\right)^n$$

a srovnání s geometrickou řadou (viz tvrzení 3.1.10) dává konvergenci poslední řady

$$1 + \sum \frac{r_n x^n}{n!} \ \text{ pro } \ 0 < x < \frac{1}{\frac{1}{\log 2} - \varepsilon} = \frac{\log 2}{1 - \varepsilon \log 2} < \log 2 + \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Pro $0 < x < \log 2$ má součet omezený absolutní konstantou $1 + \sum_{n=1}^{n_0} \frac{r_n x^n}{n!} + \sum_{n>n_0} (1 - \varepsilon \log 2)^n < +\infty$. To je ve sporu s tím, že pro x větší než $\log 2$ a neomezeně se blížící k $\log 2$ výchozí zlomek $\frac{1}{2-e^x}$ jde díky spojitosti exponenciály do $+\infty$.

Tři rovnosti ve výpočtu jsou zdůvodněné stejně jako v předchozím důkazu tvrzení 3.6.27. Nyní je ale možná méně jasné, proč třetí rovnost platí formálně. Po umocněních a seskupení podle mocnin x vidíme, že ve vzniklé řadě má x^n koeficient

$$\sum_{m \ge 1} \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \frac{1}{k_1! k_2! \ldots k_m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m \ge 1} \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m}\ .$$

Poslední multinomický koeficient počítá podle úlohy 1.8.6 uspořádané rozklady n-prvkové množiny s bloky předepsaných velikostí. Poslední suma se tedy rovná počtu uspořádaných rozkladů n-prvkové množiny na m bloků a celý výraz se rovná $\frac{r_n}{n!}$. □

Další příklady použití nekonečných řad v enumerativní kombinatorice se nacházejí v úlohách 3.8.6–3.8.8.

3.7 Fibonacciova čísla algebraicky

Co nejpřímější odvození Binetova vzorce pro Fibonacciova čísla f_n.

Ještě jednou k Binetově vzorci, začneme ale zeširoka. Buď dána obecná rekurence

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}\ ,$$

kde $a_n \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ a $n \geq k$ a její koeficienty $c_i \in \mathbb{R}$. Je jasné, že pro každý kořen $\alpha \in \mathbb{R}$ polynomu $x^k - \sum_{i=1}^k c_i x^{k-i}$ posloupnost jeho mocnin $(a_n)_{n\geq 0} = (\alpha^n)$ danou rekurenci splňuje ($n \geq k$):

$$a_n - \sum_{i=1}^k c_i a_{n-i} = \alpha^n - \sum_{i=1}^k c_i \alpha^{n-i} = \left(\alpha^k - \sum_{i=1}^k c_i \alpha^{k-i}\right)\alpha^{n-k} = 0\alpha^{n-k} = 0 \ .$$

Dále je jasné, že množina posloupností splňujících pro $n \geq k$ tuto rekurenci je uzavřená na lineární kombinace: splňují-li $(a_n)_{n\geq 0}$ a $(b_n)_{n\geq 0}$ rekurenci, splňuje ji (pro $n \geq k$ a libovolné $a, b \in \mathbb{R}$) i $(aa_n + bb_n)_{n\geq 0}$. Konečně je jasné, že když $(a_n)_{n\geq 0}$ a $(b_n)_{n\geq 0}$ splňují danou rekurenci, pak

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots, a_{k-1} = b_{k-1} \Rightarrow a_n = b_n \ \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Fibonacciovské rekurenci $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ s $k = 2$ odpovídá polynom $x^2 - x - 1$ se dvěma (různými) kořeny $\alpha = 2^{-1}(1 + \sqrt{5})$ a $\beta = 2^{-1}(1 - \sqrt{5})$. Nalezneme-li čísla $a, b \in \mathbb{R}$ splňující

$$a + b = a\alpha^0 + b\beta^0 = 1 = f_0 \ \text{ a } \ a\alpha + b\beta = a\alpha^1 + b\beta^1 = 1 = f_1 \ ,$$

pak podle tří zmíněných vlastností rekurencí pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f_n = a\alpha^n + b\beta^n \ .$$

Hned spočítáme, že $a = 1 - b$, $b = (1-\alpha)(\beta-\alpha)^{-1} = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}$ a $a = 1 + \frac{\beta}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$. Takže, pro každé $n \in \mathbb{N}_0$,

$$f_n = a\alpha^n + b\beta^n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) \ .$$

Úloha 3.7.1. *Nalezněte vzorec pro n-tý člen posloupnosti*

$$(a_n)_{n\geq 0} = (1,\ 1,\ -1,\ 3,\ -7,\ \ldots),\ a_n = -2a_{n-1} + a_{n-2} \ .$$

3.8 Poznámky a další úlohy

Oddíl 3.1. Výhradně řadám se věnují knihy [79] K. Knoppa i [23] T. Bromwiche. Obě jsou dostupné on-line. Zajímavé Bolzanovy úvahy o řadách si lze přečíst v citaci Bolzanovy knihy [18] v učebnici [145, str. 55–57] J. Veselého. I Bolzanova kniha, přesněji její verze [17], je dostupná on-line.

Divergentními řadami se zabývá kniha [63] G. Hardyho. Jak teoretizovat kolem divergentních řad? Co se dá o nich říci více, než že divergují? Výstižnější termín než divergentní řady je *teorie zobecněného sčítání řad.* Základní definice součtu řady $a_1 + a_2 + \ldots$ jako limity $\lim (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ se dá pozměnit či rozšířit mnoha způsoby (viz též oddíl 2.5). Například pro každé reálné (i komplexní) x s $|x| < 1$ platí

$$1 + \sum x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \ .$$

Zlomek vpravo je však definovaný v mnohem širším oboru $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (či $\mathbb{C}\backslash\{1\}$), takže toho můžeme využít a definovat součet klasicky divergentní řady

$$1-1+1-1+\cdots=1+\sum(-1)^n \text{ jako číslo } \frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\ .$$

Nebo stejným způsobem

$$1+2+4+8+16+\cdots=1+\sum 2^n=\frac{1}{1-2}=-1\ .$$

Dalších definic součtu řady je mnoho, viz zmíněná kniha [63].

Zeta funkce $\zeta\colon(1,+\infty)\to(1,+\infty)$, kterou jsme zavedli v tvrzení 3.1.10 jako součet nekonečné řady, patří k nejdůležitějším funkcím v teorii čísel. Jsou jí věnovány celé knihy, například Titchmarshova [141]. Její hodnoty $\zeta(n)$ pro $n\in\mathbb{Z}$ jsou: $\zeta(1)=+\infty$ (či přesněji není definovaná, řada má součet $+\infty$),

$$\zeta(2n)=\frac{(-1)^{n+1}B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} \quad \text{pro } n\in\mathbb{N}, \text{ kde}$$

$B_{2n}\in\mathbb{Q}$ jsou zlomky objevující se jako koeficienty v Taylorově řadě

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_nx^n}{n!}\ ,$$

$\zeta(0)=-\frac{1}{2}$ a pro záporné argumenty

$$\zeta(-2n)=0 \ \text{ a } \ \zeta(1-2n)=\frac{(-1)^nB_{2n}}{n+1},\ n\in\mathbb{N}\ .$$

Zlomky B_n se nazývají *Bernoulliova čísla.* Jejich prvních pár hodnot je $B_0=1$, $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_{2n+1}=0$ pro $n\in\mathbb{N}$,

$$B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30},\ B_{10}=\frac{5}{6}$$

a tak dále. Kdo nabyl dojmu, že tato posloupnost Bernoulliových čísel se sudými indexy je omezená, měl by vědět, že jde o dojem falešný (úloha 3.8.13). Na hodnoty $\zeta(2n+1)$, $n\in\mathbb{N}$, v lichých číslech jsme nezapomněli, ale žádné podobné jednoduché vzorce pro ně nejsou známy. V r. 1981 francouzský matematik R. Apéry dokázal, že číslo $\zeta(3)$ je iracionální. Nikdo ale zatím neumí dokázat totéž pro $\zeta(5),\zeta(7),\ldots$. V komplexní analýze se dá dokázat, že $\zeta(s)$ má jednoznačné holomorfní (tj. mající první derivaci) rozšíření na $\mathbb{C}\backslash\{1\}$. Zhruba řečeno zeta funkci rozšíříme podobně, jak jsme to výše udělali s řadou $1+x+x^2+\ldots$, a můžeme proto uvažovat a počítat její hodnoty třeba v záporných celých číslech. Pro jednu metodu rozšiřování definičního oboru $\zeta(s)$ viz úlohu 3.8.14.

Kniha [98] T. Šapošnikovové a V. Mazji je vědeckým životopisem J. Hadamarda.

D. Cruz-Uribe [34] a V. Rayskin [122] porovnávají odmocninové a podílové kritérium. Ve větě 3.1.33 jsme tuto záležitost rozebrali důkladněji. Aby odmocninové kritérium vyšlo alespoň tak silné jako podílové, vhodně jsme ho ve druhé části doplnili.

Oddíl 3.2. P. Dirichlet své kritérium konvergence použil při důkazu zmíněného výsledku o prvočíslech. Olivierův test konvergence byl dokázán již v r. 1827 v [108], viz také T. Šalát a V. Toma [137]. Riemannova věta o přerovnání řady (věta 3.2.15) pochází z jeho práce [124]. Pozoruhodnou věc o neabsolutně konvergentních řadách dokázal W. Brian v [22]: pro každé tři takové řady existuje jedna posloupnost přirozených čísel, pro níž každá ze tří odpovídajících podřad má součet $+\infty$ nebo $-\infty$, a pro čtyři řady to již neplatí. Větu 3.2.26 o asociativitě absolutně konvergentních řad lze i s příklady použití nalézt v učebnici [71, věta 39] V. Jarníka. Důkazů nekonečnosti počtu prvočísel je známa celá řada, další je v úloze 3.8.15. Více se lze o Eulerově identitě č. 1 (věta 3.2.31) dozvědět v Tichmarshově knize [141].

Oddíl 3.3. Pomocí derivací se exponenciální funkce definuje jednoduše: je to jediná funkce, která se derivováním nemění, přesněji jediná funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $f'(x) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $f(0) = 1$. Nekonečným součinem lze exponenciálu pro $|z| < 1$ spočítat identitou

$$\exp(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^{-\mu(n)/n} ,$$

kde $\mu\colon \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ je tzv. *Möbiova funkce* definovaná jako $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$ pro n rovné součinu k různých prvočísel a $\mu(n) = 0$ jinak. Jak tuto identitu ověřit ukazuje úloha 3.8.16. Exponenciála se dá též spočítat pro každé $x \in \mathbb{R}$ tzv. řetězovým zlomkem (který objevil Euler):

$$e^x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{x + 1 - \cfrac{x}{x + 2 - \cfrac{2x}{x + 3 - \cfrac{3x}{x + 4 - \cfrac{4x}{\ddots}}}}}} .$$

Pro odvození této identity viz úlohy 3.8.17 a 3.8.18. Číslo $e = 2.71828\ldots$ je nejen iracionální, ale dokonce transcendentní, což dokázal v r. 1873 francouzský matematik Ch. Hermite.

Maďarský matematik *József Beck (1952)* (zabývá se kombinatorikou a diskrétní matematikou ve vztahu k teorii pravděpodobnosti, působí na Rutgersově Univerzitě v New Jersey) dokázal v [13, Theorem 1] ve větě 1, jejíž znění se táhne na více než 1 stranu a důkaz na stran více než 50, že drtivá většina (ve smyslu počátečních poloh a počátečních směrů pohybu částic) systémů N částic v krychličce K se pro dostatečně velké N a dostatečně dlouhý čas evoluce chová dosti přesně podle popsaného Poissonova rozdělení. Všechny odhady v jeho větě 1 jsou explicitní, neobsahují žádné limity bez míry konvergence. Z jiné své věty [13, Theorem 2] odvozuje jako ilustraci následující výsledek o zákonu velkých čísel (blízkost náhodné veličiny její střední hodnotě), viz [13, str. 181/2]:

> V krychlové nádobě o hraně 1 metr se nachází systém $N = 10^{27}$ bodových částic (molekul) pohybujících se různými směry touž rychlostí 10^3 metru za sekundu. Částice vzájemně neinteragují, nesráží se (jak Beck poznamenává, je to nerealistické, ve skutečnosti jsou vzájemné srážky velmi časté) a pouze se elasticky odrážejí od stěn nádoby. V nádobě vydělíme nějakou podmnožinu A o objemu 0.5 m^3 a o systému částic řekneme, že je v daném okamžiku vyvážený, je-li počet částic nacházejících se v A roven
>
> $$\frac{(1 \pm 0.001)N}{2}\,,$$
>
> to jest odchyluje se od očekávané (střední) hodnoty $\frac{N}{2}$ s relativní chybou nejvýše desetina procenta. Systém necháme se vyvíjet po dobu 100 let (asi $3 \cdot 10^9$ sekund) a ptáme se, jak dlouho v tomto století nebude vyvážený. Pak z odhadů v [13, Theorem 2] vyplývá, že více než 99.99% takových systémů (ve smyslu počátečních poloh a počátečních směrů pohybu částic) nebude během století vyvážených jen po dobu kratší než 10 vteřin! (viz úloha 3.8.19)

Pro důkazy těchto a dalších vět z [13] je exponenciální funkce, ovšem v komplexním oboru, stěžejní.

Poissonův sumační vzorec praví: nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ splňují

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} f(y)\, dy\,.$$

Potom pro vhodnou funkci f je

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n)\,.$$

„Vhodná" je například každá funkce f, že pro všechna $j, k \in \mathbb{N}_0$ je

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)^j f^{(k)}(x) < +\infty$$

(derivace f jdou v nekonečnech rychle k 0). O S. Poissonovi píše I. Kraus [86, Kapitola III. Věda, pro kterou stojí zato žít i zemřít].

Oddíl 3.4. I číslo π je transcendentní, což dokázal v r. 1882 německý matematik F. von Lindemann. Problém osamělého běžce předložil v r. 1967 J. M. Wills [155]. Pro sedm běžců ho vyřešili J. Barajas a O. Serra [10]. Další výsledky o problému lze nalézt v novějším článku Perarnaua a Serry [111]. Věta 3.4.30 o třech mezerách byla dokázána v článcích [128], [134] a [135]. Námi uvedený důkaz náleží vpodstatě F. M. Liangovi [92]. Další souvislosti věty lze nalézt v článku P. Alessandriho a V. Berthé [3]. Z Wikipedie se dozvídáme, že S. Świerczkowski vedle [135] vyřešil i jiný Steinhausův problém, dokázal neexistenci *tetratoru*. Tetratorus by byl uzavřený cyklus (topologický torus, anuloid, pneumatika) několika kopií pravidelného čtyřstěnu v $\mathbb{R}^3$, v němž sousední čtyřstěny sdílejí stěnu. Pro ostatní čtyři platónská tělesa, krychli, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn, takové tory existují (například každý si snadno představí „rám“ z osmi krychlí).

Oddíl 3.5. Problém sečíst řadu $\sum \frac{1}{n^2}$, tak zvaný Basilejský problém, předložil v r. 1644 italský matematik P. Mengoli a o 90 let později ho vyřešil L. Euler. Je nazván podle Eulerova domovského města, jež bylo domovským městem i matematického klanu Bernoulliů, kteří se problémem též (neúspěšně) zabývali. V době internetové není těžké vyhledat tucty důkazů, ale jistou výzvou bylo nalézt důkaz nepoužívající ani integrály ani Fourierovy řady ani komplexní analýzu ba ani Taylorovy řady, protože to vše „jsme ještě neměli“. Nakonec vyhověl důkaz č. 9 v textu R. Chapmana [69] a ten jsme v oddílu předvedli. Chapman se jako na zdroj odkazuje na Apostolovu učebnici [4, úloha 8.46], z níž jsme již dříve citovali. Apostol žádnou referenci neuvádí.

Jaký byl Eulerův původní důkaz? Vlastně nekonečná verze triku s vyjádřením součtu kořenů polynomu jeho koeficienty. „Kořeny“ funkce $f(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ jsou právě nenulová celá čísla a také $f(0) = 1$ (viz část 6 tvrzení 3.4.22 a vyjádření sinu řadou ve větě 3.4.23) a „rozklad na kořenové činitele“ proto je (sloučíme v něm vždy dva činitele pro $t = \pm n$, $n \in \mathbb{N}$)

$$f(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) .$$

Když sinus vyjádříme řadou (věta 3.4.23) a nekonečný součin roznásobíme, dostaneme rovnost

$$1 - \frac{(\pi t)^2}{3!} + \cdots = 1 - t^2 \sum \frac{1}{n^2} + \dots .$$

Porovnáním koeficientů u t^2 máme řešení Basilejského problému:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum \frac{1}{n^2} .$$

Mezery v tomto argumentu jsou: (i) zdůvodnění a platnost vyjádření funkce $f(t)$ uvedeným nekonečným součinem, (ii) nemohla by $f(t)$ mít komplexní kořeny (část 6 tvrzení 3.4.22 popisuje reálné kořeny sinu, nemá ale i nějaké komplexní?) a (iii) zdůvodnění roznásobení nekonečného součinu (porovnání koeficientů je pak už zdůvodněné větou 3.6.15). S jistým úsilím se však dají zacelit a Eulerův důkaz je tak vpodstatě správný a platí.

„Odvození“ Eulerova vzorce ze součtu geometrické řady jsme převzali z knihy [63, str. 2–3] G. Hardyho. Lze ho zrigoróznit?

Oddíl 3.6. Základní a velmi zajímavá literatura o enumerativní kombinatorice jsou knihy pánů Flajoleta a Sedgewicka [49] (jistá verze je volně dostupná na Internetu, důraz je kladen na analytické metody) a Stanleyho [130, 131, 132] (zde naopak analýza skoro absentuje a důraz leží na algebraických argumentech používajících vytvořující funkce a na kombinatorice). Viz též článek [142] P. Trojovského a J. Veselého. Analytické metody v enumerativní kombinatorice nejvíce rozvinul a prosazoval francouzský matematik *Philippe Flajolet (1948–2011)* (sám P. Flajolet by nás asi opravil, že jeho hlavním zájmem je použití analytických metod ne tolik v enumerativní kombinatorice jako v teoretické informatice, třeba při analýze složitosti algoritmů, viz například jeho známý článek [48] o analytických důkazech nejednoznačnosti bezkontextových jazyků).

Oddíl 3.7. Posloupnostmi celých i jiných čísel definovaných lineární rekurencí s konstantními koeficienty, jejichž nejznámějším příkladem jsou právě Fibonacciova čísla, se zabývají stovky, ne-li tisíce článků. My zde uvedeme pouze monografii [41] od G. Everesta, A. van der Poortena, I. Shparlinského a T. Warda. Fibonacciovým číslům se věnuje časopis *The Fibonacci Quarterly*.

Další úlohy

Úloha 3.8.1. *Dokažte tvrzení 3.1.9.*

Úloha 3.8.2. *Podejte protipříklad k části 2 tvrzení 3.1.9 pro neomezenou posloupnost délek závorek.*

Úloha 3.8.3 (Raabeovo kritérium). *Dokažte takzvané Raabeovo kritérium, které zjemňuje podílové kritérium: nechť* $(a_n) \subset (0, +\infty)$, $\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$ *a*

$$\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = c \in \mathbb{R}\ .$$

Pak pro $c > 1$ *řada* $\sum a_n$ *konverguje a pro* $c < 1$ *diverguje.*

Úloha 3.8.4. *Pro* $x \in \mathbb{N}_0$ *nechť* $x!! = x(x-2)(x-4)\ldots$, *kde součin ukončíme posledním kladným členem. Konverguje řada*

$$\sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\ ?$$

Úloha 3.8.5. *Podle důsledku 1.7.61 a jeho důkazu skoro každé reálné číslo* α *z* $(-1, 1)$ *není kořenem žádného nenulového celočíselného polynomu. Dokažte, že každé takové číslo* α *je naopak kořenem nějaké nenulové celočíselné mocninné řady, dokonce spousty z nich: pro každou posloupnost přirozených čísel* $1 < a_1 < a_2 < \ldots$ *existují čísla* $b_n \in \mathbb{N}_0$, *že*

$$\alpha - \sum b_n \alpha^{a_n} = 0\ .$$

Úloha 3.8.6. *Nechť* $b_{n,s}$ *je počet rozkladů* n*-prvkové množiny na sudý počet bloků,* $b_{0,s} = 1$.

$$1 + \sum \frac{b_{n,s} x^n}{n!} = ?\ (x \in \mathbb{R})\ .$$

Úloha 3.8.7. *Nechť* a_n *označuje počet kompozic přirozeného čísla* n *na části z množiny* $\{1,2,3\}$.

$$1+\sum a_n x^n = ?\ (x \in \mathbb{R})\ .$$

Úloha 3.8.8. Rozklad čísla n *je jeho kompozice tvořící nerostoucí posloupnost. Například* 4 *má* $2^3 = 8$ *kompozic ale pouze* 5 *rozkladů:* $(4), (3,1), (2,2), (2,1,1)$ *a* $(1,1,1,1)$. *Nechť* a_n *označuje počet rozkladů přirozeného čísla* n *na části z množiny* $\{1,2,3\}$.

$$1+\sum a_n x^n = ?\ (x \in \mathbb{R})\ .$$

Úloha 3.8.9. Perfektní rozklad čísla n *je takový rozklad (podle definice v předchozí úloze), že každé číslo* $1,2,\ldots,n$ *má jednoznačné vyjádření jako součet některých členů rozkladu. Například rozklad* $(2,2,1)$ *čísla* 5 *je perfektní (jednoznačně* $1=1$, $2=2$, $3=2+1$, $4=2+2$ *a* $5=2+2+1$*), ale rozklady* $(3,2)$ *a* $(2,1,1,1)$ *perfektní nejsou. Dokažte, že počet perfektních rozkladů čísla* n *se rovná počtu* f_{n+1} *uspořádaných faktorizací čísla* $n+1$.

Úloha 3.8.10 (počítání Fibonacciových čísel). *Ukažte, že Fibonacciova čísla splňují pro* $n \in \mathbb{N}$ *maticovou identitu*

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}\ .$$

Odvoďte odtud, že f_n *lze spočítat pomocí nejvýše* $c \log n$ *aritmetických operací, kde* $c \in \mathbb{N}$ *je konstanta.*

Úloha 3.8.11 (Viètova formule). *Dokažte identitu*

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2},\ a_1 = \sqrt{2} \ \text{ a } \ a_{i+1} = \sqrt{2+a_i}\ .$$

Úloha 3.8.12. *Navštivte v Praze Basilejské náměstí. Je tu nějaká souvislost s trigonometrií?*

Úloha 3.8.13. *Vezměte za dané, že vyjádření Bernoulliových čísel* B_n *Taylorovou řadou, uvedené výše v poznámkách k oddílu 3.1, platí pro každé* $x \in \mathbb{C}$ *s* $|x| < 2\pi$. *Odvoďte odtud, že* $B_{2n+1} = 0$ *pro* $n = 1,2,\ldots$ *a že* $\limsup |B_{2n}| = +\infty$, *dokonce* $\limsup |B_{2n}|^{1/2n} = +\infty$.

Úloha 3.8.14. *Dokažte pro* $s > 1$ *identitu*

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\ .$$

Definiční obor $\zeta(s)$, *interval* $(1,+\infty)$, *tak můžeme rozšířit na? Čemu se pak rovná* $\zeta(\frac{1}{2})$*?*

Úloha 3.8.15 (nekonečně mnoho prvočísel). *Množina $A \subset \mathbb{Z}$ je periodická, když ji lze netriviálně posunout tak, že se nezmění: $A + x = A$ pro nějaké $x \in \mathbb{N}$. Ukažte, že když je množina prvočísel P konečná, pak v rovnosti*

$$\bigcup_{p \in P} p\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \backslash \{-1, 1\}$$

je levá strana periodická, ale pravá není, což dává spor.

Úloha 3.8.16 (nekonečný součin pro e^z). *Dokažte formálně nekonečný součin pro exponenciálu, uvedený výše v poznámkách k oddílu 3.3, ve zlogaritmovaném tvaru*

$$z = \sum \frac{\mu(n)}{n} \log \frac{1}{1 - z^n}\ .$$

Použijte přitom (předbíháme, ale někdy to jinak nejde) rozvoj $\log \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$.

Úloha 3.8.17. *Dokažte formální identitu s n proměnnými*

$$\begin{aligned} &a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1 a_2 + \dots + a_0 a_1 \dots a_n \\ &= \cfrac{a_0}{1 - \cfrac{a_1}{1 + a_1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{a_3}{\cfrac{\vdots}{1 + a_{n-1} - \cfrac{a_n}{1 + a_n}}}}}}\ . \end{aligned}$$

Úloha 3.8.18 (řetězový zlomek pro e^x). *Odtud získejte formální identitu*

$$\begin{aligned} &1 + \sum \frac{x^n}{n!} \\ &= \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{x + 1 - \cfrac{x/2}{x/2 + 1 - \cfrac{x/3}{x/3 + 1 - \cfrac{x/4}{\vdots}}}}} \end{aligned}$$

a odvoďte řetězový zlomek pro e^x uvedený výše v poznámkách k oddílu 3.3.

Úloha 3.8.19. *Popište A a systém N částic, který není mezi těmi 99.99% z Beckova příkladu (poznámky k oddílu 3.3) a je po celé století nevyvážený.*

Kapitola 4

Limity funkcí a spojité funkce

Zavedeme limitu funkce v bodě, který může být nevlastní a o němž pouze předpokládáme, že je limitním bodem definičního oboru funkce. Definujeme spojitost funkce v bodě. Probereme základní vlastnosti této limity — Heineho definici pomocí posloupnosti a vztah k uspořádání, aritmetickým operacím a operaci skládání funkcí. V druhém oddílu uvažujeme funkce spojité v každém bodě dané množiny, obvykle definičního oboru. Dokážeme, že funkce spojitá na intervalu nabývá každou mezihodnotu a že funkce spojitá na kompaktní množině, což je například interval $[a, b]$, nabývá nejmenší i největší hodnotu. Pochopitelně zavedeme otevřené, uzavřené a kompaktní množiny. Jak uvidíme, spojitá prostá funkce zachovává otevřené množiny. Dokážeme, že inverzní funkce k prosté funkci f spojité na množině M je spojitá na $f(M)$, když je M otevřená množina nebo interval nebo kompaktní množina nebo, při monotonii f, uzavřená množina. Uvedeme příklad spojité prosté funkce, jejíž inverz není nikde spojitý. Zavedeme některé třídy funkcí spojitých na množině.

Funkce jsme definovali v oddílu 1.2. Budeme pracovat s funkcemi typu

$$f\colon M \to \mathbb{R}\,,$$

kde $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Pro $N \subset M$ označuje $f(N) = \{f(x) \mid x \in N\}$ obraz N zobrazením f.

4.1 Limita funkce v bodě

Různé druhy okolí bodu. Limitní bod množiny. Limita funkce v bodě. Jednoznačnost limity. Spojitost funkce v bodě. Heineho definice limity. Aritmetika limit, limita a monotonie, limita a uspořádání. Limita složené funkce — obecná verze. Limita inverzu.

Zavedeme různá okolí bodu a limitní body.

Definice 4.1.1 (okolí bodu). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$. Množiny*

$$U(a,\, \delta) := (a - \delta,\, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \delta\}\ ,$$

$$U(-\infty,\, \delta) := (-\infty,\, -1/\delta) \quad a \quad U(+\infty,\, \delta) := (1/\delta,\, +\infty)$$

nazveme δ-okolím bodu a, resp. $-\infty$ či $+\infty$. Prstencové δ-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ je

$$P(a,\, \delta) := U(a,\, \delta)\backslash\{a\} = (a - \delta,\, a) \cup (a,\, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}\ .$$

Pravé δ-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, obyčejné a prstencové, je

$$U^+(a,\, \delta) := [a,\, a + \delta) \quad a \quad P^+(a,\, \delta) := (a,\, a + \delta)\ .$$

Podobně se definuje levé δ-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, obyčejné $U^-(a, \delta) = (a - \delta, a]$ a prstencové $P^-(a, \delta) = (a - \delta, a)$. Pro $a = \pm\infty$ prstencová a jednostranná okolí definujeme jako rovná obyčejnému okolí $U(\pm\infty, \delta)$.

Pro každé $a \in \mathbb{R}^*$ se pro δ jdoucí k 0 okolí $U(a, \delta)$ svírá kolem a tak, že nakonec vypudí každý bod b různý od a: platí $0 < \delta' < \delta \Rightarrow U(a, \delta') \subset U(a, \delta)$ a také $a \neq b \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \colon b \notin U(a, \delta)$. Platí ještě více:

Úloha 4.1.2. *Nechť $A, B \in \mathbb{R}^*$ s $A < B$. Pak existuje $\delta > 0$, že*

$$x \in U(A,\, \delta),\ y \in U(B,\, \delta) \Rightarrow x < y\ .$$

Definice 4.1.3 (limitní bod). *Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Pak $a \in \mathbb{R}^*$ je limitním bodem množiny M, když pro každé $\delta > 0$ je*

$$P(a,\, \delta) \cap M \neq \emptyset\ .$$

Ekvivalentně řečeno, $a = \lim a_n$ pro nějakou posloupnost $(a_n) \subset M\backslash\{a\}$.

Úloha 4.1.4. *Dokažte, že obě definice limitního bodu jsou opravdu ekvivalentní.*

Limitní bod a tedy může být i nevlastní a je charakterizován tím, že se k němu lze libovolně blízko přiblížit prvkem z M různým od a. Může i nemusí v M ležet.

Následující definice je stejně důležitá jako definice limity posloupnosti, kterou zobecňuje.

Definice 4.1.5 (limita funkce v bodě). *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina, $a \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod M, $f \colon M \to \mathbb{R}$ je funkce a $A \in \mathbb{R}^*$. Definujeme*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \iff \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : \ f(P(a,\, \delta) \cap M) \subset U(A,\, \varepsilon)\ .$$

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v a limitu A.

Jinými slovy, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že když $x \in P(a, \delta)$ a f je v x definovaná, pak nutně $f(x) \in U(A, \varepsilon)$. Jak a tak A může být nevlastní prvek. Všimněte si, že $\lim_{x \to a} f(x)$ nezávisí na hodnotě $f(a)$, docela dobře může být a mimo M a hodnota $f(a)$ nebýt definovaná. Je dobré si uvědomit následující.

Úloha 4.1.6. *Ukažte, že když $a \in \mathbb{R}^*$ není limitním bodem M, potom (podle ekvivalence v definici 4.1.5) pro každé $A \in \mathbb{R}^*$ je $\lim_{x \to a} f(x) = A$ — limitou $f(x)$ v a je úplně cokoli, což je nesmysl. Proto se požaduje, aby a byl limitním bodem definičního oboru funkce f.*

Definice 4.1.5 zobecňuje limitu posloupnosti: posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je vlastně funkce $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $+\infty$ je limitním bodem $\mathbb{N}$ a

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{x \to +\infty} a(x)$$

(nebo ani jedna strana rovnosti neexistuje).

Tvrzení 4.1.7 (jednoznačnost limity funkce). *Když $\lim_{x \to a} f(x)$ existuje, je určena jednoznačně.*

Důkaz. Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod M, $A, B \in \mathbb{R}^*$ jsou dva různé prvky a $\lim_{x \to a} f(x) = A$ i $\lim_{x \to a} f(x) = B$. Pak vezmeme $\varepsilon > 0$, že $U(A, \varepsilon) \cap U(B, \varepsilon) = \emptyset$ (úloha 4.1.2). Mělo by existovat $\delta > 0$, že

$$f(P(a,\, \delta) \cap M) \subset U(A,\, \varepsilon) \ \text{ i } \ f(P(a,\, \delta) \cap M) \subset U(B,\, \varepsilon)$$

a tedy

$$f(P(a,\, \delta) \cap M) \subset U(A,\, \varepsilon) \cap U(B,\, \varepsilon) = \emptyset\ .$$

To není možné, $P(a, \delta) \cap M \neq \emptyset$. □

Uvedeme několik příkladů limit funkcí. Nechť $a, A \in \mathbb{R}$ a f je definovaná na nějakém $P(a, \delta_0)$. Pak

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0:\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\ .$$

Nechť $a = -\infty, A = +\infty$ a $M = \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, c\ \exists\, d:\ x < d \Rightarrow f(x) > c$$

($c, d \in \mathbb{R}$ a představujeme si je jako hodně záporné, respektive hodně kladné, číslo). Uvažme funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definovanou jako

$$g(x) = \begin{cases} x & \ldots \quad x \neq 0 \\ 2014 & \ldots \quad x = 0\ . \end{cases}$$

Pak samozřejmě $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, protože pro limitu v 0 je hodnota $g(0)$ irelevantní. Funkce znaménka $\mathrm{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ zvaná signum je definovaná jako

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \ldots \quad x < 0 \\ \ \ 0 & \ldots \quad x = 0 \\ \ \ 1 & \ldots \quad x > 0\ . \end{cases}$$

Pro ni $\lim_{x \to 0} \mathrm{sgn}(x)$ neexistuje a $\lim_{x \to a} \mathrm{sgn}(x)$ je 1 pro každé $a > 0$ a -1 pro každé $a < 0$.

Úloha 4.1.8. *Funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ buď definována jako*

$$f(\tfrac{p}{q}) = \frac{1}{q}\ ,$$

přičemž zlomek $\frac{p}{q}$ je v základním tvaru. Dokažte, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0\ .$$

Dokažte, že ani jedna limita $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ v nekonečnu neexistuje.

Tvrzení 4.1.9 (limita exponenciály). *Platí rovnost*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\ .$$

Důkaz. Postupujeme jako v důkazu tvrzení 3.3.5: když $x \in P(0, \frac{1}{2})$, tak

$$\left|\frac{e^x - 1}{x} - 1\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+1)!} < \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n = \frac{|x|}{1-|x|} < 2|x|\ ,$$

kde jsme použili vzorec pro součet geometrické řady. Tedy, pro $0 < \delta < \frac{1}{2}$, $x \in P(0,\delta) \Rightarrow \frac{e^x-1}{x} \in U(1, 2\delta)$, což dává naši limitu. $\square$

Úloha 4.1.10. *Odvoďte limity*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad a \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \frac{1}{2}\ .$$

Definice 4.1.11 (jednostranná limita funkce v bodě). *Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$ pro neprázdnou množinu $M \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a pro každé $\delta > 0$ je*

$$P^+(a,\,\delta) \cap M \ne \emptyset$$

(takže a je „limitním bodem množiny M zprava“). Pak definujeme

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A \iff \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0:\ f(P^+(a,\,\delta)\cap M) \subset U(A,\,\varepsilon)\ .$$

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu zprava rovnou A. Podobně definujeme limitu zleva, $P^+(a,\delta)$ se nahradí levým okolím $P^-(a,\delta)$. V nevlastních bodech $a = \pm\infty$ se jednostranné limity neuvažují.

Například $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$ a $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$.

Úloha 4.1.12. *Rozmyslete si, že ($a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$)*

$$\left(\lim_{x\to a^+} f(x) = A\ \&\ \lim_{x\to a^-} f(x) = A\right) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A$$

a

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Rightarrow \left(\lim_{x\to a^+} f(x) = A\ \vee\ \lim_{x\to a^-} f(x) = A\right)$$

a proč poslední disjunkci nemůžeme nahradit konjunkcí.

Definice 4.1.13 (spojitost funkce v bodě). *Nechť* $a \in M \subset \mathbb{R}$ *a je dána funkce* $f\colon M \to \mathbb{R}$*. Řekneme, že* $f(x)$ *je spojitá v bodě* a*, pokud*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \; f(U(a, \delta) \cap M) \subset U(f(a), \varepsilon) \, .$$

Jinými slovy, spojitost $f(x)$ v a znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \; x \in M, \; |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \, .$$

Dostatečně malá změna v argumentu funkce f tedy způsobí jen předem omezenou malou změnu funkční hodnoty.

Je tu jeden rozdíl ve srovnání s limitou. Když $a \in M$ není limitním bodem M, pro nějaké $\delta > 0$ je $U(a, \delta) \cap M = \{a\}$, není podle definice 4.1.5 $\lim_{x \to a} f(x)$ definovaná. Ale podle právě uvedené definice je v této situaci $f(x)$ spojitá v a. Je-li $a \in M$ limitním bodem M, spojitost $f(x)$ v a je ekvivalentní rovnosti

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \, .$$

Definuje se i jednostranná spojitost: když $a \in M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ a

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \; f(U^+(a, \delta) \cap M) \subset U(f(a), \varepsilon) \, ,$$

řekneme, že $f(x)$ je v a *zprava spojitá*. Podobně pro spojitost zleva.

Následující věta ukazuje, že limitu funkce v bodě lze ekvivalentně popsat jen pomocí limity posloupnosti.

Věta 4.1.14 (Heineho definice limity funkce). *Nechť* $a \in \mathbb{R}^*$ *je limitním bodem množiny* $M \subset \mathbb{R}$*,* $A \in \mathbb{R}^*$ *a* $f\colon M \to \mathbb{R}$*. Pak jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní.*

1. $\lim_{x \to a} f(x) = A$.
2. *Pro každou posloupnost* $(x_n) \subset M \backslash \{a\}$ *s* $\lim x_n = a$ *je* $\lim f(x_n) = A$.

Důkaz. Nechť platí 1. Je dána posloupnost $(x_n) \subset M$, že $\lim x_n = a$, ale $x_n \neq a$ pro každé n. Nepřítel dal $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu o $f(x)$ vezmeme $\delta > 0$, že $f(P(a, \delta) \cap M) \subset U(A, \varepsilon)$. Podle předpokladu o (x_n) existuje n_0, že pro každé $n > n_0$ je $x_n \in P(a, \delta) \cap M$. Pro $n > n_0$ je tedy $f(x_n) \in U(A, \varepsilon)$, což jsme chtěli dokázat — $\lim f(x_n) = A$.

Nechť 1 neplatí. Takže (negujeme definici limity funkce) existuje $\varepsilon > 0$, že pro každé $\delta > 0$ existuje bod $x \in P(a, \delta) \cap M$, že $f(x) \notin U(A, \varepsilon)$. Pro $n = 1, 2, \ldots$ a $\delta = \frac{1}{n}$ zvolíme takový bod $x = x_n$ (že $x_n \in P(a, \frac{1}{n}) \cap M$, ale $f(x_n) \notin U(A, \varepsilon)$). Vzniklá posloupnost $(x_n) \subset M$ popírá část 2: zřejmě $x_n \neq a$ pro každé n a $\lim x_n = a$, avšak posloupnost $(f(x_n))$ nemá za limitu A, každý její člen leží mimo $U(A, \varepsilon)$. $\square$

Věta nese jméno německého matematika *Eduarda Heineho (1821–1881)*, kterého známe z poznámek v oddílu 1.8, nikoli básníka a literáta *Heinricha Heineho*

(1797–1856). Umožňuje dokázat neexistenci limity funkce, stačí předložit dvě posloupnosti jdoucí k a, na nichž funkční hodnoty mají různé limity. Například

$$\lim_{x\to 0} \sin(\tfrac{1}{x}) \text{ neexistuje },$$

protože $(x_n) = (\frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \dots)$ i $(y_n) = (\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \dots)$ jde k 0 a netrefuje se do ní, avšak $(\sin(\frac{1}{x_n})) = (1, 1, \dots) \to 1$, ale $(\sin(\frac{1}{y_n})) = (-1, -1, \dots) \to -1$.

Důsledek 4.1.15 (Heineho definice spojitosti). *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Pak*

$$f \textit{ je spojitá v } a \iff \forall\,(a_n) \subset M:\ \lim a_n = a \Rightarrow \lim f(a_n) = f(a)\,.$$

Důkaz. Když a není limitní bod M, je f v a spojitá. Jediná $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = a$ splňuje $a_n = a$ pro $n > n_0$ a pravá strana ekvivalence platí. Nechť a je limitní bod M. Když f není v a spojitá, pak $\lim_{x\to a} f(x)$ není $f(a)$, takže podle věty 4.1.14 existuje posloupnost $(a_n) \subset M\backslash\{a\}$, že $a_n \to a$, ale $\lim f(a_n)$ není $f(a)$, takže pravá strana ekvivalence neplatí. Když je f v a spojitá, je $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Nechť $(a_n) \subset M$ jde k a. Pak podposloupnost členů a_n pro něž $a_n \neq a$ (když je nekonečná, jinak není problém) jde též k a, takže podle věty 4.1.14 hodnoty funkce na ní jdou k $f(a)$ a tedy $\lim f(a_n) = f(a)$ pro celou posloupnost (a_n). Pravá strana ekvivalence platí. □

Úloha 4.1.16. *Pomocí Heineho definice limity funkce dokažte převedením na aritmetiku limit posloupností části 2 a 3 následujícího tvrzení a důsledek.*

Tvrzení 4.1.17 (aritmetika limit funkcí). *Nechť $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, a je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, $f, g\colon M \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Pak*

1. *$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$, je-li součet vpravo definován,*
2. *$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$, je-li součin vpravo definován a*
3. *$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, je-li podíl vpravo definován.*

Důkaz. 1. Nechť $(x_n) \subset M\backslash\{a\}$ je libovolná posloupnost s limitou a. Podle věty 4.1.14 (implikace 1 $\Rightarrow$ 2) mají posloupnosti $(f(x_n))$ a $(g(x_n))$ limity A a B. Podle tvrzení 4.1.17 je

$$\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = A + B\,,$$

je-li tento součet definován. Podle věty 4.1.14 (implikace 2 $\Rightarrow$ 1) dostáváme $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$. □

Úloha 4.1.18. *Čím se případ, kdy v části 3 je $B = 0$, odlišuje od ostatních případů tohoto tvrzení?*

Důsledek 4.1.19 (aritmetika spojitosti). *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ a funkce $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ jsou v a spojité. Pak je v a spojitá i součtová funkce $f(x) + g(x)$, součinová funkce $f(x)g(x)$ a při $g(a) \neq 0$ i podílová funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$.*

Když $f\colon M \to \mathbb{R}$ a $N \subset M$, řekneme, že f je *na N neklesající*, když $x, y \in N, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Podobně pro nerostoucí funkci a klesající a rostoucí funkci.

Tvrzení 4.1.20 (limita monotónní funkce). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, kde $a < b$, a $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce (neklesající nebo nerostoucí). Pak obě limity*

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad a \quad \lim_{x \to b} f(x)$$

existují (mohou být nevlastní).

Důkaz. Nechť je $f(x)$ na intervalu (a, b) neklesající. Ukážeme, že

$$\lim_{x \to b} f(x) = \sup(\{f(x) \mid x \in (a, b)\}) =: \alpha \ ,$$

kde pro shora neomezenou množinu $\{\dots\}$ definujeme $\alpha = +\infty$. Postupujeme jako v důkazu tvrzení 2.1.13 o limitě monotónní posloupnosti. Podle vlastností suprema pro každé $v \in \mathbb{R}$ s $v < \alpha$ existuje $u \in (a, b)$, že

$$v < f(u) \leq \alpha \ .$$

Díky monotonii $f(x)$ a vlastnostem suprema tyto nerovnosti platí i pro každé $f(x)$ s $u \leq x < b$. Odtud máme $\lim_{x \to b} f(x) = \alpha$. Zbylé tři případy (nerostoucí $f(x)$ a/nebo limita v a) jsou podobné. □

Úloha 4.1.21. *Zobecněte předchozí tvrzení na monotónní funkce, jejichž definiční obor není interval.*

Úloha 4.1.22. *Dokažte části 2 a 3 následující tvrzení, jež je obdobou tvrzení 2.1.25 a 2.1.28.*

Tvrzení 4.1.23 (limita funkce a uspořádání). *Nechť f, g a h jsou reálné funkce, $a \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod jejich definičních oborů D_f, D_g a D_h,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^* \quad a \quad \lim_{x \to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^* \ .$$

Pak platí následující.

1. *Když $A < B$, pak existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in P(a, \delta) \cap D_f$ a každé $y \in P(a, \delta) \cap D_g$ je $f(x) < g(y)$.*

2. *Když pro každé $\delta > 0$ existují body $x \in P(a, \delta) \cap D_f$ a $y \in P(a, \delta) \cap D_g$ s $f(x) \leq g(y)$, pak $A \leq B$.*

3. (dva strážníci) Pro jednoduchost nechť $D_f = D_g = D_h = D$. Když $A = B$ a existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in P(a, \delta) \cap D$ je $f(x) \le h(x) \le g(x)$, pak i $\lim_{x\to a} h(x) = A$.

Důkaz. 1. Vezmeme $\varepsilon > 0$, že pro každé $x \in U(A, \varepsilon)$ a každé $y \in U(B, \varepsilon)$ je $x < y$ (úloha 4.1.2). Pro toto ε vezmeme $\delta > 0$, že

$$f(P(a,\, \delta) \cap D_f) \subset U(A,\, \varepsilon) \ \text{ a } \ g(P(a,\, \delta) \cap D_g) \subset U(B,\, \varepsilon)\ .$$

Toto δ má patrně požadovanou vlastnost. □

Podobně jako u tvrzení 2.1.25 se v přednáškách, skriptech a učebnicích setkáváme výhradně (neviděl jsem nikde nic jiného) se slabší variantou tvrzení mající $x = y$. Jak bylo poznamenáno dříve k tvrzení 2.1.25, netřeba se okrádat a uvádět mnohem slabší závěr, než z předpokladu přirozeně plyne.

Následující tvrzení uvažuje skládání funkcí, což je operace, kterou nelze provádět s posloupnostmi. Jeho formulace je trochu složitější, protože ho formulujeme pro funkce s obecnými definičními obory. Většinou se uvádí jen pro definiční obory rovné prstencovým okolím.

Tvrzení 4.1.24 (limita složené funkce). *Nechť $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, a je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, A je limitní bod množiny $N \subset \mathbb{R}$ a jsou dány funkce $g\colon M \to \mathbb{R}$ a $f\colon N \to \mathbb{R}$ s limitami*

$$\lim_{x\to a} g(x) = A \ \text{ a } \ \lim_{x\to A} f(x) = B\ .$$

Nechť pro každé $\delta > 0$ je

$$g(P(a,\, \delta) \cap M) \cap N \ne \emptyset$$

— pak je a limitním bodem definičního oboru složené funkce $f(g(x))$. Potom platí

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = B\ ,$$

je-li splněna jedna ze dvou podmínek:

1. *funkce f je v A spojitá, takže $A \in N$ a $f(A) = B$, nebo*
2. *existuje $\delta > 0$, že $A \notin g(P(a, \delta) \cap M)$.*

Důkaz. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu o limitách existuje $\delta > 0$, že

$$f(P(A,\, \delta) \cap N) \subset U(B,\, \varepsilon)$$

a pak existuje $\theta > 0$, že

$$g(P(a,\, \theta) \cap M) \subset U(A,\, \delta)\ .$$

Je-li splněna podmínka 1, je dokonce

$$f(U(A,\, \delta) \cap N) \subset U(B,\, \varepsilon)\ .$$

Tedy

$$f(g(P(a,\,\theta)\cap M)\cap N)\subset f(U(A,\,\delta)\cap N)\subset U(B,\,\varepsilon)$$

a $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$. Je-li splněna podmínka 2, po případném zmenšení θ je

$$g(P(a,\,\theta)\cap M)\subset P(A,\,\delta)\ .$$

Tedy

$$f(g(P(a,\,\theta)\cap M)\cap N)\subset f(P(A,\,\delta)\cap N)\subset U(B,\,\varepsilon)$$

a $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$. □

Úloha 4.1.25. *Dokažte, že když ani jedna z obou podmínek není splněna — $A \in N$, ale $f(A) \neq B$, a $g(x) = A$ pro nějaká $x \in M$ libovolně blízko u a ale různá od a — pak $\lim_{x\to a} f(g(x))$ není B.*

Úloha 4.1.26. *Ukažte, že když M a N jsou prstencová okolí a a A (jak se tvrzení o limitě složené funkce obvykle formuluje), pak je podmínka*

$$\forall\,\delta > 0:\ \ g(P(a,\,\delta)\cap M)\cap N \neq \emptyset$$

nadbytečná.

Úloha 4.1.27. *Ukažte na příkladu, že obecně podmínka*

$$\forall\,\delta > 0:\ \ g(P(a,\,\delta)\cap M)\cap N \neq \emptyset$$

není nadbytečná — bez ní může být splněna podmínka 1 i podmínka 2, ale

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) \text{ přesto není } B\ ,$$

protože a není limitním bodem definičního oboru funkce $f(g(x))$.

Například pro funkci $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ tvrzení 4.1.24 dává ekvivalenci

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = B \iff \lim_{x\to 0} f(\tfrac{1}{x}) = B\ .$$

Platí-li levá strana, substituujeme totiž za x funkci $g(x) = \frac{1}{x}\colon (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ s limitou $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$. Platí-li pravá strana, substituujeme za x stejnou funkci $g(x)$, ale s limitou $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Pokaždé je splněna podmínka 2.

Úloha 4.1.28. *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 4.1.29 (spojitost složeniny). *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a reálná funkce $g(x)$, resp. $f(x)$, je definovaná i spojitá v a, resp. v $g(a)$. Potom je složená funkce $f(g(x)$ definovaná i spojitá v a.*

A co inverzní funkce? Následující úloha formuluje podmínku pro její spojitost v bodě pomocí výchozí funkce. Spojitostí inverzní funkce se budeme dosti podrobně zabývat v následujícím oddílu.

Úloha 4.1.30. *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ je prostá a $b = f(a)$. Dokažte, že inverzní funkce*

$$f^{-1}\colon f(M) \to \mathbb{R}$$

je spojitá v bodě b, právě když pro žádné $\delta > 0$ není b limitním bodem množiny $f(M \backslash P(a, \delta))$.

Úloha 4.1.31. *Dokažte následující tvrzení a obě možnosti jeho závěru ilustrujte příklady.*

Tvrzení 4.1.32 (limita inverzu). *Nechť $a, A \in \mathbb{R}^*$, a je limitním bodem množiny $M \subset \mathbb{R}$ a prostá funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ má limitu $\lim_{x \to a} f(x) = A$. Pak je A limitním bodem množiny $f(M)$ a*

$$\lim_{x \to A} f^{-1}(x) = a \text{ nebo tato limita neexistuje}\,.$$

4.2 Funkce spojité na množině

Spojitost funkce na množině. Nabývání mezihodnot a zobrazování intervalů. Otevřené, uzavřené a kompaktní množiny, ba i obojetné množiny. Otevřené zobrazení, charakterizace kompaktnosti konvergencí a princip maxima a minima. Zajímavosti o spojitosti inverzu, např. spojitá funkce s všude nespojitým inverzem, postačující podmínky jeho spojitosti. Jak vyjádřit nespojité signum spojitými funkcemi.

Připomeňte si definici 4.1.13 spojitosti funkce v bodě. Spojitost funkce na množině znamená spojitost v každém jejím bodě.

Definice 4.2.1 (spojitost na množině). *Nechť $N \subset M \subset \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá na množině N, je-li spojitá v každém bodu $a \in N$. Pro $N = M$ budeme stručně psát a říkat, že f je spojitá.*

Například funkce signum (kterou jsme již definovali)

$$\mathrm{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1,\, 0,\, 1\} \;\text{ s }\; \mathrm{sgn}(0) = 0 \;\text{ a }\; \mathrm{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} \;\text{ pro }\; x \neq 0$$

není spojitá, není spojitá v 0, ale je spojitá na množině $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Tato funkce není v 0 ani jednostranně spojitá. Identická funkce $f(x) = x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá, stejně jako každá konstantní funkce $f_c(x) = c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Dále je každá funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ spojitá. To není až tak šokující, ale v oddílu 4.5 se seznámíme s překvapivějším faktem. Podle tvrzení 3.3.5 je $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce (která je i prostá). Lze to dokázat i bez použití identity

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

jen z definice exponenciály řadou, jak ukazuje následující úloha.

Úloha 4.2.2. *Nechť řada $\sum a_n r^n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$ a $r > 0$, absolutně konverguje. Dokažte, že pak každá řada $\sum a_n x^n$, $x \in [-r, r]$, absolutně konverguje a že funkce $f\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = a_0 + \sum a_n x^n \quad (a_0 \in \mathbb{R} \text{ je libovolné})\,,$$

je spojitá.

Úloha 4.2.3. *O funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$ se říká, že je* lipschitzovská *na M, když existuje konstanta $c > 0$, že pro každé dva prvky $x, y \in M$ je*

$$|f(x) - f(y)| \le c|x - y|\,.$$

Ukažte, že z lipschitzovskosti plyne spojitost. Ukažte na příkladu, že naopak to neplatí.

Takové funkce se jmenují podle německého matematika *Rudolfa Lipschitze (1832–1903)* (kromě analýzy se zabýval se i teorií čísel, klasickou mechanikou a diferenciální geometrií).

Graf spojité funkce prochází všemi mezihodnotami.

Věta 4.2.4 (o mezihodnotě). *Nechť $a, b, y \in \mathbb{R}$, $a < b$,*

$$f\colon [a, b] \to \mathbb{R},\ f(a) < y < f(b) \ \ \textit{nebo} \ \ f(a) > y > f(b)$$

a f je spojitá. Pak existuje $\alpha \in (a, b)$, že $f(\alpha) = y$.

Důkaz. Nechť $f(a) < y < f(b)$, druhý případ je podobný. Pro $n \in \mathbb{N}$ rozdělíme $[a, b]$ na n intervalů $[a_n(i), b_n(i)]$, $i \in [n]$, délky $\frac{b-a}{n}$, takže $a_n(i) = a + (i - 1)\frac{b-a}{n}$ a $b_n(i) = a + i\frac{b-a}{n}$. Pak vždy existuje $i_n \in [n]$, že $f(a_n(i_n)) \le y \le f(b_n(i_n))$ (úloha 4.2.5). Podle důsledku 2.2.9 (věty 2.2.5) můžeme přechodem k podposloupnostem předpokládat, že $\lim a_n(i_n) = \lim b_n(i_n) = \alpha \in [a, b]$. Podle důsledku 4.1.15 a tvrzení 2.1.25 je

$$f(\alpha) = \lim f(a_n(i_n)) \le y \le \lim f(b_n(i_n)) = f(\alpha)$$

a tedy $f(\alpha) = y$. Patrně $\alpha \ne a, b$.

Jiný důkaz. Nechť

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) < y\} \ \text{ a } \ \alpha := \sup(A) \in [a, b]\,.$$

Patrně, díky spojitosti f v a a v b, $a < \alpha < b$. Kdyby $f(\alpha) < y$, díky spojitosti f v α je $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset A$ pro nějaké $\varepsilon > 0$ a α není horní mez A. Kdyby $f(\alpha) > y$, z podobného důvodu je $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap A = \emptyset$ pro nějaké $\varepsilon > 0$ a máme spor s aproximační vlastností suprema. Tedy $f(\alpha) = y$. □

Úloha 4.2.5. *Proč v důkazu existuje uvedený index* $i_n \in [n]$*?*

Úloha 4.2.6. *Nechť* $M = [0,1]\backslash\{\frac{1}{2}\}$*. Sestrojte spojitou funkci* $f\colon M \to \mathbb{R}$*, že* $f(0) = -1$ *a* $f(1) = 1$*, ale pro žádné* $x \in M$ *není* $f(x) = 0$*. Totéž pro množinu* $M = [0,1] \cap \mathbb{Q}$*.*

Důsledek 4.2.7 (obraz intervalu spojitou funkcí). *Když je* $I \subset \mathbb{R}$ *interval a* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *je spojitá, je obraz* $f(I) \subset \mathbb{R}$ *též interval.*

Důkaz. Z věty 4.2.4 plyne, že když $u, v \in f(I)$ a $u < w < v$, potom $w \in f(I)$. Takže $f(I)$ je interval. □

Důsledek 4.2.8 (monotonie a spojitost). *Když je* $I \subset \mathbb{R}$ *interval a* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *je prostá a spojitá, je* f *na* I *rostoucí nebo klesající.*

Důkaz. Kdyby f nebyla na I monotónní, byly by v I tři body $a < b < c$, že $f(a) < f(b) > f(c)$ nebo $f(a) > f(b) < f(c)$. Věta 4.2.4 pak dává spor s prostotou f: v prvním případě je každé $y \in (\max(f(a), f(c)), f(b))$ hodnotou f na (a, b) i na (b, c) a podobně ve druhém. □

Následující rébus je v různých obměnách docela populární, i my ho proto uvedeme.

Úloha 4.2.9. *Horolezec začne o půlnoci v čase* 0 *výstup ze základního tábora na vrchol hory. Ten dosáhne po přesně 24 hodinách o půlnoci a okamžitě se vrací zpět do základního tábora, kam se dostane opět po 24 hodinách o půlnoci. Dokažte, že existuje čas* $t \in [0, 24]$*, kdy se horolezec první den při výstupu a druhý den při sestupu nachází v téže nadmořské výšce.*

Podobná je úloha 4.6.6.

Zavedeme tak zvané *kompaktní* množiny. Mají důležitou vlastnost, že na nich každá spojitá funkce nabývá nejmenší i největší hodnotu. K jejich definici potřebujme i tak zvané otevřené a uzavřené množiny.

Definice 4.2.10 (kompaktní množiny). *Množina* $M \subset \mathbb{R}$ *je*

1. *otevřená, když pro každé* $a \in M$ *existuje* $\delta > 0$*, že* $U(a, \delta) \subset M$*;*
2. *uzavřená, když její doplněk* $\mathbb{R}\backslash M$ *je otevřená množina;*
3. *omezená, když existují* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$*, že* $M \subset [a, b]$ *a je*
4. *kompaktní, je-li* M *uzavřená a omezená.*

Například každý interval (a, b), $-\infty \le a < b \le +\infty$, je otevřená množina a každý interval $[a, b]$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, je uzavřená množina (kde pro $a = -\infty$ chápeme $[a$ jako $(a$ a podobně pro pravý konec). Následující úlohy však ukazují, že třídy otevřených a uzavřených množin jsou mnohem obsáhlejší.

Úloha 4.2.11. *Dokažte: $\emptyset$ a $\mathbb{R}$ jsou otevřené množiny; jsou-li $A, B \subset \mathbb{R}$ otevřené, je i průnik $A \cap B$ otevřená množina; sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.*

Úloha 4.2.12. *Zformulujte a dokažte obdoby předchozích vlastností pro uzavřené množiny.*

Hezké cvicení na supremum (či infimum) je toto.

Úloha 4.2.13. *Dokažte, že kromě $\emptyset$ a $\mathbb{R}$ neexistují (na reálné ose) jiné množiny, které jsou otevřené i uzavřené. V topologii se takovým množinám říká obojetné.*

Tvrzení 4.2.14 (spojitost a otevřené množiny). *Funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá, právě když pro každou otevřenou množinu $A \subset \mathbb{R}$ existuje otevřená množina $B \subset \mathbb{R}$, že*

$$f^{-1}(A) = M \cap B\ .$$

Důkaz. Nechť je f spojitá, $A \subset \mathbb{R}$ je otevřená a $a \in f^{-1}(A)$ (pro $f^{-1}(A) = \emptyset$ vezmeme též $B = \emptyset$). Vezmeme $\varepsilon > 0$, že $U(f(a), \varepsilon) \subset A$, a pak $\delta_a > 0$, že $f(U(a, \delta_a) \cap M) \subset U(f(a), \varepsilon)$. Tedy $a \in U(a, \delta_a) \cap M \subset f^{-1}(A)$. Pak $B = \bigcup_{a \in A} U(a, \delta_a)$ je otevřená (viz úloha 4.2.11) a $f^{-1}(A) \subset M \cap B \subset f^{-1}(A)$, takže $f^{-1}(A) = M \cap B$.

Nechť má f vlastnost popsanou pravou stranou ekvivalence, $a \in M$ a je dáno $\varepsilon > 0$. Položíme $A = U(f(a), \varepsilon)$ a dostaneme, že $a \in f^{-1}(U(f(a), \varepsilon)) = M \cap B$ pro nějakou otevřenou množinu B. Tedy existuje $\delta > 0$, že $U(a, \delta) \subset B$. Odtud $M \cap U(a, \delta) \subset f^{-1}(U(f(a), \varepsilon))$ a $f(M \cap U(a, \delta)) \subset U(f(a), \varepsilon)$ — funkce f je spojitá v a. To platí pro každý bod $a \in M$ a f je tedy spojitá. □

Tvrzení 4.2.15 (o uzavřenosti). *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je uzavřená, právě když pro každou konvergentní posloupnost $(a_n) \subset M$ je $\lim a_n \in M$.*

Důkaz. Nechť je M uzavřená a $(a_n) \subset M$ je konvergentní posloupnost. Pokud $\lim a_n = a \notin M$, existuje $\delta > 0$, že $U(a, \delta) \subset \mathbb{R} \backslash M$ (doplněk M je otevřená množina). Takže $|a_n - a| \geq \delta$ pro každé n, což je ale v rozporu s $\lim a_n = a$.

Nechť M není uzavřená. Takže $\mathbb{R} \backslash M$ není otevřená a podle definice existuje bod $a \in \mathbb{R} \backslash M$, že pro každé $\delta > 0$ je $U(a, \delta) \cap M \neq \emptyset$. Pro $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, z průniku vybereme bod a_n a máme posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = a \notin M$. □

Z věty 4.2.4 lze získat více, než jen důsledek 4.2.7. Jak hned uvidíme, není třeba možné, aby prostá spojitá funkce zobrazovala interval $(0, 1)$ na interval $[0, 1]$.

Věta 4.2.16 (otevřené zobrazení). *Když je $M \subset \mathbb{R}$ otevřená množina a funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je prostá a spojitá, je obraz $f(M)$ otevřená množina.*

Důkaz. Pro spor nechť M a f jsou jak dáno, $a \in M$, $f(a) = b \in f(M)$, ale $b = \lim x_n$ pro nějakou posloupnost $(x_n) \subset \mathbb{R}\backslash f(M)$ (tedy (x_n) a b dosvědčují, že $f(M)$ není otevřená, protože doplněk není uzavrený, viz tvrzení 4.2.15). Podle otevřenosti M vezmeme $c, d \in \mathbb{R}$, že $c < a < d$ a $[c, d] \subset M$. Ukážeme, že všechny čtyři možné polohy $f(c)$ a $f(d)$ vzhledem k b jsou sporné. Když $f(c), f(d) < b$, tak je podle věty 4.2.4 každé $y \in (\max(f(c), f(d)),\ b)$ hodnotou funkce f na (c, a) i na (a, d), což je spor s prostotou f. Podobně pro $f(c), f(d) > b$. Když $f(c) < b < f(d)$, tak pro velké n je $f(c) < x_n < f(d)$ a x_n je podle věty 4.2.4 hodnotou funkce f, spor. Totéž pro $f(d) < b < f(c)$. □

Úloha 4.2.17. *Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá a prostá a M je uzavřená. Potom je obraz $f(M)$ uzavřená množina. Je to pravda nebo ne?*

Následující věta zobecňuje důsledek 2.2.9.

Věta 4.2.18 (o kompaktní množině). *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní, právě když každá posloupnost $(a_n) \subset M$ má konvergentní podposloupnost (b_n) s limitou*

$$\lim b_n \in M\ .$$

Důkaz. Nechť je M kompaktní a $(a_n) \subset M$ je posloupnost. Protože je M omezená, je omezená i (a_n) a podle věty 2.2.5 má konvergentní podposloupnost (b_n). Ovšem stále $(b_n) \subset M$ a protože je M uzavřená, podle tvrzení 4.2.15 leží $\lim b_n$ v M.

Nechť M není kompaktní. Takže M není omezená nebo není uzavřená. V prvním případě existuje $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = \pm\infty$. Ve druhém případě podle tvrzení 4.2.15 existuje konvergentní $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n \notin M$. Ať tak či tak, taková (a_n) nemá podposloupnost s limitou v M. □

Typický příklad kompaktní množiny je interval $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \le b$ (viz důsledek 2.2.9). Na druhou stranu intervaly $(-\infty, 1]$ a $(0, 1]$ nejsou kompaktní množiny.

Úloha 4.2.19. *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce s limitami $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Je množina jejích nulových bodů*

$$Z(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$$

kompaktní?

Úloha 4.2.20. *Dokažte, že sjednocení dvou kompaktních množin je kompaktní. Totéž pro průnik libovolně mnoha kompaktních množin.*

Úloha 4.2.21. *Je množina $\{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{6}, \frac{1}{5}] \cup \ldots$ kompaktní? Je $[\frac{1}{2}, 1] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{6}, \frac{1}{5}] \cup \ldots$ kompaktní?*

Důležitou vlastnost kompaktních množin přenecháme čtenářce jako úlohu 4.6.4.

Věta 4.2.22 (vylimitění z nekompaktu). *Množina $M \subset \mathbb{R}$ není kompaktní, právě když z ní můžeme „vylimitit" — existuje taková posloupnost $(a_n) \subset M$, že $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $A \notin M$.*

Důkaz. Když M není kompaktní, podle definice 4.2.10 není omezená nebo není uzavřená. V prvním případě z M vylimitíme posloupností jdoucí do $+\infty$ nebo posloupností jdoucí do $-\infty$ a v druhém (podle tvrzení 4.2.15) posloupností jdoucí k nějakému bodu mimo M. Naopak, nechť jsme z M vylimitili popsaným způsobem nějakou posloupností. Je jasné, že tato posloupnost nemá podposloupnost s limitou v M, tudíž M není kompaktní podle věty 4.2.18 □

Definice 4.2.10 a věty 4.2.18 a 4.2.22 uvádějí tři ekvivalentní charakterizace kompaktních množin reálných čísel (a další je v úloze 4.2.24). Nejdůležitější čtvrtou podává věta 4.4.14.

Dospěli jsme k jednomu ze základních výsledků matematické analýzy. V našem případě v jednoduché podobě pro reálnou osu a reálné funkce jedné proměnné.

Věta 4.2.23 (princip maxima a minima). *Když*

$$f\colon M \to \mathbb{R} \text{ je spojitá funkce a } M \subset \mathbb{R} \text{ je kompaktní množina},$$

pak existují body $a, b \in M$, že pro každé $c \in M$ je

$$f(a) \le f(c) \le f(b)\ .$$

Funkce f tedy na množině M nabývá v bodě a svou nejmenší hodnotu a v bodě b svou největší hodnotu.

Důkaz. Dokážeme existenci bodu b, existence bodu a se dokazuje podobně. Nechť

$$\beta = \sup(f(M))\ ,$$

kde $\beta = +\infty$ pro shora neomezený obraz $f(M)$ (jak uvidíme, tato možnost stejně nenastává). Podle definice suprema existuje posloupnost $(c_n) \subset M$, že $\lim f(c_n) = \beta$. Protože je M kompaktní, podle tvrzení 4.2.18 má (c_n) podposloupnost (b_n) s limitou $\lim b_n = b \in M$. Tedy (podle důsledku 4.1.15 a spojitosti f v b)

$$\beta = \lim f(c_n) = \lim f(b_n) = f(\lim b_n) = f(b)\ ,$$

speciálně $\beta \neq +\infty$. Takže $f(b)$ je horní mez množiny $f(M)$ a nutně její největší prvek, jak jsme chtěli dokázat. □

Úloha 4.2.24 (jiná definice kompaktnosti). *Dokažte, že pro každou nekompaktní množinu $M \subset \mathbb{R}$ existuje spojitá funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$, která na M nenabývá ani nejmenší ani největší hodnotu. Takže:*

$$M \text{ je kompaktní} \iff \forall \text{ spojitá } f\colon M \to \mathbb{R} \text{ má na } M \text{ minimum i maximum}\ .$$

Úloha 4.2.25. *Sestrojte funkci $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, jež je na $[0,1]$ spojitá s výjimkou jednoho bodu a která na $[0,1]$ nenabývá ani nejmenší ani největší hodnotu.*

Je-li $f\colon M \to \mathbb{R}$ prostá funkce, je definována její inverzní funkce $f^{-1}\colon f(M) \to M$, $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$. Obecně inverz ke spojité funkci spojitý být nemusí.

Tvrzení 4.2.26 (dva nespojité inverzy). *Uvažme funkce*

$$f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} \ \ a \ \ g\colon \{0\} \cup (1,\,2] \to [0,\,1]$$

s

$$f(0) = 0,\ f(n) = 1/n \ \ pro \ \ n \in \mathbb{N} \ \ a \ \ g(0) = 0,\ g(x) = x - 1 \ \ pro \ \ x \in (1,\,2]\ .$$

Obě funkce jsou prosté a spojité, ale jejich inverzy f^{-1} a g^{-1} spojité nejsou.

Důkaz. Obě funkce jsou zjevně prosté. Definiční obor f nemá limitní body a proto je f na něm triviálně spojitá. Lehce se vidí, že i g je na svém definičním oboru spojitá. Definiční obor f^{-1} je $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ a má limitní bod 0. Ale pro $\frac{1}{n} \to 0$ máme $f^{-1}(\frac{1}{n}) = n \to +\infty \ne 0 = f^{-1}(0)$, takže f^{-1} není spojitá v 0. Definiční obor g^{-1} je $[0,1]$ a pro $\frac{1}{n} \to 0$ máme $g^{-1}(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}+1 \to 1 \ne 0 = g^{-1}(0)$, takže ani g^{-1} není spojitá v 0. □

Mohl by být inverz spojité funkce všude nespojitý? Zde je příklad sestrojený ve stylu Hilbertova hotelu.

Úloha 4.2.27 (Hilbertův hotel). *A to je jaký hotel?*

Tvrzení 4.2.28 (všude nespojitý inverz). *Existuje prostá funkce*

$$f\ ,\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ ,$$

triviálně spojitá, jejíž inverz f^{-1} je v každé bodě $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, nespojitý.

Důkaz. Funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sestrojíme tak, že bude prostá a pro každé $k \in \mathbb{N}$ bude existovat taková posloupnost přirozených čísel

$$1 \le a_{k,1} < a_{k,2} < \dots,\ \text{že } \lim_{n\to\infty} f(a_{k,n}) = f(k)\ .$$

Pak pro žádné $k \in \mathbb{N}$ funkce f^{-1} není spojitá v $f(k)$, protože

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(f(a_{k,n})) = \lim_{n\to\infty} a_{k,n} = +\infty,\ \ \text{což není}\ \ f^{-1}(f(k)) = k\ .$$

Požadovanou funkci f získáme následovně. Posloupnost $(1, 2, 3, \dots)$ rozložíme libovolně na nekonečně mnoho (disjunktních) podposloupností $A_1, A_2, \dots$ (například $A_k = (2^{k-1}(2n-1) \mid n = 1, 2, \dots))$ a hodnoty $f(k)$ definujeme postupně. V prvním kroku zvolíme libovolně hodnotu $f(1)$, třeba $f(1) = 2015$, a pak zvolíme hodnoty $f(n)$, $n \in A_1\backslash\{1\}$, též libovolně, ale tak, že se neopakují (udržujeme prostotu) a pro $n \to \infty$, $n \in A_1$, je $f(n) \to f(1)$. To jistě lze. Ve druhém kroku vyřídíme $f(2)$. Není-li tato hodnota už definovaná, libovolně ale různě od již použitých hodnot ji definujeme a pak definujeme všechny dosud nedefinované hodnoty $f(n)$, $n \in A_2$. Jak? Různě od již použitých hodnot a tak, že pro $n \to \infty$, $n \in A_2$, je $f(n) \to f(2)$. To jistě lze. Ve třetím kroku vyřídíme stejným způsobem $f(3)$ (aby byla limitou hodnot f na A_3) a naznačeným způsobem pokračujeme dále. Nakonec, po provedení nekonečně mnoha kroků, zřejmě získáme funkci s vlastností popsanou v úvodu důkazu, která je hledaným příkladem. Podívejte se ale na úlohu 4.2.29. $\square$

Úloha 4.2.29. *Vysvětlete, proč před k-tým krokem konstrukce f jsou hodnoty $f(n)$, $n \in A_k$, ještě nedefinované, kromě konečně mnoha výjimek. Vysvětlete, proč je můžeme definovat tak, že f zůstane prostá (nepoužijeme žádnou už použitou funkční hodnotu) a hodnoty limití k $f(k)$.*

Úloha 4.2.30. *Funguje předchozí důkaz, když navíc požadujeme*

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}\,,$$

to jest racionální hodnoty sestrojované funkce? (Pokud nevidíte, proč by neměl fungovat, pak jste asi neřešili předchozí úlohu a důkaz možná nedomysleli.)

Následující věta popisuje situace, kdy je inverz spojité prosté funkce spojitý.

Věta 4.2.31 (spojitost inverzní funkce). *Nechť je množina $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná a funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je prostá a spojitá. Každá z následujících čtyř podmínek stačí k tomu, aby inverzní funkce*

$$f^{-1}\colon f(M) \to \mathbb{R}$$

byla spojitá.

1. *M je otevřená množina.*
2. *M je interval.*
3. *M je kompaktní množina.*
4. *M je uzavřená množina a f je rostoucí či klesající.*

Důkaz. 1. Nechť $b \in f(M)$, $a = f^{-1}(b) \in M$ a je dáno $\varepsilon > 0$. Po případném zmenšení ε je $U(a, \varepsilon) \subset M$ (M je otevřená). Podle tvrzení 4.2.16 je $f(U(a, \varepsilon)) \ni b$ otevřená množina, takže existuje $\delta > 0$, že

$$U(b,\,\delta) \subset f(U(a,\,\varepsilon)) \ \text{ a } \ f^{-1}(U(b,\,\delta) \cap f(M)) = f^{-1}(U(b,\,\delta)) \subset U(a,\,\varepsilon)$$

— f^{-1} je v b spojitá.

2. Pro spor nechť $f^{-1}(b) = a$ a $(b_n) \subset f(M)$ má $\lim b_n = b$, ale $\lim f^{-1}(b_n) = \lim a_n$ není a. Existuje tedy $\delta > 0$, že pro nekonečně mnoho n je $a_n \geq a + \delta$ nebo pro nekonečně mnoho n je $a_n \leq a - \delta$. Předpokládáme druhou možnost,

první je podobná, a vezmeme takové n. Pak $a - \delta \in [a_n, a] \subset M$ (M je interval) a $f([a_n, a])$ je díky důsledkům 4.2.7 a 4.2.8 interval $[b_n, b]$ nebo interval $[b, b_n]$ a obsahuje $f(a - \delta)$. Každopádně $|f(a - \delta) - b| \le |b_n - b|$ a velké vhodné n ukazuje, že $f(a - \delta) = b = f(a)$, což je spor s prostotou f.

3. Pro spor nechť $f^{-1}(b) = a$ a $(b_n) \subset f(M)$ má $\lim b_n = b$, ale $\lim f^{-1}(b_n)$ není a. Tedy má (b_n) podposloupnost (c_n), že $|f^{-1}(c_n) - a| > \delta > 0$ pro každé n a nějaké δ. Z $(f^{-1}(c_n)) \subset M$ vybereme (díky kompaktnosti M a větě 4.2.18) podposloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = c \in M$. Patrně $|c - a| \ge \delta > 0$ a $c \ne a$. Ze spojitosti f v c plyne, že

$$f(a) = b = \lim b_n = \lim c_n = \lim f(a_n) = f(\lim a_n) = f(c) ,$$

spor s prostotou f.

4. Předpokládáme, že f roste, druhý případ je podobný. Pro spor nechť $f^{-1}(b) = a$ a $(b_n) \subset f(M)$ má $\lim b_n = b$, ale $\lim f^{-1}(b_n)$ není a. Zřejmě má (b_n) podposloupnost, pro jejíž žádnou podposloupnost tato limita není a (úloha 4.2.32). Proto má podle věty 2.2.1 tato podposloupnost a tedy i posloupnost (b_n) klesající či rostoucí podposloupnost (c_n), pro níž $\lim f^{-1}(c_n)$ není a. Předpokládejme, že (c_n) klesá, druhý případ je podobný. Tedy $b < \cdots < c_2 < c_1$ a $a < \cdots < f^{-1}(c_2) < f^{-1}(c_1)$ (f i f^{-1} rostou). Podle tvrzení 2.1.13 máme $c = \lim f^{-1}(c_n)$ a $c \in M$ (M je uzavřená). Patrně $a < c$. Ze spojitosti f v c je $f(c) = \lim f(f^{-1}(c_n)) = \lim c_n = b = f(a)$, spor s prostotou f. □

Úloha 4.2.32. *Pro každé $a \in \mathbb{R}^*$ nalezněte posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, která nemá limitu a, avšak má podposloupnost (b_n) s $\lim b_n = a$. Dokažte, že když posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ nemá limitu $a \in \mathbb{R}^*$, pak má (a_n) vždy takovou podposloupnost (b_n), že žádná podposloupnost (c_n) posloupnosti (b_n) nemá limitu a.*

Druhý příklad v tvrzení 4.2.26 ukazuje, že podmínku 2 nelze zobecnit na sjednocení jakýchkoli dvou (disjunktních) intervalů.

Úloha 4.2.33. *Zjistěte, pro které dvojice disjunktních intervalů $I, J \subset \mathbb{R}$ má každá spojitá prostá funkce $f\colon I \cup J \to \mathbb{R}$ spojitý inverz.*

Shrneme vztah aritmetických operací a operace skládání ke spojitosti funkce. Když $f\colon M \to \mathbb{R}$ a $g\colon N \to \mathbb{R}$, pak $f+g, fg\colon M \cap N \to \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}\colon M \cap N \setminus Z(g) \to \mathbb{R}$, kde $Z(g)$ jsou nulové body g, a $f(g)\colon M \cap g(N) \to \mathbb{R}$.

Tvrzení 4.2.34 (spojitost funkce a operace). *Jsou-li funkce f a g spojité, jsou spojité i funkce $f + g, fg, \frac{f}{g}$ a $f(g)$.*

Důkaz. Díky důsledku 4.1.19 a tvrzení 4.1.29. □

Tvrzení 4.2.35 (pár spojitých funkcí). *Funkce*

$$\exp x,\ \sin x,\ \cos x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \log x\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

jsou spojité. Všechny polynomy

$$p(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \textit{i racionální funkce} \quad \frac{p(x)}{q(x)}\colon \mathbb{R}\backslash Z(q) \to \mathbb{R}$$

jsou spojité.

Důkaz. Spojitost exponenciály byla dokázána v tvrzení 3.3.5 nebo plyne, stejně jako spojitost sinu a kosinu, z úlohy 4.2.2. Spojitost polynomu z ní plyne rovněž, ale vyplývá i opakováním operace násobení a sčítání spojitých funkcí, vyjdeme-li z konstantních funkcí a identické funkce. Tak vyplývá, použijeme-li i dělení, spojitost racionální funkce. Spojitost logaritmu plyne z části 1, 2 nebo 4 věty 4.2.31 (ne však z části 3), protože $\log x = (\exp x)^{-1}$. □

Pro polynomy ani racionální funkce nedá operace skládání nic nového, složenina dvou polynomů je polynom, stejně tak pro racionální funkce. Obecně ale pomocí aritmetických operací a skládání (tvrzení 4.2.34) vytvoříme ze základních funkcí

$$Z = \{f_c \text{ pro } c \in \mathbb{R},\ \exp x,\ \log x,\ \sin x\}$$

(f_c je konstantní funkce $f_c(x) = c$) spoustu dalších spojitých funkcí, například funkci

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2} - \cos(5\sqrt{1-x^2})}}{e^x - x^{10} + \sqrt{5}x^7 - 100}\ .$$

Úloha 4.2.36. *Opravdu tuto funkci dokážeme vytvořit? Jak vlastně vytvoříme funkce $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\sqrt{x}\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$?*

Člověka může napadnout, zda by se funkce $\mathrm{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$, jež je spojitá na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ale ne na celém $\mathbb{R}$, nedala zapsat nějakým podobným (šíleným) vzorcem. Hned si ale odpoví, že nikoli, a důvod je právě ten, že to není spojitá funkce. Každá funkce vytvořená v konečném počtu kroků aritmetickými operacemi a skládáním ze základních funkcí Z je podle tvrzení 4.2.34 spojitá.

Úloha 4.2.37. *Nicméně ukažte, jak vytvořit spojitou funkci*

$$\mathrm{sgn}\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \{-1,\ 1\}\ .$$

Jak jsme viděli v tvrzeních 4.2.26 a 4.2.28, invertování funkce se chová jinak, umí vyrobit nespojitosti. Pro danou funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$ a dané $y \in f(M)$ při invertování f vezmeme řešení $x \in M$ rovnice

$$f(x) = y$$

a zajímá nás, zda závisí spojitě na y. Pokud f není prostá, není řešení vždy ani jednoznačně určené. Věta 4.2.31 uvádí pro prostou f postačující podmínky spojitosti závislosti řešení x této rovnice na y.

Jiná situace také nastane, povolíme-li nekonečný počet kroků či užití operací. Pak lze spojité funkce proměnit v nespojitou funkci. Například,

$$\operatorname{sgn}(x) = \lim x^{1/n},\ x \in [0, +\infty)$$

— nespojité signum je limitou spojitých funkcí. Jiný podobný výsledek patří do Fourierových řad:

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots\right),\ x \in (-\pi, \pi)$$

— nespojité signum je nekonečným součtem spojitých funkcí. Řady tohoto typu nesou jméno francouzského matematika *Josepha Fouriera (1768–1830)* (použil je v problémech týkajících se vedení tepla a kmitání struny, přisuzuje se mu objev skleníkového efektu).

4.3 Paradox běžkyně a paradox věštce

Paradox běžkyně. Axiom výběru a paradox věštce.

Následující úloha vám jistě nebude činit obtíže.

Úloha 4.3.1. *Tereza uběhla trasu*

21 km za 1:24:00 ,

průměrnou rychlostí kilometr za 4 minuty. Dokažte, že při jakémkoli spojitém způsobu Terezina běhu se vždy někde na trase nachází úsek o délce jednoho kilometru (ne nutně od kilometru $k \in \mathbb{N}_0$ ke kilometru $k+1$), který proběhla přesně za 4 minuty.

Zobecníme to. Pro neprázdnou množinu $M \subset \mathbb{R}$, funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$ a kladné číslo d dvojici $a, a+d \in M$ nazveme *d-úsekem (grafu) funkce f* a podíl

$$\frac{f(a+d) - f(a)}{d}$$

nazveme jeho *sklonem.* Tak, jak se řeší předchozí úloha, se dokáže i následující důsledek (věty 4.2.4).

Důsledek 4.3.2 (úseky grafu spojité funkce). *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a*

$$f\colon [0, n] \to \mathbb{R}$$

je libovolná spojitá funkce s hodnotami $f(0) = f(n) = 0$, takže její jediný n-úsek má sklon 0. Potom má f vždy 1-úsek se sklonem 0.

Je zajímavé a jdoucí poněkud proti intuici, že pro necelé $n > 0$ se situace změní — existují spojité funkce $f\colon [0, n] \to \mathbb{R}$ s nulovým sklonem n-úseku, které nemají žádný 1-úsek s nulovým sklonem.

Tvrzení 4.3.3 (zvláštní funkce). *Nechť* $c \in (0,1)$ *a* $n \in \mathbb{N}$. *Pak existuje taková spojitá, dokonce po částech lineární funkce*

$$f\colon [0,\, n+c] \to \mathbb{R}\ ,$$

že $f(0) = f(n+c) = 0$ *(její jediný* $(n+c)$*-úsek má tedy sklon* 0*), ale každý její* 1*-úsek má záporný sklon* $-\frac{c}{n}$.

Důkaz. Nechť $\delta = \frac{c}{n} > 0$. Jako $L_1 = L_2L_3$ označíme rovinnou lomenou čáru složenou ze dvou úseček $L_2 = \overline{(0,0),(n\delta,n\delta)}$ a $L_3 = \overline{(n\delta,n\delta),(1,-\delta)}$. Vezmeme vektor $v = (1,-\delta)$ a jako L označíme rovinnou lomenou čáru

$$L = L_1 \cup (L_1+v) \cup (L_1+2v) \cup \cdots \cup (L_1+(n-1)v) \cup (L_2+nv)\ .$$

Je to sjednocení posunů čáry L_1 o $0,1,\ldots,(n-1)$-násobek vektoru v, jenž vodorovně posouvá o 1 a svisle o $-\delta$, a posunu úsečky L_2 o nv. Pravý konec L_1+iv se rovná levému konci $L_1+(i+1)v$ a pravý konec $L_1+(n-1)v$ se rovná levému konci L_2+nv. Oba konce čáry L leží na ose x. Takže L je souvislá lomená čára, která je grafem spojité funkce $f\colon [0,n+n\delta] = [0,n+c] \to \mathbb{R}$ splňující $f(0) = f(n+c) = f(n+n\delta) = 0$. Pro každý 1-úsek $a, a+1$ funkce f platí

$$f(a+1) = f(a) - \delta\ ,$$

protože

$$(a,\, f(a)) \in L_1+iv\ \text{ a }\ (a+1,\, f(a+1)) \in L_1+(i+1)v,\ i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1\ ,$$

nebo, na konci, $(a,f(a)) \in L_2+(n-1)v$ a $(a+1,f(a+1)) \in L_2+nv$. Každý 1-úsek funkce f tak má sklon $-\delta = -\frac{c}{n}$. Je dobré si nakreslit obrázek. □

Snadno teď vyřešíte úlohu, kterou jsem nazval *paradoxem běžkyně.*

Úloha 4.3.4 (paradox běžkyně aneb Tereza na $\frac{1}{2}$M). *Tereza teď uběhla o trošku delší trasu*

21,1 km za 1:24:24 ,

opět průměrnou rychlostí kilometr za 4 minuty. Chlubila se, že běžela tak chytře, že úplně každý kilometrový úsek na trase proběhla pomaleji, za $\ge 4+\delta$ *minut pro nějaké (malé) číslo* $\delta > 0$. *Jak to udělala?*

Druhý paradox z říše funkcí je děsivější, neboť ukazuje, že nemáme svobodnou vůli. Pro lineárně uspořádanou množinu $(A,\le)$ a nějakou třídu $\mathcal{F}$ reálných funkcí, jejichž definiční obory jsou podmnožinami A, se můžeme snažit pro každou $f \in \mathcal{F}$ a $a \in A$ uhádnout hodnotu $f(a)$ z předchozích hodnot $f(x)$ pro $x < a$. Pro $g\colon B \to \mathbb{R}$, $B \subset A$, a $a \in A$ jako g_a označíme zúžení

$$g_a = g \mid B \cap \{x \in A \mid x < a\}\ .$$

Pak *věštec (pro $\mathcal{F}$)* je reálná funkce

$$V\colon D \to \mathbb{R},\ D := \{g_a \mid a \in A,\, g \in \mathcal{F}\}\ .$$

Věštec V tedy pro každé zúžení g_a funkce $g \in \mathcal{F}$ na prvky definičního oboru menší než a vrací hodnotu $V(g_a) \in \mathbb{R}$, tip V na hodnotu $g(a)$ (ať už je g v a definovaná nebo ne). Věštec tak z „minulých“ hodnot $g(x)$, $x \in B$ a $x < a$, odhaduje „budoucí“ hodnotu $g(a)$.

Jako příklad si za $(A, \leq)$ vezmeme reálná čísla s obvyklým uspořádáním a za $\mathcal{F}$ všechny spojité funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Snadno vymyslíme věštce, který úspěšně uhádne pro každou spojitou funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a každé $a \in \mathbb{R}$ hodnotu $g(a)$ z hodnot $g(x)$ pro $x < a$:

$$g(a) = \lim_{x \to a} (g \,|\, (-\infty,\, a))(x) =: V(g \,|\, (-\infty,\, a))\ .$$

Věštec prostě pro předložený argument, jímž je spojitá funkce definovaná na $(-\infty, a)$ a s vlastní limitou v a, vrátí tuto limitu. Ovšem stejně snadno nás napadne příklad situace, kdy je každý věštec někdy úplně neúspěšný.

Úloha 4.3.5. *Na množině $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, vezmeme obvyklé uspořádání přirozených čísel a $\mathcal{F}$ jsou reálné funkce definované na počátečních úsecích množiny $[n]$. Ukažte, že pro každého věštce*

$$V\colon \{g\colon [a-1] \to \mathbb{R} \mid a \in [n]\} \to \mathbb{R}$$

existuje taková funkce $f\colon [n] \to \mathbb{R}$, že $V(f \,|\, [a-1]) \neq f(a)$ pro každé $a \in [n]$. Každý věštec tedy neuhádne správně (z předchozích hodnot) ani jednu hodnotu nějaké funkce.

Zdálo by se, že podobně porazíme každého rádoby věštce i pro třídu úplně všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, když nejsou omezené spojitostí a jsou zcela libovolné. Paradoxně pak ale nastává opak — díky jejich libovolnosti a axiomu výběru se vynoří skoro dokonalý věštec.

Věta 4.3.6 (skoro dokonalý věštec). *Existuje věštec*

$$V\colon \{g\colon (-\infty,\, a) \to \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$$

uhadující správně pro každou funkci z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ každou její hodnotu z předchozích hodnot, až na nejvýše spočetně mnoho výjimek: pro každou funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je množina

$$\{a \in \mathbb{R} \mid V(f \,|\, (-\infty,\, a)) \neq f(a)\}$$

omylů věštce nejvýše spočetná. Pro ostatní skoro všechna $a \in \mathbb{R}$ věštec správně uhádne hodnotu f jako $f(a) = V(f \,|\, (-\infty, a))$.

Pro důkaz potřebujeme jednoduché lemma.

Lemma 4.3.7. *Každá dobře uspořádaná podmnožina $X \subset \mathbb{R}$ obvyklého uspořádání $(\mathbb{R}, \leq)$ je nejvýše spočetná.*

Důkaz. Nechť $X \neq \emptyset$. Definujeme injekci $f\colon X \to \mathbb{Q}$, což dokazuje konečnost nebo spočetnost X. Pro $a \in X$ položíme

$$f(a) = \text{ něco z } \mathbb{Q} \cap (a,\, \min(\{b \in X \mid b > a\}))\ .$$

Vybereme tedy nějaký zlomek ležící mezi a a následníkem a v X. Je-li a největší prvek X, vezmeme nějaký zlomek větší než a. Používáme axiom výběru, ale není to jeho klíčové použití v důkazu věty. Toto zobrazení běží z X do $\mathbb{Q}$ a je také prosté. □

Důkaz. (Věty 4.3.6.) Nechť

$$M := \{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

jsou všechny reálné funkce. Podle věty 1.3.5 (jež je důsledkem axiomu výběru) existuje dobré lineární uspořádání $(M, \preceq)$. Hodnotu věštce V na funkci $g\colon (-\infty, a) \to \mathbb{R}$ definujeme jako

$$V(g) := h_0(a),\ h_0 := \min_{\preceq}(\{h \in M \mid h \,|\, (-\infty,\, a) = g\})\ ,$$

tedy jako hodnotu, kterou v a nabývá $\preceq$-nejmenší funkce ze všech těch funkcí v M, jejichž zúžení na $(-\infty, a)$ se shoduje s danou funkcí g. Ukážeme, že V má popsanou vlastnost. Buď dána $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a

$$X = \{a \in \mathbb{R} \mid V(f \,|\, (-\infty,\, a)) \neq f(a)\}$$

buď množina omylů věštce v hodnotách f. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme

$$M_a = \{h \in M \mid h \,|\, (-\infty,\, a) = f \,|\, (-\infty,\, a)\} \ \text{ a } \ h_a = \min_{\preceq}(M_a)\ .$$

Takže $V(f \,|\, (-\infty, a)) = h_a(a)$. Platí implikace

$$a, b \in \mathbb{R},\ a \in X,\ a < b \Rightarrow h_a \prec h_b\ .$$

Skutečně, z $a < b$ plyne $M_b \subset M_a$, takže $h_a \preceq h_b$, ale $h_a = h_b$ nelze kvůli $h_b(a) = f(a) \neq V(f \,|\, (-\infty, a)) = h_a(a)$, protože $a \in X$. Vidíme, že množina $X \subset \mathbb{R}$ omylů věštce je vzhledem k obvyklému lineárnímu uspořádání reálných čísel $\leq$ dobře uspořádaná: kdybychom v X měli nekonečný ostře klesající řetězec $a_1 > a_2 > \ldots$, byl by $h_{a_1} \succ h_{a_2} \succ \ldots$ nekonečný ostře klesající řetězec v $(M, \preceq)$, ve sporu s dobrým uspořádáním. Podle lemmatu 4.3.7 je tedy X nejvýše spočetná. □

Na existenci tohoto věštce lze pohlížet i tak, že při budování funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ od hodnot v menších číslech k hodnotám v číslech větších nemáme skoro nikdy svobodnou vůli. Skoro vždy, kromě nejvýše spočetně mnoha záblesků svobody, je hodnota $f(a)$ předurčena hodnotami $f(x)$ v $x < a$. Ty už věštec zná a dopředu ví, jakou hodnotu $f(a)$ zvolíme.

4.4 Stejnoměrná spojitost a (kvazi)stejnoměrná konvergence

Stejnoměrná spojitost funkce, na kompaktu plyne ze spojitosti. Bodová konvergence funkcí. Kdy limita zachovává spojitost: stejnoměrná konvergence. Aleksandovova věta a kvazistejnoměrná konvergence. Heineho–Borelova věta o kompaktech a Arzelova věta. Arzelova–Ascoliho věta, důkaz jako úloha.

Jak víme, pro $M \subset \mathbb{R}$ spojitost funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ znamená, že

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \forall\, a \in M\; \exists\, \delta > 0 :\; f(U(a,\, \delta) \cap M) \subset U(f(a),\, \varepsilon)\;.$$

Prohozením druhého a třetího kvantifikátoru dostaneme silnější požadavek na f, aby

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, a \in M :\; f(U(a,\, \delta) \cap M) \subset U(f(a),\, \varepsilon)\;.$$

Oproti obyčejné spojitosti, kdy δ závisí na ε i na a, zde δ závisí pouze na ε a musí vyhovovat každému bodu a z M. Ekvivalentně to napíšeme jako

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, a,\, b \in M :\; |a - b| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon\;.$$

Definice 4.4.1 (stejnoměrná spojitost). *Má-li $f\colon M \to \mathbb{R}$ předchozí vlastnost, řekneme, že f je stejnoměrně spojitá. Má-li ji s $a, b \in N$, kde $N \subset M$, pak je f stejnoměrně spojitá na množině N. Připomeňme explicitně, že stejnoměrně spojitá funkce je spojitá.*

Stejnoměrná spojitost funkce je důležitá a užitečná vlastnost, jež nám později v oddílu 5.4 pomůže dokázat existenci antiderivace. Proto jsme ji také do učebnice zařadili. Například spojitá funkce $f(x) = \frac{1}{x}\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ není stejnoměrně spojitá (protože $f(\frac{1}{n+1}) - f(\frac{1}{n}) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$), ale, jak plyne z následujícího tvrzení, je stejnoměrně spojitá na každé kompaktní podmnožině množiny $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

Úloha 4.4.2. *Dokažte, že $f(x) = \frac{1}{x}$ je stejnoměrně spojitá dokonce na každé množině $N = \mathbb{R}\backslash U(0, \delta)$, $\delta > 0$.*

Na kompaktních množinách spojitost a stejnoměrná spojitost splývají.

Tvrzení 4.4.3 (na kompaktu je pořádek). *Když je $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ kompaktní množina a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, je f i stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Negace stejnoměrné spojitosti f znamená (jako v příkladu s $f(x) = \frac{1}{x}$), že pro nějaké pevné $\varepsilon_0 > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují body a_n, b_n v M, že $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$ ale $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon_0$. Podle věty 4.2.18 přechodem k podposloupnostem můžeme (pro jednodušší značení) předpokládat, že obě posloupnosti (a_n) i (b_n) jsou konvergentní a mají (nutně stejnou) limitu $c \in M$. Pak ale pro každé $\delta > 0$ pro velké $n \in \mathbb{N}$ máme $a_n, b_n \in U(c, \delta)$, což dává

$$f(U(c,\, \delta) \cap M) \not\subset U(f(c),\, \varepsilon_0/2)\;,$$

protože $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon_0$ (podle trojúhelníkové nerovnosti $|f(a_n) - f(b_n)| \leq |f(a_n) - f(c)| + |f(b_n) - f(c)|$). To odporuje spojitosti f v c. $\square$

Pomocí stejnoměrné spojitosti můžeme funkce spojitě rozšiřovat.

Tvrzení 4.4.4 (spojité rozšíření). *Každá stejnoměrně spojitá funkce*

$$f\colon [0,\, 1) \to \mathbb{R}$$

má vlastní limitu $\lim_{x\to 1} f(x) = c$. *Přidáním hodnoty* $f(1) = c$ *pak dostaneme spojité (a nutně stejnoměrně spojité) rozšíření funkce* f *na* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

Důkaz. Obraz $f([0,1))$ je nutně omezený. Jinak by totiž existovala taková posloupnost $(x_n) \subset [0,1)$, že $x_n \to 1$ a $|f(x_n)| \to +\infty$, a pro každé $\delta > 0$ bychom našli indexy m a n, že $|x_m - x_n| < \delta$ a $|f(x_m) - f(x_n)| \geq 1$, což odporuje stejnoměrné spojitosti f. Hodnotu c proto můžeme zvolit jako $c = \lim f(a_n) \in \mathbb{R}$ pro nějakou $(a_n) \subset [0,1)$ s $a_n \to 1$ (použili jsme B.–W. větu 2.2.5, že každá omezená posloupnost má konvergentní podposloupnost). Je-li $(b_n) \subset [0,1)$ libovolná posloupnost jdoucí k 1, pro $n \to \infty$ díky stejnoměrné spojitosti

$$|f(b_n) - f(a_n)| \to 0 \;\text{ a tedy }\; f(b_n) \to c\,.$$

Proto, podle věty 4.1.14, $\lim_{x\to 1} f(x) = c$. $\square$

Po vypuštění slova „stejnoměrně“ v předpokladu přestane tvrzení samozřejmě platit, příklady se lehce vymyslí.

Úloha 4.4.5. *Vymyslete takový příklad.*

Jak prakticky (nikoli abstraktně jako $f\colon M \to \mathbb{R}$) definovat funkce s požadovanými vlastnostmi, jak získávat nové funkce ze starých? Aritmetické operace dají racionální funkce, například

$$\frac{4 + x - x^2}{2x^7 - 17x^2 + 1}\,.$$

Můžeme využít logiku a nové funkce definovat formulemi, fakticky jako řešení rovnic. Například formule

$$\forall\, x \in [-1,\, 1]\; \exists!\, y \geq 0:\; y^2 = 1 - x^4\,,$$

kde „$\exists!$“ zkracuje „existuje právě jedno“, definuje algebraickou funkci

$$\sqrt{1 - x^4}\colon [-1,\, 1] \to \mathbb{R}$$

přiřazující každému x z $[-1,1]$ jediné řešení y uvedené rovnice. Takto se definuje logaritmus jako inverz exponenciály. Ale asi nejčastěji se nová funkce f definuje ze starých funkcí f_n limitou $f := \lim f_n$. Neliší se to tak moc od limit posloupností čísel, máme prostě systém číselných posloupností $(f_n(x)) \subset \mathbb{R}$ indexovaný reálným parametrem $x \in M$ a pro každé pevné x vezmeme limitu $\lim f_n(x)$, pokud existuje, čímž definujeme novou funkci $f(x) := \lim f_n(x)$.

Definice 4.4.6 (bodová konvergence). *Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ a $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou nějaké funkce a pro každé $x \in M$ existuje vlastní limita*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\ .$$

Takto získanou novou funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$ nazýváme (bodovou) limitou posloupnosti funkcí (f_n) na množině M. Značíme to též jako

$$f_n \to f \quad (\textit{na } M)\ .$$

Příkladem je vyjádření sinu řadou $\sin x = \sum \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, kdy vlastně

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} \to \sin x \quad (\text{na } \mathbb{R})\ ,$$

a podobně kosinus. Sinus a kosinus jsou tedy také bodové limity jistých polynomů. Zde jsme je zavedli geometricky délkami oblouků a jejich vyjádření řadami se tak musí dokázat. Tato geometrická definice spadá do logických definic a $\sin x$ a $\cos x$ vycházejí jako řešení rovnic. Jako další příklad definice nové funkce limitou předvedeme v oddílu 5.4 spojitou funkci bez derivace.

Vede to k přirozené otázce, zda posloupnost spojitých funkcí má spojitou limitu. Ne vždy: funkce $x^{1/n}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou spojité, ale

$$f_n(x) = x^{1/n} \to \mathrm{sgn}(x) \quad (\text{na } [0,\ 1])\ .$$

Limita je funkce s hodnotou 0 v 0 a jinak konstantně 1 na $(0,1]$ a není v bodě 0 spojitá. Kdo nemá rád odmocniny si funkce $f_n(x)$ může definovat po částech lineárně: $f_n(x) = nx$ pro $0 \le x \le \frac{1}{n}$ a $f_n(x) = 1$ pro $\frac{1}{n} \le x \le 1$, se stejnou bodovou limitou. Aby limita spojitost přenesla, musí se konvergence zesílit tak, jak stejnoměrná spojitost zesiluje obyčejnou spojitost. Konvergence $f_n \to f$ na M znamená, že

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, a \in M\ \exists\, n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow |f(a) - f_n(a)| < \varepsilon\ .$$

Výměnou druhého a třetího kvantifikátoru dostaneme silnější požadavek na konvergenci, aby

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, a \in M :\ n > n_0 \Rightarrow |f(a) - f_n(a)| < \varepsilon\ .$$

V obyčejné konvergenci index n_0 závisí na ε i na a, ve stejnoměrné jen na ε a musí vyhovovat každému bodu a z M.

Definice 4.4.7 (stejnoměrná konvergence). *Mají-li funkce $f_n, f\colon M \to \mathbb{R}$ předchozí vlastnost, řekneme, že posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně k f. Mají-li ji s $a \in N$, kde $N \subset M$, pak (f_n) konverguje stejnoměrně k f na množině N. Používá se značení*

$$f_n \rightrightarrows f \quad (\textit{na } N)\ .$$

Ze stejnoměrné konvergence vyplývá bodová konvergence.

Tento silnější typ konvergence už v limitním přechodu spojitost zachovává.

Věta 4.4.8 (stejnoměrná limita). *Když $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ a spojité funkce*

$$f_n\colon M \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\ ,$$

konvergují stejnoměrně k funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$, potom i f je spojitá.

Důkaz. Nechť $a \in M$ a je dáno $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu máme $m \in \mathbb{N}$, že pro každé $b \in M$ je $|f(b) - f_m(b)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (dokonce množina takových m zahrnuje celé $\mathbb{N}$ kromě konečně mnoha čísel). Funkce f_m je spojitá v bodě a, tedy máme $\delta > 0$, že $|f_m(a) - f_m(b)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro každé $b \in M$ s $|a-b| < \delta$. Podle trojúhelníkové nerovnosti pak pro každé $b \in U(a,\delta) \cap M$ máme

$$\begin{aligned}|f(a) - f(b)| &\leq |f(a) - f_m(a)| + |f_m(a) - f_m(b)| + |f_m(b) - f(b)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\ .\end{aligned}$$

Limitní funkce f je tedy spojitá v a. □

Úloha 4.4.9. *Jak víme ze součtu geometrické řady, $\sum_{k=0}^{n} x^k \to \frac{1}{1-x}$ na $(-1,1)$. Jde o stejnoměrnou konvergenci? Pokud ne, nalezněte velké podmnožiny intervalu $(-1,1)$ se stejnoměrnou konvergencí.*

Stejnoměrnost konvergence je tedy postačující podmínka pro to, aby limita spojitých funkcí byla spojitá. Není to ale nutná podmínka. Například spojité funkce $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$, konvergují k funkci $f \equiv 0$, jež je spojitá, i když jejich konvergence není na $\mathbb{R}$ stejnoměrná. Není obtížné vymyslet příklad s kompaktním definičním oborem.

Úloha 4.4.10. *Vymyslete takové funkce f_n s definičním oborem $[0,1]$.*

Požadavek stejnoměrnosti je tedy příliš silný, v důkazu věty 4.4.8 jsme skutečně využili jen jeden index m. Lidé vymysleli druh konvergence silný přesně natolik, aby v limitě zachoval spojitost. Říká se mu *kvazistejnoměrná konvergence* nebo také *zpola stejnoměrná konvergence*. Tvrzení 4.4.12 níže by čtenář jistě dal po rozmyšlení sám dohromady. Pro jeho důkaz budeme ale potřebovat jedno lemma. *Otevřeným intervalem* v tomto oddílu rozumíme interval typu $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$.

Lemma 4.4.11 (nejvýše spočetné podpokrytí). *Každé pokrytí*

$$\bigcup_{i \in X} I_i \supset M$$

jakékoli množiny $M \subset \mathbb{R}$ otevřenými intervaly $(I_i \mid i \in X)$ má nejvýše spočetné podpokrytí: existuje nejvýše spočetná podmnožina $Y \subset X$, pro níž stále

$$\bigcup_{i \in Y} I_i \supset M\ .$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti $M = \bigcup_{i \in X} I_i$. Nechť Q je množina všech těch otevřených intervalů s racionálními konci, které jsou obsažené v nějakém I_i, $i \in X$. Množina Q je spočetná a $M = \bigcup Q$ (neboť pro každé $i \in X$ a každý bod $a \in I_i$ existují zlomky $\alpha, \beta \in I_i$, že $\alpha < a < \beta$). Pro každý $J \in Q$ zvolíme $i(J) \in X$, že $J \subset I_{i(J)}$. Pak $Y = \{i(J) \mid J \in Q\} \subset X$ je nejvýše spočetná a

$$M = \bigcup Q \subset \bigcup_{i \in Y} I_i ,$$

takže $\bigcup_{i \in Y} I_i = M$. □

Tvrzení 4.4.12 (Aleksandrovova věta). *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f_n \colon M \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, jsou spojité funkce bodově konvergující k funkci $f \colon M \to \mathbb{R}$. Následující tři podmínky (tvrzení) jsou vzájemně ekvivalentní.*

1. *Funkce f je spojitá.*

2. *Pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $N \in \mathbb{N}$ existuje systém čísel $(n_i \in \mathbb{N} \mid i \in X)$ a systém otevřených intervalů $(I_i \mid i \in X)$ s nejvýše spočetnou indexovou množinou X, že*
$$M \subset \bigcup_{i \in X} I_i$$
a pro každé $i \in X$ a každý bod $a \in I_i \cap M$ je
$$n_i > N \ \text{ a } \ |f(a) - f_{n_i}(a)| < \varepsilon .$$

3. *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje systém čísel $(n_i \in \mathbb{N} \mid i \in X)$ a systém otevřených intervalů $(I_i \mid i \in X)$ s nejvýše spočetnou indexovou množinou X, že*
$$M \subset \bigcup_{i \in X} I_i$$
a pro každé $i \in X$ a každý bod $a \in I_i \cap M$ je
$$|f(a) - f_{n_i}(a)| < \varepsilon .$$

Důkaz. Implikace $1 \Rightarrow 2$, předpokládající spojitost f. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a $N \in \mathbb{N}$. Vezmeme libovolný bod $a \in M$. Protože $f_n \to f$ na M, existuje index $n = n_a \in \mathbb{N}$, že $n > N$ a $|f(a) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Obě funkce f a f_n jsou v bodě a spojité, takže pro malé $\delta = \delta_a > 0$ se pro každé $b \in U(a, \delta) \cap M$ odchyluje $f(b)$ od $f(a)$ o méně než $\frac{\varepsilon}{3}$ a totéž platí pro f_n. Podle trojúhelníkové nerovnosti tedy pro každé $b \in U(a, \delta) \cap M$ je

$$|f(b) - f_n(b)| \le |f(b) - f(a)| + |f(a) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_n(b)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Systémy $(n_a \mid a \in M)$ a $(U(a, \delta_a) \mid a \in M)$ tak mají požadované vlastnosti, až na omezení mohutnosti (pro nespočetnou M). To ale snadno splníme přechodem k nejvýše spočetnému podpokrytí množiny M podle lemmatu 4.4.11.

Implikace 2 $\Rightarrow$ 3, předpokládající podmínku 2. Tato implikace je logicky triviální, protože podmínka 2 je z definice silnější než podmínka 3. V podmínce 2 všechny indexy n_i jsou větší než N, což se v podmínkce 3 nevyžaduje.

Implikace 3 $\Rightarrow$ 1, předpokládající podmínku 3. Buď dáno reálné číslo $\varepsilon > 0$ a bod $a \in M$. K $\frac{\varepsilon}{3}$ vezmeme systémy $(n_i \in \mathbb{N} \mid i \in X)$ a $(I_i \mid i \in X)$. Vezmeme $i \in X$, že $a \in I_i$, a tak malé $\delta > 0$, že $U(a, \delta) \subset I_i$ a $f_{n_i}(U(a, \delta) \cap M) \subset U(f_{n_i}(a), \frac{\varepsilon}{3})$. Pak pro každé $b \in U(a, \delta) \cap M$ podle trojúhelníkové nerovnosti, poslední inkluze a podmínky 3 je

$$|f(a) - f(b)| \le |f(a) - f_{n_i}(a)| + |f_{n_i}(a) - f_{n_i}(b)| + |f_{n_i}(b) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\ .$$

Tedy je f spojitá v bodě a. $\square$

Následující definice je teď snad srozumitelnější.

Definice 4.4.13 (kvazistejnoměrná konvergence). *Funkce $f_n \colon M \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, definované na neprázdné množině $M \subset \mathbb{R}$ a konvergující k funkci $f \colon M \to \mathbb{R}$ k ní konvergují kvazistejnoměrně, pokud je splněna podmínka 2 z tvrzení 4.4.12.*

Kvazistejnoměrnou konvergenci jsme mohli definovat i pomocí formulačně jednoduší podmínky 3 z tvrzení 4.4.12, ale předchozí definice je, zdá se, standardní.

Směřujeme k větě charakterizující zachování spojitosti funkcí při bodové konvergenci na kompaktu. Budeme k tomu potřebovat jeden z nejdůležitějších výsledků v analýze, následující zesílení lemmatu 4.4.11 pro kompaktní množiny.

Věta 4.4.14 (Heine, 1895; Borel, 1895). *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní, právě když každé její pokrytí*

$$\bigcup_{i \in X} I_i \supset M$$

otevřenými intervaly $(I_i \mid i \in X)$ má konečné podpokrytí, existuje konečná podmnožina $Y \subset X$, že stále

$$\bigcup_{i \in Y} I_i \supset M\ .$$

Důkaz. Když M není kompaktní, pak (podle definice) není omezená nebo z ní lze vykonvergovat posloupností $(a_n) \subset M$, $a_n \to a \in \mathbb{R} \backslash M$ (viz definice 4.2.10 a tvrzení 4.2.15). V prvním případě je $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) \supset M$ pokrytí M otevřenými intervaly, které nemá konečné podpokrytí, a ve druhém tuto vlastnost má systém intervalů $(a - n, a - \frac{1}{n})$ a $(a + \frac{1}{n}, a + n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Nechť je množina M kompaktní a $(I_i \mid i \in X)$ je její pokrytí otevřenými intervaly. Podle lemmatu 4.4.11 můžeme předpokládat, že X je spočetná, řekněme $X = \mathbb{N}$. Pro spor předpokládejme, že toto pokrytí nemá konečné podpokrytí. Otevřené množiny

$$J_n := I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n,\ n = 1, 2, \ldots\ ,$$

tedy splňují $J_1 \subset J_2 \subset \dots$ a $M \backslash J_n \neq \emptyset$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, ale na druhou stranu $M \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ vybereme prvek $a_n \in M \backslash J_n$. Posloupnost $(a_n) \subset M$ má podle věty 4.2.18 konvergentní podposloupnost s limitou $a \in M$. Pro jednoduchost značení nechť přímo $\lim a_n = a$. Vezmeme index $m \in \mathbb{N}$, že $a \in J_m$. Protože je J_m otevřená, existuje $\delta > 0$, že $U(a, \delta) \subset J_m$. Protože $J_m \subset J_n$ a $a_n \notin J_n$ pro každé $n \geq m$, nutně $a_n \notin U(a, \delta)$ pro každé $n \geq m$. To ale není možné, a je limitou posloupnosti (a_n). Dostali jsme spor. □

Slíbená charakterizační věta pro bodovou konvergenci na kompaktech je:

Věta 4.4.15 (Arzelà, 1883). *Nechť funkce*

$$f\colon M \to \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R} \text{ je neprázdná a kompaktní množina}\,,$$

je limitou posloupnosti spojitých funkcí $f_n\colon M \to \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $N \in \mathbb{N}$ existuje

$$\text{konečná množina } X \subset \mathbb{N}, \text{ že } \min X > N$$

a pro každé $a \in M$ existuje $n = n(a) \in X$, že $|f(a) - f_n(a)| < \varepsilon$.

Důkaz. Nechť f je spojitá (levá strana ekvivalence). Pravá strana ekvivalence nyní plyne hned z ekvivalence částí 1 a 2 tvrzení 4.4.12 a z věty 4.4.14 (nakonec pomineme otevřené intervaly I_i).

Naopak, nechť platí pravá strana ekvivalence a je dán bod $a \in M$ a číslo $\varepsilon > 0$. Protože $f_n \to f$ na M, existuje $N \in \mathbb{N}$, že pro každé $n > N$ je $|f(a) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Nyní k $\frac{\varepsilon}{3}$ a N vezmeme konečnou množinu indexů $X \subset \mathbb{N}$ podle pravé strany ekvivalence. Všechny f_n jsou spojité a X je konečná, tedy existuje malé $\delta > 0$, že $f_n(U(a, \delta) \cap M) \subset U(f_n(a), \frac{\varepsilon}{3})$ pro každé $n \in X$. Nechť $b \in U(a, \delta) \cap M$ je libovolný bod. Vezmeme $n = n(b) \in X$, že $|f(b) - f_n(b)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (podle vlastnosti množiny X, též ale $n(b) > N$). Podle trojúhelníkové nerovnosti máme

$$|f(a) - f(b)| \leq |f(a) - f_n(a)| + |f_n(b) - f_n(a)| + |f_n(b) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

První absolutní hodnotu jsme odhadli díky $n > N$, druhou díky hořejší inkluzi a třetí volbou n jako $n = n(b) \in X$ Odhad platí pro každé $b \in U(a, \delta) \cap M$, takže funkce f je spojitá v bodě a. □

Ekvivalentně lze Arzelovu větu reformulovat takto: bodová limita f spojitých funkcí f_n na kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}$ je spojitá, právě když

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N}\, \forall a \in M: \min_{i=1,2,\dots,m} |f(a) - f_{n+i}(a)| < \varepsilon\,.$$

Úloha 4.4.16. *Ukažte, že ve znění věty nelze, narozdíl od definice 4.4.13 a tvrzení 4.4.12, podmínku $\min X > N$ vypustit (ekvivalentně nelze v poslední reformulaci nahradit n nulou).*

Italský matematik *Cesare Arzelà (1847–1912)* (narodil se i zemřel v obci či souměstí („comune“) Santo Stefano di Magra v italském kraji Ligurie, působil dva roky na Univerzitě v Palermu a od r. 1880 na Boloňské univerzitě) se podílel i na známé *Arzelově–Ascoliho větě*, analogii věty 2.2.5 pro posloupnosti funkcí:

> každá posloupnost (f_n) funkcí $f_n\colon M \to \mathbb{R}$ definovaných na neprázdné kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}$ a splňující (i) $|f_n(a)| < c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $a \in M$ (tzv. stejná omezenost, $c > 0$ je konstanta) a (ii) to, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, pro něž $|f_n(a) - f_n(b)| < \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $a, b \in M$ s $|a - b| < \delta$ (tzv. stejná (stejnoměrná) spojitost), obsahuje podposloupnost (g_n), jež na M stejnoměrně konverguje k nějaké funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$.

A tou oddíl o stejnoměrné spojitosti a (kvazi)stejnoměrné konvergenci uzavřeme.

Úloha 4.4.17. *A proč ne — dokažte Arzelovu–Ascoliho větu.*

4.5 Každá vyčíslitelná reálná funkce je spojitá

Vyčíslitelná reálná čísla. Speckerova věta. Vyčíslitelné reálné funkce. Každá taková funkce je spojitá.

Podíváme se na reálná čísla a na reálné funkce efektivně, z pozice jejich vyčíslitelnosti pomocí algoritmu. Předpokládáme, že čtenář je seznámený s pojmem algoritmu a zná některou jeho přesnou definici, například jako Turingova stroje. Začneme čísly.

Typické reálné číslo je nekonečná posloupnost desetinných cifer, například $-\frac{1}{9} = -0.1111\ldots$ nebo $\pi = 3.1415926\ldots$. I takové nekonečné objekty ale často dokážeme úplně a beze ztráty informace zakódovat do objektů konečných, do algoritmů (počítačových programů) generujících postupně všechny cifry desetinného rozvoje daného reálného čísla. Příslovce „často“ v předchozí větě odpovídá skutečnosti a současně jí naprosto neodpovídá. Naprosto neodpovídá skutečnosti, protože algoritmů je jen spočetně mnoho, kdežto $\mathbb{R}$ je nespočetná množina, a tak téměř žádné reálné číslo algoritmem zachytit nelze. Dosti skutečnosti odpovídá, protože všechna „konkrétní“ reálná čísla zadaná různými vzorci, nekonečnými řadami a součiny, jako řešení rovnic a podobně jsou tím už vlastně zadána jistým algoritem a na ostatní, takto nezadatelná, reálná čísla se lze do značné míry oprávněně dívat jako na logické a množinové přízraky, kterých se nelze žádným způsobem dotknout a které tedy ani pořádně neexistují.

Místo o „konkrétních“ či „algoritmicky zakódovatelných“ reálných číslech budeme v souladu se zavedenou terminologií psát o *vyčíslitelných reálných číslech*. Idea takového čísla je prostá. *Jméno* reálného čísla $\alpha \in \mathbb{R}$ je každá posloupnost

$$(a_n) \subset \mathbb{Q} \ \text{ splňující } \ |\alpha - a_n| \le \frac{1}{n} \ \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\,.$$

Vyčíslitelná reálná čísla pak jsou přesně reálná čísla s vyčíslitelnými jmény: v každém kroku n algoritmus poskytne aproximaci zlomkem a_n, o němž víme, jak nejvýše daleko od α leží.

Definice 4.5.1 (vyčíslitelné $\alpha \in \mathbb{R}$). *Reálné číslo α je vyčíslitelné, má-li vyčíslitelné jméno — existuje algoritmus $\mathcal{A}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, který pro každý vstup $n \in \mathbb{N}$ vypočte jako výstup zlomek $\mathcal{A}(n)$ splňující*

$$|\alpha - \mathcal{A}(n)| \le \frac{1}{n}\ .$$

Jak to tedy je s π?

Úloha 4.5.2. *Pomocí nám již známé identity*

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

dokažte, že π je vyčíslitelné reálné číslo.

Cantorovsky vyčíslitelné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ můžeme definovat jako takové, pro nějž existuje algoritmus $\mathcal{A}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^2$, který pro vstupy $n \in \mathbb{N}$ počítá jako výstupy dvojice zlomků $\mathcal{A}(n)_1$ a $\mathcal{A}(n)_2$ splňující

$$\mathcal{A}(1)_1 \le \mathcal{A}(2)_1 \le \cdots \le \alpha \le \cdots \le \mathcal{A}(2)_2 \le \mathcal{A}(1)_2 \ \text{ a } \ \mathcal{A}(n)_2 - \mathcal{A}(n)_1 \to 0\ .$$

V tomto pojetí tedy $\mathcal{A}$ počítá do sebe vnořené uzavřené racionální intervaly

$$[\mathcal{A}(n)_1,\, \mathcal{A}(n)_2] \ni \alpha$$

a s délkami jdoucími k 0.

Úloha 4.5.3. *Dokažte, že reálné číslo je vyčíslitelné, právě když je Cantorovsky vyčíslitelné. Ukažte, že algoritmus z jedné definice lze vždy efektivně transformovat do algoritmu druhé definice.*

Úloha 4.5.4. *Číslo π jsme ale nezavedli řadou, ale jako délku horního půloblouku jednotkové kružnice, viz definice 3.4.16. Dává tato definice, možná s nějakou úpravou, vyčíslitelnost π?*

Úloha 4.5.5. *Dokažte, že každé algebraické reálné číslo α je vyčíslitelné.*

Úloha 4.5.6. *Dokažte, že součet, součin a podíl dvou vyčíslitelných reálných čísel je vyčíslitelné reálné číslo.*

Jak jsme se už zmínili, vyčíslitelná čísla tvoří spočetnou podmnožinu $\mathbb{R}$.

Úloha 4.5.7. *Dokažte, že existuje taková konvergentní posloupnost vyčíslitelných čísel $(a_n) \subset \mathbb{R}$, že* $\lim a_n$ *není vyčíslitelná.*

Za tuto trochu nejapnou úlohu se čtenářce omlouváme, následující věta je již mnohem zajímavější.

Věta 4.5.8 (E. Specker, 1949). *Existuje takový algoritmus*

$$\mathcal{A}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}\,,$$

že posloupnost $(\mathcal{A}(n)) \subset \mathbb{Q}$ *je rostoucí a konvergentní, ale její limita*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}(n) \in \mathbb{R}$$

není vyčíslitelná.

V důkazu věty použijeme následující lemma.

Lemma 4.5.9. *Nechť* $(c_n) \subset \{0,1\}$ *je posloupnost nul a jedniček a součet řady*

$$\beta = \sum c_n 4^{-n}$$

je vyčíslitelné reálné číslo. Pak existuje takový algoritmus $\mathcal{U}\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$*, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je*

$$\mathcal{U}(n) = c_n\,.$$

Jen ze znalosti vyčíslitelného jména čísla β *tedy lze spočítat jeho kvaternární cifry.*

Důkaz. Když $\gamma = \sum c_n' 4^{-n}$, $c_n' \in \{0,1\}$, je součet jiné řady téhož druhu, $\gamma > \beta$ a pro číslo $n \in \mathbb{N}$ je $c_n \neq c_n'$, pak zřejmě $c_n' > c_n$ a $c_m' \geq c_m$ pro každé $m < n$ a

$$\gamma - \beta \geq 4^{-n} - \sum_{k>n} 4^{-k} = \frac{1}{4^n} - \frac{1/4^{n+1}}{1-1/4} = \frac{2}{3\cdot 4^n}\,.$$

Pokud $\gamma > \beta$, ale $c_1 = c_1', \ldots, c_n = c_n'$, pak také zřejmě

$$\gamma - \beta \leq \sum_{k>n} 4^{-k} = \frac{1}{3\cdot 4^n}\,.$$

$\mathcal{U}$ pracuje následovně. Pro vstup $n \in \mathbb{N}$ vypočítá všechny zlomky tvaru $\gamma = \sum_{k=1}^{n} c_k' 4^{-k}$, $c_k' \in \{0,1\}$, a porovná je podle velikosti se zlomkem $q = \mathcal{V}(m)$, kde $m = 6\cdot 4^n + 1$ a $\mathcal{V}$ je algoritmus počítající vyčíslitelné jméno čísla β. Když se γ shoduje s β ve všech prvních n kvaternárních cifrách (tohle $\mathcal{U}$ neprovádí, je to jen naše úvaha), podle druhé předchozí nerovnosti je

$$|\gamma - q| \leq |\gamma - \beta| + |\beta - q| \leq \frac{1}{3\cdot 4^n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{2\cdot 4^n}\,.$$

Když se γ s β v některé z prvních n kvaternárních cifer neshoduje, podle první předchozí nerovnosti je

$$|\gamma - q| \geq |\gamma - \beta| - |\beta - q| \geq \frac{2}{3\cdot 4^n} - \frac{1}{m} > \frac{1}{2\cdot 4^n}\,.$$

Existuje tedy právě jedno γ splňující nerovnost $|\gamma - q| < \frac{1}{2\cdot 4^n}$, totiž γ shodující se s β ve všech prvních n kvaternárních cifrách, a $\mathcal{U}$ ho porovnáváním s q snadno nalezne. Pak $\mathcal{U}$ oznámí jako výstup n-tou cifru tohoto čísla γ a zastaví se. □

Důkaz věty 4.5.8. Z teorie rekurze je dobře známá existence rekurzivně spočetné, avšak nerekurzivní množiny $M \subset \mathbb{N}$. To jest, existuje algoritmus $\mathcal{B}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ počítající prostou funkci, pro jejíž obraz

$$M = \mathcal{B}(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$$

nelze algoritmicky rozhodovat náležení — neexistuje algoritmus $\mathcal{C}\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, aby pro každé $m \in \mathbb{N}$ platilo, že $\mathcal{C}(m) = 1 \iff m \in M$. To plyne z algoritmické nerozhodnutelnosti halting problému. Hledaný algoritmus $\mathcal{A}$ pak definujeme jako

$$\mathcal{A}(n) = \sum_{k=1}^{n} 4^{-\mathcal{B}(k)} \ .$$

Je jasné, že jeho hodnoty tvoří rostoucí a číslem 1 shora omezenou posloupnost zlomků, která má tudíž limitu $\alpha = \sum 4^{-\mathcal{B}(n)} \in \mathbb{R}$. Kdyby reálné číslo α bylo vyčíslitelné, mohli bychom podle lemmatu 4.5.9 počítat algoritmem jeho kvaternární cifry, tedy algoritmicky rozhodovat pro každé $m \in \mathbb{N}$, zda $m = \mathcal{B}(n)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, tedy algoritmicky rozhodovat náležení do $\mathcal{B}(\mathbb{N}) = M$. To je ale ve sporu s vlastností množiny M. □

Přejdeme k pojmu *vyčíslitelné reálné funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bude definovaná pro *všechna* reálná čísla včetně nevyčíslitelných, která představují naprostou většinu $\mathbb{R}$. Pro jednoduchost se ale omezíme na funkce definované na celém $\mathbb{R}$. Měla by to opět být funkce, kterou lze beze ztráty informace zakódovat do konečného objektu, algoritmu $\mathcal{A}$. Intuitivně, $\mathcal{A}$ dostane jako vstup jméno reálného čísla α a jako výstup vygeneruje jméno reálného čísla $f(\alpha)$. To si žádá podrobnější vysvětlení, neboť vstupy i výstupy algoritmů mohou být pouze konečné objekty. $\mathcal{A}$ bude (jednopáskový) Turingův stroj

$$\mathcal{A}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \ ,$$

jehož program je vybavený speciálním příkazem (krokem). Ten umožňuje $\mathcal{A}$ pro vypočítaná čísla $m \in \mathbb{N}$ se dotazovat orákula O_α na hodnoty $O_\alpha(m) \in \mathbb{Q}$ a dát si tyto odpovědi zapisovat na pásku. Orákulum je definované níže.

Definice 4.5.10 (orákulum reálného čísla). *Orákulem O_α čísla $\alpha \in \mathbb{R}$ rozumíme každé zobrazení*

$$O_\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \ \ \textit{splňující} \ \ |\alpha - O_\alpha(m)| \le \frac{1}{m} \ .$$

Orákulum O_α chápeme jako černou skříňku, která pro jakýkoli dotaz $m \in \mathbb{N}$ sdělí hodnotu $O_\alpha(m) \in \mathbb{Q}$ aproximující α s chybou nejvýše $\frac{1}{m}$. Z praktického hlediska je O_α jménem čísla α.

$\mathcal{A}$ ukončí výpočet v koncovém stavu, kdy je na pásce napsaný výstup $\mathcal{A}(n) \in \mathbb{Q}$.

Definice 4.5.11 (vyčíslitelná reálná funkce). *Funkce*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

je vyčíslitelná, pokud existuje Turingův stroj $\mathcal{A}$ se speciálním příkazem (popsaný výše), který pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, každé orákulum O_α čísla α (definované výše) a každý vstup $n \in \mathbb{N}$ ukončí po konečně mnoha krocích výpočet s výstupem $\mathcal{A}(n) \in \mathbb{Q}$ splňujícím

$$|f(\alpha) - \mathcal{A}(n)| \le \frac{1}{n}\ .$$

Úloha 4.5.12. *Ukažte, že lineární funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$, je vyčíslitelná.*

Jako o něco složitější příklad popíšeme algoritmus $\mathcal{A}$ dosvědčující, že funkce

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1\ ,$$

je vyčíslitelná. Pro $n \in \mathbb{N}$, číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ a jeho aproximaci $x \in \mathbb{Q}$ splňující $|\alpha - x| \le \frac{1}{n}$ máme odhad

$$|f(\alpha) - f(x)| \le |\alpha - x| \cdot (|\alpha| + |x|) \le \frac{2|\alpha| + 1}{n}\ .$$

Buď nyní dáno číslo $\alpha \in \mathbb{R}$, jeho orákulum O_α a vstup $n \in \mathbb{N}$. Algoritmus $\mathcal{A}$ si zapamatuje vstup n a zeptá se orákula na $q = O_\alpha(1)$. Z $q \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$ plyne $|\alpha| \le |q| + 1$. Pak $\mathcal{A}$ spočítá přirozené číslo

$$m = \lceil n(2|q| + 3) \rceil$$

a zeptá se orákula na $r = O_\alpha(m) \in \mathbb{Q}$. Nakonec $\mathcal{A}$ z r vypočítá $f(r) = r^2 - 1$, napíše to pásku a přejde do koncového stavu. Výsledek je vpořádku, podle hořejšího odhadu a definice čísla m máme

$$|f(\alpha) - f(r)| \le \frac{2|\alpha| + 1}{m} \le \frac{2|\alpha| + 1}{n(2|q| + 3)} \le \frac{2|q| + 3}{n(2|q| + 3)} = \frac{1}{n}\ .$$

Uvedený model vyčíslitelných reálných funkcí je zajímavý, má však určitý nedostatek či zvláštní rys, který je zabudovaný již v samotné definici a je vysvětlený v následující větě.

Věta 4.5.13 (É. Borel, 1912). *Každá vyčíslitelná reálná funkce*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

je spojitá.

Důkaz. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nespojitá funkce, takže pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ s limitou α, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$|f(\alpha) - f(a_n)| > \varepsilon \ .$$

Předpokládáme, že f je vyčíslitelná algoritmem $\mathcal{A}$ a odvodíme spor. Vezmeme $m \in \mathbb{N}$ s $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ a takové orákulum O_α čísla α, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$|\alpha - O_\alpha(k)| \le \frac{1}{2k} \ .$$

Orákulum tedy aproximuje α lépe, než musí. Spustíme $\mathcal{A}$ pro vstup m s tímto orákulem O_α. Po konečném běhu algoritmus vydá zlomek $r = \mathcal{A}(m)$ s

$$|r - f(\alpha)| \le \frac{1}{m} \ .$$

Vezmeme přirozené číslo

$$M = \max(\{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{A} \text{ se v tomto běhu dotazoval na } O_\alpha(n)\}) \ .$$

Je dobře definované, protože $\mathcal{A}$ mohl mít k orákulu jen konečně mnoho dotazů. Vezmeme nyní tak velké $n \in \mathbb{N}$, že $|\alpha - a_n| \le \frac{1}{2M}$ a označíme si $\beta = a_n$. Protože O_α má rezervu, lze vzít orákulum O_β čísla β tak, že

$$O_\beta(k) = O_\alpha(k),\ \ k = 1, 2, \ldots, M$$

(a zlomky $O_\beta(k) \in [\beta - \frac{1}{k}, \beta + \frac{1}{k}]$ pro $k > M$ jsou libovolné). Spustíme $\mathcal{A}$ znovu, opět pro vstup m ale s orákulem O_β. Druhý běh $\mathcal{A}$ je totožný s prvním, protože $\mathcal{A}$ dostává na své dotazy k orákulu stejné odpovědi jako při prvním běhu. I výstup bude proto stejný, opět zlomek $r = \mathcal{A}(m)$. Nyní ale

$$|f(\beta) - r| \ge |f(\beta) - f(\alpha)| - |f(\alpha) - r| > \varepsilon - \frac{1}{m} > \frac{1}{m} \ .$$

To je spor s tím, že algoritmus $\mathcal{A}$ by měl počítat $f(\beta)$ pro jakékoli orákulum O_β čísla β. □

I tak jednoduchá funkce $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako

$$g(0) = 1 \ \text{ a } \ g(x) = 0 \ \text{ pro } \ x \ne 0$$

tedy není vyčíslitelná, alespoň ne v námi popsaném modelu. Je to ale logické: žádným konečným počtem dotazů (a víc jich algoritmus k dispozici nemá) k obecnému orákulu O_α nelze v případě, že $\alpha = 0$, zjistit, zda je α nula nebo ne.

Úloha 4.5.14. *Nechť $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je vyčíslitelná funkce a $\beta \in \mathbb{R}$ je vyčíslitelné číslo. Dokažte, že $g(\beta)$ je vyčíslitelné reálné číslo.*

Další úlohy na reálné vyčíslitelné funkce jsou 4.6.8 a 4.6.7.

4.6 Poznámky a další úlohy

Oddíl 4.1. Tvrzení 4.1.23

Oddíl 4.2.

Oddíl 4.3. O paradoxu běžkyně se lze více dočíst v preprintu [29] K. Burnse, O. Davidovichové a D. Davisové a v literatuře v něm citované, například v článku [109] J. C. Oxtobyho.

Oddíl 4.4. Výraz „zpola stejnoměrná konvergence" pro jistou kvazistejnoměrnou konvergenci používá V. Jarník [71, Dodatek 1, §3], když jí ve větě 248 přesně charakterizuje přípustnost výměny pořadí limity pro $n \to \infty$ a limity v bodě pro posloupnost funkcí (f_n). Pěkně jsou posloupnosti a řady funkcí a (kvazi)stejnoměrná konvergence vysvětleny ve skriptech [148] L. Vrány. Prvně kvazistejnoměrnou konvergenci zkoumal C. Arzelà [6], později ji v r. 1948 P. S. Aleksandrov v [2] zobecnil na posloupnosti funkcí z topologického do metrického prostoru (v tomto článku P. S. Aleksandrov dokazuje v uvedené obecnější verzi ekvivalenci podmínek 1 a 2 tvrzení 4.4.12). Další zajímavosti o kvazistejnoměrné konvergenci obsahují články [38] R. Drozdowskiho, J. Jędrzejewskiho a A. Sochaczewské a [30] A. Casertové, G. Di Maia a L'. Holé.

Oddíl 4.5. Vyčíslitelná reálná čísla a funkce uvažoval É. Borel v r. 1912 v [19], nepracoval ale s přesně definovaným pojmem algoritmu. Ten spolu s definicí vyčíslitelného reálného čísla zavedl *Alan M. Turing (1912-1954)* (jeden z tvůrců přesného pojmu algoritmu, matematik, informatik, kryptograf, maratónec, oběť britské zločinné justice, badatel v oblasti nulových bodů funkce $\zeta(s)$, viz A. Hodges [67]) v přelomovém článku [143]. Větu 4.5.8 dokázal E. Specker v [129], ale A. Turingovi byla asi také již známá. O vyčíslitelných reálných funkcích poprvé pojednali v článcích [57] a [58] A. Grzegorczyk a v [89] D. Lacombe. Vyčíslitelnou reálnou analýzou se zabývají monografie [153] K. Weihraucha a [81] Ker-I Koa (tato pro polynomiální složitost). Zajímavé jsou stručné přehledy M. Bravermana a S. Cooka [21] a L. Blumové [15]. M. Braverman v [20] ukazuje, jak vyčíslitelnost reálných funkcí rozšířit tak, aby se například nespojitá impulzová funkce, zmíněná v závěru oddílu, stala vyčíslitelnou. Historii vyčíslitelné analýzy a konstruktivní matematiky poutavě popisují v [7] J. Avigad a V. Brattka, [7, kapitola 2. 9] uvádí přehled různých definic vyčíslitelných reálných funkcí a vztahů mezi nimi.

Pozoruhodný vzorec pro π, přesněji pro $\frac{1}{\pi}$, založený na neobyčejně rychle konvergující nekonečné řadě a objevený bratry Chudnovskými je

$$\frac{1}{\pi} = 12 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!}{(3n)!(n!)^3} \cdot \frac{13591409 + 545140134n}{640320^{3n+3/2}}\ .$$

Podrobně ho v němčině dokazuje na asi 40 stranách L. Milla v [101]. Uvádí, že každý sčítanec přidává nových alespoň 14 platných desetinných míst a že tento vzorec použil P. Trueb v listopadu 2016 k výpočtu π na $22 \cdot 10^{12}$ desetinných míst.

Další úlohy

Úloha 4.6.1. *Spočítejte limity pro $x \to +\infty$:*

$$\lim\,(\log(x+1) - \log x),\ \lim\,(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}),\ \lim\,(2^{x+1} - 2^x)\ .$$

Úloha 4.6.2. *Spočítejte limity pro $x \to 0$:*

$$\lim \log x,\ \lim \cos(1/x),\ \lim\, x \log x\ .$$

Úloha 4.6.3. *Ano nebo ne: když funkce $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ nabývá každou mezihodnotu, to jest*

$$a,\, b \in [0,1],\, c \in \mathbb{R},\, f(a) < c < f(b) \Rightarrow \exists\, d \in [0,\, 1]:\ f(d) = c\ ,$$

potom je f spojitá.

Úloha 4.6.4. *Dokažte, že pro každou kompaktní množinu N, kde $N \subset M \subset \mathbb{R}$, a spojitou funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$ je obraz $f(N)$ kompaktní.*

Úloha 4.6.5. *Ano nebo ne: každá kompaktní množina $A \subset \mathbb{R}$ má nejmenší a největší prvek.*

Úloha 4.6.6. *Dokažte, že každý konvexní mnohoúhelník v rovině se dá rozdělit přímkou na dvě části se stejnými plochami a stejnými obvody.*

Úloha 4.6.7. *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou vyčíslitelné funkce. Dokažte, že složená funkce $f \circ g = f(g)$ je vyčíslitelná.*

Úloha 4.6.8. *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rostoucí vyčíslitelná funkce, zdola i shora neomezená. Dokažte, že inverzní funkce f^{-1} je vyčíslitelná.*

Úloha 4.6.9. *Jaký čas dosáhl A. M. Turing v maratónu? Viděl jako divák v hledišti vítězství E. Zátopka v běhu na 10000 m na OH v Londýně v r. 1948?*

Kapitola 5

Derivace funkcí

V oddílu 5.1 zavedeme derivaci reálné funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ v bodě a jejího definičního oboru $M \subset \mathbb{R}$. O a předpokládáme pouze, že je limitou zprava i zleva bodů z M různých od a. Uvedeme základní výsledky okolo derivací: souvislost s tečnou, spojitostí a extrémy, aritmetika derivací, derivace složené funkce. Geometricky odvodíme vzorec pro derivaci kosinu a odvodíme vzorce pro derivace dalších elementárních funkcí. Pomocí derivací dokážeme transcendenci (nealgebraičnost) exponenciály a logaritmu.

Oddíl 5.2 je věnován důkazu více než 115 let staré věty H. Lebesguea: mají-li všechny sečny grafu funkce $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ omezený sklon, pak má f skoro všude tečnu.

V oddílu 5.3 uvádíme věty o střední hodnotě funkce a jejich důsledky a použití. Tyto věty dávají do souvislosti hodnoty funkce a hodnoty jejích derivací (prvního i vyšších řádů). Klasická a známá Rolleova věta umožňuje například dokázat, že posloupnost hodnot logaritmu $(\log n)$ se nedá definovat žádnou lineární rekurencí s polynomiálními koeficienty. Lagrangeova věta

5.1 Základní vlastnosti derivací

Bilimitní bod, derivace funkce v bodě, derivace a tečna. Lokální a globální extrémy funkce. Nutná podmínka extrému a podezřelé body. Derivace implikuje spojitost. Aritmetika derivací. Derivace složené funkce a derivace inverzní funkce. Derivace vyšších řádů, abstraktně i klasicky. Derivace mocninné řady. Geometrické odvození derivace kosinu (a sinu v úloze). Přehled derivací elementárních funkcí. Transcendence exponenciály a logaritmu pomocí derivování.

Derivace patří k hlavním nástrojům matematické analýzy a vlastně celé fyziky a přírodovědy. Umožňují nalézt extrémní hodnoty dané funkce a aproximovat ji, nebo i přesně vyjádřit, pomocí jednoduchých funkcí (lineárních, polynomů, mocninných řad). Rovnice fyziky, kterými popisuje náš svět, jsou typicky rovnice diferenciální, vztahy mezi derivacemi hledaných funkcí.

Definice 5.1.1 (bilimitní bod). *Pro $a \in \mathbb{R}$ a $M \subset \mathbb{R}$ řekneme, že a je bilimitní bod množiny M, pokud pro každé $\delta > 0$ je*

$$P^-(a,\,\delta) \cap M \neq \emptyset \quad i \quad P^+(a,\,\delta) \cap M \neq \emptyset\ .$$

Ekvivalentně, existují posloupnosti $(b_n), (c_n) \subset M$, že $b_1 < b_2 < \cdots < a < \cdots < c_2 < c_1$ a $\lim b_n = \lim c_n = a$.

Bilimitní body zavádíme kvůli definici derivace, jen v nich může (podle naší definice níže) existovat. Na rozdíl od limitních bodů jsou vždy vlastní a budeme je používat v situaci, kdy $a \in M$.

Definice 5.1.2 (derivace funkce v bodě, i jednostranná). *Nechť*

$$a \in M \subset \mathbb{R},\ \ a \text{ je bilimitní bod } M \text{ a } f\colon M \to \mathbb{R}\ .$$

Derivace funkce f v bodě a, značeno $f'(a)$ či $\frac{df}{dx}(a)$, se definuje jako hodnota limity

$$f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}^*\ ,$$

když existuje.

Nechť $P^+(a,\delta) \cap M \neq \emptyset$ pro každé $\delta > 0$. Derivace funkce f v bodě a zprava, značeno $f'_+(a)$, je hodnota limity

$$f'_+(a) := \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ ,$$

když existuje. Podobně definujeme $f'_-(a)$, derivaci funkce f v bodě a zleva.

Hodnoty derivací $f'(a)$, $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$ mohou být i nevlastní a

$$f'(a) = A \iff f'_-(a) = A \;\&\; f'_+(a) = A$$

— srovnej s úlohou 4.1.12. Pro definovanost $f'(a)$ předpokládáme více než u $\lim_{x\to a} f(x)$, totiž aby a byl bilimitní bod definičního oboru f, zatímco pro limitu stačí limitní bod. Důvodem je, že s obyčejným limitním bodem v definici derivace by obecně neplatil známý výsledek, že $f'(a) \neq 0$ vylučuje lokální extrém f v a (viz úloha 5.1.13). V učebnicích analýzy se v definici $f'(a)$ pro jednoduchost většinou předpokládá, že f je definovaná na nějakém okolí $U(a,\delta)$. Tak si situaci občas zjednodušíme i my, například v definici tečny.

Úloha 5.1.3. *Dokažte, že když $a \in M \subset \mathbb{R}$, kde a je bilimitní bod množiny M, pak funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ má v a vlastní derivaci, právě když existuje funkce $g\colon M \to \mathbb{R}$, která je v a spojitá a pro každé $x \in M$ splňuje rovnost*

$$f(x) - f(a) = (x-a)g(x)\ .$$

Jaký je vztah mezi $f'(a)$ a g?

Všechny vlastní hodnoty derivací $(a, f'(a))$ vytvářejí novou funkci, *derivaci* f' původní funkce f.

Definice 5.1.4 (derivace jako funkce). *Buď dána funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbb{R}$. Nechť*

$$N = \{a \in M \mid \textit{existuje vlastní derivace } f'(a)\}\ .$$

Potom funkci

$$f'\colon N \to \mathbb{R},\ a \mapsto f'(a)\ ,$$

nazveme derivací funkce f.

Definiční obor N derivace funkce f je tedy podmnožinou definiční oboru M funkce f a skládá se právě z těch $a \in M$, které (i) jsou bilimitními body množiny M a (ii) v nichž má f vlastní derivaci $f'(a) \in \mathbb{R}$. V definici 5.1.33 derivací vyšších řádů se množina N označuje jako $M^{(1)}$.

Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ a funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je v bodě a spojitá. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in U(a, \delta)$ bod

$$(x,\ f(x)) \in \mathbb{R}^2$$

grafu funkce f leží ve vodorovném pásu určeném rovnoběžkami $y = f(a) - \varepsilon$ a $y = f(a) + \varepsilon$. Přímka zvaná tečna aproximuje graf f ještě lépe, pokud ovšem existuje. Než ji definujeme, zavedeme rovinný úhel. Pro přímku $\ell \subset \mathbb{R}^2$ v rovině, bod $B \in \ell$ a úhel $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ jako

$$V(\ell,\ B,\ \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$$

označíme rovinný úhel s osou ℓ, vrcholem B a vrcholovým úhlem 2ε. Tvoří ho body, kterými projde přímka ℓ, otočíme-li ji okolo B v kladném i záporném smyslu o úhel ε.

Úloha 5.1.5. *Popište množinu $V(\ell, B, \varepsilon)$ pomocí souřadnic analyticky, pomocí jistých rovnic a nerovností.*

Definice 5.1.6 (tečna). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\kappa > 0$ a je dána funkce*

$$f\colon U(a,\ \kappa) \to \mathbb{R}\ .$$

Přímku p jdoucí bodem $B = (a, f(a))$ nazveme tečnou ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a))$ — řečeno stručněji ale nepřesněji, tečnou k f v a — když pro každé $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ existuje $\delta \in (0, \kappa)$, že

$$x \in U(a,\ \delta) \Rightarrow (x,\ f(x)) \in V(p,\ B,\ \varepsilon)\ .$$

Když se tedy blížíme k bodu $B = (a, f(a))$, leží graf funkce f ve stále ostřejších a ostřejších úhlech s vrcholem B a osou p.

Úloha 5.1.7. *Ukažte, že f nemůže mít v a dvě různé tečny.*

Tvrzení 5.1.8 (tečna, sečna, derivace). *Nechť je dána funkce*

$$f\colon U(a,\,\delta)\to\mathbb{R}\ ,$$

kde $a\in\mathbb{R}$ a $\delta>0$, a přímka p, nikoli svislá, jdoucí bodem $B=(a,f(a))$. Potom jsou následující tři tvrzení ekvivalentní.

1. *(Je to tečna.) Přímka p je tečnou k funkci f v bodě a.*
2. *(Tečna jako limitní sečna.) Označíme-li pro $x\in P(a,\delta)$ přímku jdoucí body $(x,f(x))$ a B jako p_x a menší z obou úhlů sevřených přímkami p a p_x jako $u(x)\in[0,\frac{\pi}{2}]$, pak*

$$\lim_{x\to a}u(x)=0\ .$$

3. *(Tečna pomocí derivace.) Funkce f má v a vlastní derivaci $f'(a)$ a přímka p je daná rovnicí*

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)\ .$$

Důkaz. Implikace $1\Rightarrow 2$. To plyne hned z definice tečny, když totiž bod $(x,f(x))\in V(p,B,\varepsilon)$, pak $u(x)\le\varepsilon$.

Implikace $2\Rightarrow 3$. Nechť směrnice přímky p je $\tan(u_p)\in\mathbb{R}$ s $u_p\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Směrnice přímky p_x je

$$\tan(u_{p_x})=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(stále $u_{p_x}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$). Máme

$$x\to a\Rightarrow u_{p_x}\to u_p\ ,$$

protože úhel mezi přímkami p_x a p jde k nule. Funkce tangens je na $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ spojitá, takže $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\to\tan(u_p)$ a $f'(a)=\tan(u_p)$. Směrnice p je tedy také $f'(a)$, což dává uvedenou rovnici pro p.

Implikace $3\Rightarrow 1$. Limita v definici derivace $f'(a)$ říká, že pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$, že

$$x\in P(a,\,\delta)\Rightarrow f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\Delta(x)(x-a),\ |\Delta(x)|<\varepsilon\ .$$

Tedy

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right|<\varepsilon\ .$$

Protože $f'(a)$ je směrnice přímky p, leží bod $(x,f(x))$ v úhlu $V(p,B,\arctan\varepsilon)$. Pro $\varepsilon\to 0$ samozřejmě i $\arctan\varepsilon\to 0$. $\square$

Tvrzení by se stalo elegantnějším po vynechání zákazu svislosti p, kdy bychom ve třetí části dovolili nevlastní derivaci $f'(a)=\pm\infty$ a příslušnou p danou rovnicí $x=a$. Bohužel by pak ale pro svislé přímky p tvrzení vždy neplatilo: funkce

$$f(0)=1,\ f(x)=0\ \text{ pro }\ x\neq 0\ ,$$

má v 0 svislou tečnu, ale derivace $f'(0)$ neexistuje.

Úloha 5.1.9. *Navrhněte vhodnou modifikaci v definici 5.1.6 tečny, aby uvedené rozšíření předchozího tvrzení platilo i pro svislé přímky p.*

Derivace hrají stěžejní roli při určení lokálních a globálních extrémů funkcí, a proto jimi začneme ještě před aritmetikou derivací. Nejprve zavedeme názvosloví.

Definice 5.1.10 (lokální a globální extrémy funkce). *Nechť*

$$a \in M \subset \mathbb{R} \ \text{ a } \ f\colon M \to \mathbb{R}\,.$$

Funkce f má v bodě a (na množině M)

- *lokální maximum, pokud existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in U(a,\delta) \cap M$ je $f(x) \le f(a)$,*
- *ostré lokální maximum, pokud existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in P(a,\delta) \cap M$ je $f(x) < f(a)$,*
- *(globální) maximum, pokud $x \in M \Rightarrow f(x) \le f(a)$,*
- *ostré (globální) maximum, pokud $x \in M, x \ne a \Rightarrow f(x) < f(a)$.*

Obdobně definujeme lokální minimum, ostré lokální minimum, (globální) minimum a ostré (globální) minimum, pouze otočíme nerovnost na $f(x) \ge f(a)$, respektive na $f(x) > f(a)$. Lokální (resp. globální) minima a maxima funkce se souhrně označují jako její lokální (resp. globální) extrémy. Globální extrém je pochopitelně také lokálním extrémem.

Například funkce $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, daná jako $f(\alpha) = 0$ pro iracionální α a $f(p/q) = \frac{1}{q}$ pro zlomek $\frac{p}{q}$ v základním tvaru, má v každém iracionálním čísle lokální minimum s hodnotou 0 a v každém racionálním čísle $\frac{p}{q}$ ostré lokální maximum s hodnotou $\frac{1}{q}$. Má tedy lokální extrém v každém bodě, ale zdaleka není konstantní.

Úloha 5.1.11. *Dokažte tvrzení předchozího příkladu. Určete globální extrémy této funkce. Nalezněte její derivaci a jednostranné derivace v 0.*

Věta 5.1.12 (nenulová derivace vylučuje extrém). *Nechť*

$$a \in M \subset \mathbb{R} \ \text{ a též } \ f\colon M \to \mathbb{R}\,,$$

přičemž a je bilimitní bod množiny M. Nechť dále derivace $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ existuje (může být nevlastní) a nerovná se 0. Pak funkce f nemá v bodě a lokální extrém.

Důkaz. Přepokládáme, že $f'(a) < 0$. Případ $f'(a) > 0$ je podobný. Buď dáno $\delta > 0$. Podle definice $f'(a)$ a definice limity funkce v bodě tedy existují taková čísla $b, c \in U(a,\delta) \cap M$, že

$$b < a < c \ \text{ a } \ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0 \ \text{ i } \ \frac{f(c) - f(a)}{c - a} < 0\,.$$

Tedy $f(b) > f(a) > f(c)$ — v a není lokální extrém. □

Předchozí věta je jedním z nejznámějších a nejdůležitějších výsledků v kurzu matematické analýzy. V kontrastu s většinou učebnic, které předpokládají f definovanou na okolí bodu a, je naše pojetí obecné.

Úloha 5.1.13. *Ukažte na příkladu, že když v definici 5.1.2 a větě 5.1.12 slovo „bilimitní“ nahradíme slovem „limitní“, věta 5.1.12 přestane platit.*

Kontrapozice dává následující klasickou nutnou podmínku existence lokálního extrému.

Důsledek 5.1.14 (nutné pro lokální extrém). *Nechť*

$$a \in M \subset \mathbb{R} \ \text{ a též } \ f\colon M \to \mathbb{R}\,.$$

Když má f v a lokální extrém, pak

- *a není bilimitní bod množiny M nebo*
- *$f'(a)$ neexistuje nebo*
- *$f'(a) = 0$.*

Daná funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ tak může mít lokální extrém jen v „podezřelých“ bodech

$$\mathrm{Pdz}(f) := \{a \in M \mid a \text{ není bilimitní bod } M \vee f'(a) \text{ neexistuje} \vee f'(a) = 0\}\,.$$

Jako příklad nalezneme podezřelé body a extrémy pro čtyři funkce

$$f_1, \dots, f_4\colon [-1,\, 1] \to \mathbb{R}\,,$$

kde

$$f_1(x) = |x|,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^3 \ \text{ a } \ f_4(x) = \mathrm{sgn}(x)\,.$$

Máme

$$\mathrm{Pdz}(f_1) = \mathrm{Pdz}(f_3) = \{-1,\, 0,\, 1\},\ \mathrm{Pdz}(f_2) = \{-1,\, 1\} \ \text{ a } \ \mathrm{Pdz}(f_4) = [-1,\, 1]\backslash\{0\}\,.$$

Body -1 a 1 nejsou bilimitní body společného definičního oboru $[-1,1]$, ostatní body jsou bilimitní. Pro každé $a \in (-1,1)\backslash\{0\}$ derivace $f_1'(a)$, $f_2'(a)$ a $f_3'(a)$ existují a jsou nenulové ($f_1'(a) = \mathrm{sgn}(a)$, $f_2'(a) = 1$ a $f_3'(a) = 3a^2$), $f_1'(0)$ neexistuje (neboť $f_{1,-}'(0) = -1$ a $f_{1,+}'(0) = 1$), $f_2'(0) = 1$, $f_3'(0) = 0$ a f_4' má na $(-1,1)\backslash\{0\}$ nulovou derivaci a $f_4'(0) = +\infty$. Funkce f_1 má v -1 a 1 neostré maximum a v 0 ostré minimum. Funkce f_2 a f_3 mají v -1 ostré minimum a v 1 ostré maximum. Funkce f_4 má v každém bodě $a \in [-1,0)$ neostré minimum, v každém $a \in (0,1]$ neostré maximum a v 0 nemá ani lokální extrém. Jiné extrémy funkce $f_1, \dots, f_4$ nemají. Funkce f_1, f_2 a f_4 tak mají lokální extrém v každém podezřelém bodě, ale funkce f_3 ho v podezřelém bodě 0 nemá.

Ještě jednou zopakujeme, že v bodě, který není podezřelý, funkce lokální extrém nikdy nemá, v podezřelém bodě ho mít může a nemusí.

Tvrzení 5.1.15 (vlastní derivace $\Rightarrow$ spojitost). *Nechť*

$$a \in M \subset \mathbb{R} \ \ a\ též\ \ f\colon M \to \mathbb{R}\,,$$

kde a je bilimitní bod množiny M. Nechť dále existuje vlastní derivace $f'(a) \in \mathbb{R}$. Potom je funkce f v bodě a spojitá. Analogická tvrzení platí pro obě jednostranné derivace a obě jednostranné spojitosti (budou se nám hodit pro konvexní a konkávní funkce).

Důkaz. Důkaz kontrapozice implikace. Předpokládáme, že f není v a spojitá. Pak existuje $\delta > 0$ a taková posloupnost $(a_n) \subset M$, že $\lim a_n = a$ ale $|f(a_n) - f(a)| \ge \delta$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $a_n \ne a$,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}\right| = +\infty \quad (\text{neboť } |f(a_n) - f(a)| \ge \delta, \text{ ale } |a_n - a| \to 0)$$

a vlastní limita $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ neexistuje, díky větě 4.1.14. Podobně se argumentuje v jednostranných případech. □

Úloha 5.1.16. *Podejte dva přímé důkazy předchozího tvrzení.*

1. *Z existence vlastní limity $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ odvoďte spojitost f v a v ε–δ tvaru.*

2. *Pomocí aritmetiky limit funkcí (tvrzení 4.1.17) z rozkladu $f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x - a)$ odvoďte, že $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Pokud $f'(a) = \pm\infty$, může být funkce f v bodě a spojitá i nespojitá, funkce $\operatorname{sgn} x$ je v 0 nespojitá a $(\operatorname{sgn} x)'(0) = +\infty$, ale $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}$ má též $f'(0) = +\infty$, ale je v 0 spojitá. Lehce se najde i příklad funkce, jež je v bodě spojitá, ale nemá v něm derivaci. Existence vlastní derivace $f'(a)$ znamená, že f má v okolí a lineární aproximaci

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \Delta(x), \quad \text{kde} \quad \lim_{x\to a} \frac{\Delta(x)}{x - a} = 0$$

— chyba $\Delta(x)$ jde pro $x \to a$ k 0 řádově rychleji než identická funkce.

Uvedeme pár příkladů derivací, některé z nichž jsme už použili. Nechť n je nezáporné celé číslo, pak $x^n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má derivaci

$$(x^n)' = nx^{n-1}\,.$$

To plyne z binomické věty, pro $a \in \mathbb{R}$ a $h \to 0$ je

$$\frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}h^{i-1} = na^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j+1} a^{n-j+1}h^j \to na^{n-1}\,.$$

Podobně na celém $\mathbb{R}$ máme rovnost

$$(e^x)' = e^x$$

a exponenciální funkce se při derivováním nemění, což vešlo i do anekdot. Podle tvrzení 4.1.9 totiž $\frac{e^h-1}{h} \to 1$ pro $h \to 0$ a díky vlastnostem exponenciály tedy i

$$\frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \frac{e^a(e^h - 1)}{h} \to e^a \ .$$

Konstantní funkce $f_c\colon M \to \mathbb{R}$, $f_c(x) = c$ pro každé $x \in M$, má derivaci

$$f_c'(a) = 0$$

pro každý bilimitní bod $a \in M$ množiny M.

Úloha 5.1.17. *Dokažte z definice derivace, že pro každou nenulovou konstantu $c \in \mathbb{R}$, každou funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$ a každý bod $a \in M$ derivace $(cf)'(a)$ existuje, právě když existuje derivace $f'(a)$, a existují-li, pak*

$$(cf)'(a) = cf'(a) \ .$$

Co se změní pro $c = 0$?

Funkce $\mathrm{sgn}(x)\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ má derivaci $\mathrm{sgn}'(a) = 0$ pro $a \neq 0$ a

$$\mathrm{sgn}'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sgn}(x)}{x} = +\infty \ .$$

Signum má v nule svislou a jinde vodorovnou tečnu (viz definice tečny). Funkce $|x|$ má derivace $|x|' = (-x)' = -1$ pro $x < 0$, $|x|' = x' = 1$ pro $x > 0$ a derivace v 0 neexistuje, protože derivace zleva tam je -1 a zprava 1. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako $f(x) = x^{1/3}$ pro $x \geq 0$ a $f(x) = -(-x)^{1/3}$ pro $x \leq 0$ je spojitá a má v nule derivaci

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sgn}(x) \cdot |x|^{1/3}}{\mathrm{sgn}(x) \cdot |x|} = \lim_{x \to 0} |x|^{-2/3} = +\infty \ .$$

I tato funkce má v 0 svislou tečnu.

Derivace funkce by nebyla tak důležitá a užitečná, kdyby se dala počítat pouze z definice. Existuje ale jednoduchý kalkul pro výpočet derivace pomocí aritmetických operací a operací skládání funkcí a invertování funkce, který nyní uvedeme.

Tvrzení 5.1.18 (aritmetika derivací). *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, a je bilimitní bod M, $f, g\colon M \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a existují derivace $f'(a), g'(a) \in \mathbb{R}^*$ (i nevlastní). Pak platí následující vztahy.*

1. *Linearita: $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$, je-li pravá strana definovaná.*
2. *Leibnizův vzorec: když je f nebo g spojitá v a, pak*

   $$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \ ,$$

   je-li pravá strana definovaná.

3. Derivace podílu: když $g(a) \neq 0$ a g je spojitá v a, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}\ ,$$

je-li pravá strana definovaná.

Důkaz. 1. Ponecháváme jako úlohu 5.1.19.

2. Nechť je g spojitá v a, případ f spojité v a je symetrický (úloha 5.1.20). Podle předpokladů a tvrzení 4.1.17 se $(fg)'(a)$ rovná

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))g(x)+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}g(x) + f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
&= f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\ .
\end{aligned}$$

3. Z předpokladů o g plyne, že pro nějaké $\delta > 0$ nemá g v $U(a,\delta)$ nulový bod, takže a zůstává bilimitním bodem definičního oboru funkce $\frac{f}{g}$. Podle předpokladů a tvrzení 4.1.17 se $(f/g)'(a)$ rovná

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}\frac{g(a)}{g(x)g(a)} - \lim_{x\to a}\frac{f(a)}{g(x)g(a)}\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
&= \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}\ .
\end{aligned}$$

□

Úloha 5.1.19. *Dokažte první část předchozího tvrzení.*

Tato vlastnost operátoru derivování, jeho linearita, je důležitou a často používanou vlastností derivací.

Úloha 5.1.20. *Jak přesně fráze, že „případ spojité f je symetrický“ zjednodušuje důkaz druhé části?*

Je-li v části 2 $f'(a)$ nebo $g'(a)$ vlastní, je předpoklad o spojitosti splněn automaticky díky tvrzení 5.1.15. Když však jsou $f'(a)$ i $g'(a)$ nevlastní a f ani g není v a spojitá, nemusí Leibnizův vzorec platit a existují k němu slabé protipříklady. Totéž v části 3, obojí ponecháváme jako úlohu. *Slabým protipříkladem* k rovnosti

$$L = P$$

rozumíme situaci, kdy je pravá strana P definovaná, ale levá L nikoli. V *silném protipříkladu* jsou definované obě strany, ale mají různé hodnoty.

Úloha 5.1.21. *Ověřte následující slabé protipříklady.*

Tvrzení 5.1.22 (kdy vzorce neplatí). *Nechť $a = 0$ a funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou dány jako*

$$f(x) = -g(x) = \operatorname{sgn} x \ \ \text{pro} \ \ x \neq 0, \ f(0) = -\frac{1}{2} \ \ \text{a} \ \ g(0) = \frac{1}{2}\ .$$

Potom pravá strana Leibnizova vzorce je

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty\ ,$$

ale levá není definovaná. Změna $f(0) = g(0) = \frac{1}{2}$ dává slabý protipříklad ke vzorci pro derivaci podílu (pravá strana je $+\infty$, ale levá není definovaná).

Úloha 5.1.23. *Existují silné protipříklady k Leibnizově vzorci nebo ke vzorci pro derivaci podílu?*

Úloha 5.1.24. *Odvoďte vztah $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_0$, pomocí Leibnizova vzorce pro derivaci součinu.*

V následujícím vzorci pro derivaci složené funkce bereme pro jednoduchost obě funkce definované na okolí uvažovaných bodů.

Tvrzení 5.1.25 (derivace složené funkce). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$,*

$$g\colon U(a, \delta) \to \mathbb{R}, \ f\colon U(g(a), \delta) \to \mathbb{R}\ ,$$

existují derivace $g'(a), f'(g(a)) \in \mathbb{R}^*$ (i nevlastní) a funkce g je spojitá v bodě a. Pak

$$(f(g))'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)\ ,$$

je-li pravá strana definovaná.

Důkaz. Z předpokladů plyne, že $f(g)$ je definovaná na okolí bodu a. Nejprve vyřešíme případ, že na nějakém okolí bodu a je $g(x) = g(a)$. Pak $g'(a) = 0$, $f'(g(a))$ je vlastní (aby byla pravá strana vzorce definovaná, $(\pm\infty)\cdot 0$ je neurčitý výraz) a jistě

$$(f(g))'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = 0$$

jako limita funkce identicky nulové na prstencovém okolí bodu a. Vzorec tak platí, $0 = f'(g(a)) \cdot 0$.

Předpokládejme tedy, že libovolně blízko u a máme body x, pro něž $g(x) \neq g(a)$. Aritmetika limit (tvrzení 4.1.17) a vzorec pro limitu složené funkce (tvrzení 4.1.24 a úloha 4.1.26) pak pro $(f(g))'(a)$ dávají hodnotu

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{y \to g(a)} \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)} \cdot g'(a) \\
&= f'(g(a)) \cdot g'(a)\ .
\end{aligned}$$

Tento výpočet už neprobíhá na nějakém celém okolí bodu a, ale jen na jeho podmnožině vzniklé vyhozením řešení x rovnice $g(x) = g(a)$, protože na nich není předpředposlední zlomek definovaný. Díky předpokladu ale a zůstává limitním bodem této podmnožiny a můžeme tak, jak jsme to udělali, zkusit použít pro předpředposlední zlomek vzorec pro limitu složené funkce. Pokud $g(x) \neq g(a)$ na nějakém prstencovém okolí bodu a, je výpočet správný (víme, že $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$). Když tomu tak není, je $g(a_n) = g(a)$ na nějaké posloupnosti $(a_n) \subset P(a, \delta)$ jdoucí k a. Pak ale opět

$$g'(a) = 0 \ ,$$

protože předposlední zlomek se rovná nule pro každé $x = a_n$. Opět je tedy derivace $f'(g(a))$ nutně vlastní (jinak není pravá strana dokazovaného vzorce definovaná a není se o čem bavit). Vnější funkce

$$P(g(a), \delta) \ni y \mapsto \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)},\ g(a) \mapsto f'(g(a)) \ ,$$

pak je v bodě $g(a)$ spojitá a vzorec pro limitu složené funkce, v němž jsme tuto vnější funkci složili s $y = g(x)$, je i teď použit správně. $\square$

Po tvrzení 5.1.22 už můžeme slabý protipříklad ke vzorci pro derivaci složené funkce svěřit čtenáři.

Úloha 5.1.26. *Najděte takové funkce f a g, že po vynechání předpokladu o spojitosti g v bodě a tvrzení 5.1.25 přestane platit. Rádi bychom, aby $f(g)$ byla definovaná na okolí bodu a (když a není bilimitním bodem definičního oboru $f(g)$, pak $(f(g))'(a)$ neexistuje z definice, což jako protipříklad je moc snadné).*

Úloha 5.1.27. *Zformulujte a dokažte zobecnění tvrzení 5.1.25 pro situaci, kdy a, resp. $g(a)$, je pouze bilimitním bodem definičního oboru g, resp. f.*

Tvrzení 5.1.28 (derivace inverzní funkce). *Nechť*

$$a \in M \subset \mathbb{R},\ f\colon M \to \mathbb{R} \ \text{ je prostá funkce}\ ,$$

a je bilimitní bod množiny M, existuje derivace $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ (může být nevlastní), $b = f(a)$ je bilimitní bod množiny $f(M)$ a inverzní funkce

$$f^{-1}\colon f(M) \to \mathbb{R}$$

je v bodě b spojitá. Pokud $f'(a) \neq 0$, pak má f^{-1} v bodě b derivaci a

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \ .$$

Když $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající), pak $(f^{-1})'(b)$ je $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Důkaz. Pro $f'(a) \neq 0$ máme, podle definice derivace, podle rovnosti $f(a) = b$ a podle aritmetiky limit funkcí (tvrzení 4.1.17), rovnost

$$\frac{1}{f'(a)} = \lim_{x \to a} \frac{x - f^{-1}(b)}{f(x) - b} \ .$$

Do funkce dané posledním zlomkem dosadíme prostou funkci $x = f^{-1}(y)$ a použijeme vzorec pro limitu složené funkce (tvrzení 4.1.24 se splněnou druhou podmínkou, vnitřní funkce je totiž prostá). Protože $\lim_{y \to b} f^{-1}(y) = a$ díky spojitosti f^{-1} v b, dostaneme

$$\frac{1}{f'(a)} = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y)) - b} = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = (f^{-1})'(b) \ .$$

Když $f'(a) = 0$ a f roste, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že

$$x \in (a - \delta,\, a) \cap M \Rightarrow \frac{f(x) - b}{x - f^{-1}(b)} \in (0,\, \varepsilon)$$

i (čitatel i jmenovatel změní znaménko)

$$x \in (a,\, a + \delta) \cap M \Rightarrow \frac{f(x) - b}{x - f^{-1}(b)} \in (0,\, \varepsilon) \ .$$

Argument tak stále funguje, pouze výchozí $\frac{1}{f'(a)}$ nahradíme $+\infty$. Podobně při klesající f se $(0, \varepsilon)$ nahradí $(-\varepsilon, 0)$ a $\frac{1}{f'(a)}$ nahradíme $-\infty$. □

Úloha 5.1.29. *Prověřte, že dva následující důsledky vyplývají z předchozího tvrzení a tvrzení 4.2.31.*

Důsledek 5.1.30 (derivace inverzu na intervalu). *Nechť a je vnitřní bod intervalu $I \subset \mathbb{R}$,*

$$f\colon I \to \mathbb{R} \ \ \text{je prostá spojitá funkce}$$

a existuje derivace $f'(a) \in \mathbb{R}^*$. Potom je f monotónní a její inverz má v bodě $b = f(a)$ derivaci

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \ ,$$

kde $\frac{1}{0}$ znamená $-\infty$ či $+\infty$, podle klesající či rostoucí f.

Důsledek 5.1.31 (derivace inverzu na uzavřené množině). *Nechť a je bilimitní bod uzavřené množiny $M \subset \mathbb{R}$,*

$$f\colon M \to \mathbb{R} \ \ \text{je prostá monotónní spojitá funkce}$$

a existuje derivace $f'(a) \in \mathbb{R}^*$. Pak má inverz k f v bodě $b = f(a)$ derivaci

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \ ,$$

kde $\frac{1}{0}$ znamená $-\infty$ či $+\infty$, podle klesající či rostoucí f.

Úloha 5.1.32. *Mějme funkci f, jež má inverz $g = f^{-1}$, tedy $x = f(g(x))$. Podle vzorce pro derivaci složené funkce je*

$$1 = (f(g))' = f'(g) \cdot g' \ \text{ a tedy } \ \frac{1}{f'(g)} = g' = \left(f^{-1}\right)' \ .$$

Vzorec pro derivaci inverzní funkce tak je speciálním případem či důsledkem vzorce pro derivaci složené funkce. Opravdu?

V definici 5.1.4 jsme zavedli derivaci jako operátor na funkcích, který z dané funkce vyrobí novou funkci. Můžeme ho použít opakovaně, čímž vzniknou derivace vyšších řádů.

Definice 5.1.33 (derivace vyšších řádů). *Buď dána neprázdná množina*

$$M \subset \mathbb{R} \ \text{ a na ní definovaná funkce } f\colon M \to \mathbb{R} \ .$$

Pro $n \in \mathbb{N}_0$ definujeme postupně indukcí dvě stejně dlouhé konečné či nekonečné posloupnosti množin a funkcí

$$M^{(0)} \supset M^{(1)} \supset M^{(2)} \supset \cdots \supset M^{(n)} \supset \ldots \ \text{ a } \ f^{(n)}\colon M^{(n)} \to \mathbb{R}$$

tak, že $M^{(0)} = M$, $f^{(0)} = f$ a jsou-li $M^{(n)}$ a $f^{(n)}$ již definované, skládá se $M^{(n+1)}$ právě z těch bilimitních bodů množiny $M^{(n)}$, v nichž existuje vlastní derivace $(f^{(n)})'$, a

$$M^{(n+1)} \ni a \mapsto f^{(n+1)}(a) := (f^{(n)})'(a) \ .$$

Posloupnosti končí poslední neprázdnou množinou $M^{(n)}$. Řekneme, že $f^{(n)}$ je derivace funkce f n-tého řádu. Pro $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}, \ldots$ používáme také značení $f', f'', f''', f^{iv}, \ldots$ a $\frac{d^n f}{dx^n}$ místo $f^{(n)}$.

Třeba pro

$$f(x) = |x|\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$

máme $M^{(0)} = \mathbb{R}$, $M^{(1)} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(x) = \operatorname{sgn} x$ a $M^{(n)} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f^{(n)}(x) = 0$ (konstantní nula) pro každé $n \geq 2$. Jiný příklad: pro

$$f(x) = x^k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{N}_0 \ ,$$

máme $M^{(n)} = \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$,

$$f^{(n)}(x) = k(k-1)\ldots(k-n+1)x^{k-n} \ \text{ pro } \ n \leq k$$

(prázdný součin s $n = 0$ je 1) a $f^{(n)}(x) = 0$ (konstantní nula) pro každé $n > k$. Jak může vypadat funkce s posloupností derivací vyšších řádů končící po konečně mnoha krocích?

Úloha 5.1.34. *Dokažte, že pro funkci*

$$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \ f(0) = 0 \ \text{ a } \ f(p/q) = \frac{p^2}{q^3} \ \text{ pro } \ p/q \neq 0$$

(čísla p a q jsou nesoudělná), je $M^{(1)} = \{0\}$ a tedy triviálně $M^{(2)} = \emptyset$.

V definici 5.1.33 tedy nepovolujeme nevlastní hodnoty derivací. Pro některá použití derivací, zejména ve větách o střední hodnotě, je tato definice příliš benevolentní. Pro existenci vlastní $f^{(n)}(a)$ podle ní stačí, aby byla předchozí derivace $f^{(n-1)}$ definovaná jen na nějaké množině obsahující a jako svůj bilimitní bod. Věty o střední hodnotě však potřebují definovanost $f^{(n-1)}$ na celém intervalu. Proto se v nich přikloníme ke klasickému pojetí derivací vyšších řádů, kdy existence vlastní $f^{(n)}(a)$ znamená definovanost $f^{(n-1)}$ na okolí bodu a.

Definice 5.1.35 (derivace vyšších řádů klasicky). *Pro $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ a funkci*

$$f\colon U(a,\, \delta) \to \mathbb{R}$$

definujeme $f^{(0)} = f$ a pro $n > 0$ rekurzivně

$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a), \quad \textit{pokud funkce} \quad f^{(n-1)}\colon U(a,\, \delta') \to \mathbb{R}$$

pro nějaké $\delta' \in (0, \delta]$ a má v čísle a vlastní derivaci.

Závěrem oddílu uvedeme přehled derivací některých funkcí. Mnoho jich lze spočítat derivováním mocninných řad, viz úloha 4.2.2.

Tvrzení 5.1.36 (derivace mocninné řady). *Nechť $r > 0$ a řada*

$$\sum a_n r^n$$

absolutně konverguje. Pak pro každé $x \in (-r, r)$ řady

$$\sum a_n x^n \quad a \quad \sum n a_n x^{n-1}$$

absolutně konvergují a, pro libovolné $a_0 \in \mathbb{R}$, funkce

$$f\colon (-r, r) \to \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + \sum a_n x^n\ ,$$

má na celém intervalu $(-r, r)$ vlastní derivaci $f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$.

Důkaz. Tvrzení o absolutní konvergenci vyplývá z části 1 tvrzení 3.1.25. Derivaci nejprve spočteme v $x = 0$. Pro nenulové $h \in (-r, r)$ podle tvrzení 3.1.22 pro $h \to 0$ máme

$$\frac{a_0 + \sum a_n h^n - a_0}{h} = \sum a_n h^{n-1} = a_1 + h \sum_{n \ge 2} a_n h^{n-2} \to a_1\ ,$$

což je skutečně součet řady $\sum n a_n x^{n-1}$ v $x = 0$. Nechť nyní $0 < x < r$, případ $-r < x < 0$ je podobný. Pro $h \in \mathbb{R}$, $h \ne 0$, a $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, si připravíme jeden odhad. Podle binomické věty a identity

$$\binom{n}{i+2} = \frac{(n-i)(n-i-1)}{(i+2)(i+1)} \binom{n}{i}$$

máme

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{|h|^{i-1}}{x^i}\binom{n}{i} = \frac{|h|}{x^2}\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{|h|}{x}\right)^i\binom{n}{i+2} \le \frac{|h|n^2(1+|h|/x)^n}{x^2}\ .$$

Pro $h \in P(0, \frac{r-x}{2})$ pak podle tvrzení 3.1.22, binomické věty a našeho odhadu máme nerovnost

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}\left(a_0 + \sum a_n(x+h)^n - a_0 - \sum a_n x^n\right) - \sum n a_n x^{n-1}\right| \\
&\le \sum_{n\ge 2} |a_n| x^n \left(\frac{|h|}{x^2}\binom{n}{2} + \frac{|h|^2}{x^3}\binom{n}{3} + \cdots + \frac{|h|^{n-1}}{x^n}\binom{n}{n}\right) \\
&\le \frac{|h|}{x^2}\sum_{n\ge 2} n^2|a_n|(x+|h|)^n \le \frac{|h|}{x^2}\sum_{n\ge 2} n^2|a_n|\left(\frac{r+x}{2}\right)^n \\
&= \frac{S|h|}{x^2}\ ,
\end{aligned}$$

kde $S < +\infty$ je součet poslední řady, jež konverguje podle části 1 tvrzení 3.1.25. Pro $h \to 0$ tedy výchozí absolutní hodnota jde k 0 a derivace funkce $a_0 + \sum a_n x^n$ v x je $\sum n a_n x^{n-1}$. □

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$, ba i každé $n \in \mathbb{N}_0$, je $(a_n x^n)' = n a_n x^{n-1}$, říká se, že derivace mocninné řady vznikne jejím zderivováním člen po členu. Existuje mocninná řada $a_0 + \sum a_n x^n$, kterou derivace nezmění? Ano, je to přesně ta, jež pro každé $n \in \mathbb{N}$ splňuje

$$n a_n x^{n-1} = a_{n-1}x^{n-1},\ \ \text{tedy}\ \ a_n = \frac{a_{n-1}}{n}\ \ \text{a celkem}\ \ a_n = \frac{a_0}{n!}$$

(zde jsme se ovšem opřeli o větu 3.6.15, že rovnost funkcí určených mocninnými řadami je totéž jako rovnost jejich koeficientů). Derivováním se tedy nemění právě a jenom mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0 x^n}{n!} = a_0 e^x$$

(konvergující absolutně na celém $\mathbb{R}$), kde $a_0 \in \mathbb{R}$ je libovolné.

Znovu jsme tak odvodili, že $(e^x)' = e^x$. Nalezneme nyní derivace funkcí $\sin x$ a $\cos x$. Zderivováním mocninných řad z věty 3.4.23 člen po členu dostáváme

$$(\sin x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

a

$$(\cos x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sin x\ .$$

Tedy, shrnuto, $(\sin x)' = \cos x$ a $(\cos x)' = -\sin x$, na celém $\mathbb{R}$. Derivace vyšších řádů se tak opakují s periodou čtyři:

$$\left((\sin x)^{(n)}\right)_{n\ge 0} = (\sin x,\ \cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ \sin x,\ \cos x,\ \dots)$$

a

$$\left((\cos x)^{(n)}\right)_{n\ge 0} = (\cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ \sin x,\ \cos x,\ -\sin x,\ \dots)\ .$$

Tak snadno to ale se sinem a kosinem nevyřídíme. Kdybychom teď odvození jejich derivací ukončili, ukázkově bychom spáchali zločin důkazu kruhem (bohužel, v některých zavedeních sinu a kosinu v literatuře se kruhová argumentace vyskytuje). Větu 3.4.23 jsme totiž ještě nedokázali. K jejímu důkazu se sice už blížíme, bude ale založen na Taylorově rozvoji funkce, který ovšem předpokládá znalost derivací vyšších řádů rozvíjené funkce. V definici 3.4.20 jsme obě funkce zavedli geometricky a jen z této geometrické definice musíme odvodit jejich derivace.

Tvrzení 5.1.37 ($\sin'$ a $\cos'$ z geometrie). *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je*

$$(\sin x)' = \cos x \ \text{ a } \ (\cos x)' = -\sin x\ .$$

Důkaz. Dokážeme druhý vzorec a první necháme čtenářce jako úlohu 5.1.39. Nechť

$$A = (a,\, b) \in C \ \text{ a } \ B = (c,\, d) \in C,\ a,\, b,\, c,\, d \ge 0\ ,$$

jsou dva různé body jednotkové kružnice C v prvním kvadrantu a $h, i \ge 0$ jsou délky oblouků spojujících bod $(1,0)$ v kladném směru s body A, B. Nechť $a < c$, tedy $b > d$ a $h > i$, a uvažme dva trojúhelníky $T = ABD$ s $D = (a,d)$ a $U = AEF$ s $E = (0,0)$ a $F = (0,b)$. U vrcholů D a F mají pravé úhly. Bod A necháme pevný a bod B k němu posouváme. Pak se úsečky AB a AE stávají téměř kolmými a trojúhelníky T a U se stávají téměř podobnými: U vznikne otočením T kolem A po směru hodinek o úhel $\frac{\pi}{2}$ a zvětšením. Délka úsečky AB je také skoro $h - i$. Tedy

$$(\cos)'(h) = \lim_{B\to A}\frac{a-c}{h-i} = \lim_{B\to A}\frac{-|DB|}{|AB|} = \frac{-|FE|}{|AE|} = -\frac{b}{1} = -\sin h\ .$$

Musíme ale zdůvodnit druhou a třetí rovnost, ostatní jsou triviální. Jednak potřebujeme, aby pro $B \to A$ platilo $\frac{h-i}{|AB|} \to 1$. Ale zřejmě $h - i > |AB|$ a úloha 3.4.15 dává (G je střed úsečky AB)

$$h - i < |AB| + 2(1 - |EG|) = |AB| + 2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{|AB|^2}{4}}\right) < |AB| + \frac{|AB|^2}{2}\ ,$$

což dokazuje limitu 1. Dále potřebujeme, aby se pro $B \to A$ úhel mezi úsečkami AB a AE lišil od $\frac{\pi}{2}$ o veličinu jdoucí k 0, čímž poměr obou poměrů délek pro odpovídající dvojice stran trojúhelníků T a U půjde k 1. Ale to je jasné, protože úhel u vrcholu E v rovnoramenném trojúhelníku AEB jde k 0. Tím jsou obě rovnosti dokázané. Předpokládali jsme ale, že $a < c$, a spočtené limity tak jsou jednostranné. Ale jednoduše se ověří, že pro $a > c$ a $b < d$ dostaneme totéž a výsledek tak platí jako normální limita. Pro $0 \le h \le \frac{\pi}{2}$ jsme tedy dokázali vzorec $(\cos)'(h) = -\sin h$, ale v krajních bodech $h = 0$ a $h = \frac{\pi}{2}$ ho stále máme jen jako jednostrannou derivaci. Podle tvrzení 3.4.22 jsou ale kosinus a sinus 2π-periodické funkce a pro každé $h \in \mathbb{R}$ platí vztahy $\cos(-h) = \cos h$, $\sin(-h) = -\sin h$, $\cos(\pi - h) = -\cos h$ a $\sin(\pi - h) = \sin h$. To vzorec pro derivaci kosinu rozšiřuje na všechna $h \in \mathbb{R}$ (úloha 5.1.38). □

Úloha 5.1.38. *Jak uvedené vztahy rozšiřují platnost vzorce pro derivaci kosinu z* $[0, \frac{\pi}{2}]$*, či vlastně* $(0, \frac{\pi}{2})$*, na celé* $\mathbb{R}$*?*

Úloha 5.1.39. *Dokažte, že* $(\sin x)' = \cos x$.

Připomeňte si funkce $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ a $\arctan x$ v definici 3.4.21. Nyní zrekapitulujeme a doodvodíme derivace základních elementárních funkcí.

Tvrzení 5.1.40 (přehled derivací). *Máme následující derivace.*

1. *Na* $\mathbb{R}$ *je* $(e^x)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ *a, pro* $n \in \mathbb{N}_0$, $(x^n)' = nx^{n-1}$. *Speciálně je derivace konstanty všude nulová.*
2. *Vzorec* $(x^n)' = nx^{n-1}$ *platí pro záporné* $n \in \mathbb{Z}$ *na* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *a pro neceločíselné* $n \in \mathbb{R}$ *na* $(0, +\infty)$.
3. *Na* $(0, +\infty)$ *je* $(\log x)' = \frac{1}{x}$ *a na* $\mathbb{R}\backslash\{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *je* $(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$.
4. *Na* $(-1, 1)$ *je* $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *a* $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Důkaz. 3. Vzorec pro derivaci logaritmu plyne z $(e^x)' = e^x$ a důsledku 5.1.30:

$$(\log x)' = \frac{1}{(e^x)' \circ \log x} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}\ .$$

Derivace tangensu plyne z derivací sinu a kosinu, vzorce pro derivaci podílu (část 3 tvrzení 5.1.18) a identity $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\ .$$

1. Derivace funkcí e^x, $\sin x$, $\cos x$ a x^n s $n \in \mathbb{N}_0$ jsme odvodili již dříve. Derivace arkus tangensu plyne z derivace tangensu, důsledku 5.1.30 a identity $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$ (což je vlastně identita $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$): $(\arctan x)'$ se rovná

$$\frac{1}{(\tan x)' \circ \arctan x} = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}\ .$$

2. Vzorec pro derivaci mocniny x^n se záporným exponentem $n \in \mathbb{Z}$ plyne z případu nezáporného celého exponentu a ze vzorce pro derivaci podílu:

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{0x^{-n} - 1(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1} \; .$$

Pro $n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ použijeme vyjádření $x^n = e^{n \log x}$, které zderivujeme pomocí vzorců pro derivaci exponenciály, složené funkce (tvrzení 5.1.25) a logaritmu:

$$\left(e^{n \log x}\right)' = e^{n \log x} \cdot (n \log x)' = x^n \cdot n/x = nx^{n-1} \; .$$

4. Derivace arkus sinu a arkus kosinu plynou z derivací sinu a kosinu, důsledku 5.1.30 a opět identity $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (v podobách $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ a $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$): $(\arcsin x)'$ se rovná

$$\frac{1}{(\sin x)' \circ \arcsin x} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

a $(\arccos x)'$ se rovná

$$\frac{1}{(\cos x)' \circ \arccos x} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \; .$$

$\square$

Funkce $f = e^x$ je tedy pevným bodem čili jednocyklem operátoru derivování, $f' = f$. Jak jsme už uvedli, funkce $f = \sin x$ je členem čtyřcyklu $f', f'', f''', f^{(4)} = f$ obsahujícího čtyři různé funkce $\pm \sin x$, $\pm \cos x$.

Úloha 5.1.41. *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ uveďte příklad funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má na $\mathbb{R}$ k-tou derivaci, $|\{f, f', f'', \dots, f^{(k-1)}\}| = k$ a $f^{(k)} = f$.*

Úloha 5.1.42. *Zderivujte funkce: x^x, 3^x, $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$.*

Úloha 5.1.43. *Množina*

$$\mathcal{F} = \{f(x) = cx^a \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R} \mid a,\, c \in \mathbb{R}\}$$

konstantních násobků mocnin se derivováním zobrazuje do sebe, když $f \in \mathcal{F}$, tak i $f' \in \mathcal{F}$. Rozhodněte, zda je toto zobrazení prosté a zda je na.

Je zajímavé, že derivace transcendentních funkcí $\log x$, $\arctan x$, $\arcsin x$ a $\arccos x$ vycházejí jako algebraické funkce, po řadě $1/x$, $1/(1 + x^2)$, $1/\sqrt{1 - x^2}$ a $-1/\sqrt{1 - x^2}$. Funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde množina $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná, je *algebraická na M*, když existuje nenulový reálný polynom $P(x, y)$ o dvou proměnných, že pro každé $c \in M$ je $P(c, f(c)) = 0$. Neexistuje-li takový polynom P, je funkce f *transcendentní na M*. Že poslední čtyři funkce jsou algebraické na svých definičních oborech je jasné, třeba pro funkci $1/\sqrt{1-x^2}$ stačí vzít polynom

$$P(x,y) = (1-x^2)y^2 - 1 \ ,$$

ale proč jsou předchozí čtyři funkce transcendentní? Dá se to dokázat třeba právě pomocí derivací a předvedeme to pro exponenciálu a logaritmus. Pomůže nám následující úloha.

Úloha 5.1.44. *Dokažte, že když je bijekce $f\colon M \to N$ algebraická na M, potom její inverz $f^{-1}\colon N \to M$ je algebraický na N.*

Věta 5.1.45 (transcendence exponenciály a logaritmu). *Funkce*

$$e^x = \exp(x)\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty) \quad a \quad \log x\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

jsou transcendentní na každém otevřeném intervalu: když $P(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ je reálný polynom s dvěma proměnnými, $0 < b < c$ jsou reálná čísla a pro každé $a \in (b,c)$ je

$$P(a, \log a) = 0 \ ,$$

pak je P nulový polynom (má všechny koeficienty nulové). Totéž platí pro funkci e^x a každá dvě čísla $b < c$.

Důkaz. Podle úlohy 5.1.44 je transcendence funkcí $\log x$ a e^x ekvivalentní. Dokážeme transcendenci funkce e^x, která se snáze derivuje, na libovolném otevřeném intervalu (b,c). Nejprve ale dokážeme, že pro každou nenulovou racionální funkci $\frac{q(x)}{p(x)}$ a každou nenulovou konstantu $\alpha \in \mathbb{R}$ je $(q/p)' \neq \alpha q/p$. Kdyby totiž platila rovnost $(q/p)' = \alpha q/p$, podle vzorce pro derivaci podílu máme

$$q'p - qp' = \alpha qp \ ,$$

což je kvůli stupňům polynomů nemožné, levá strana má vždy menší stupeň než pravá.

Nechť je pro spor $P(x,y)$ nenulový reálný polynom s nejmenším y-ovým stupněm $k \in \mathbb{N}_0$, že na intervalu (b,c) platí rovnost $P(a, e^a) = 0$. Přepíšeme ji jako

$$(e^a)^k + (e^a)^{k-1} r_1(a) + (e^a)^{k-2} r_2(a) + \cdots + r_k(a) = 0$$

s nějakými racionálními funkcemi $r_i(x)$. Jistě $k \geq 1$ a protože $e^a \neq 0$ pro každé a, některá racionální funkce $r_j(x)$ je nenulová. Zderivováním podle a a odečtením zderivované rovnice od k násobku původní rovnice obdržíme vztah

$$(e^a)^{k-1}(r_1(a) - r_1'(a)) + (e^a)^{k-2}(2r_2(a) - r_2'(a)) + \cdots + (kr_k(a) - r_k'(a)) = 0 \ ,$$

platný opět pro každé $a \in (b,c)$. Podle úvodu důkazu je ale $jr_j(x) - r_j'(x) \neq 0$, takže (když odstraníme jmenovatele racionálních funkcí v závorkách vynásobením vhodným polynomem) dostáváme nenulový polynom $Q(x,y)$ s y-ovým stupněm nanejvýš $k-1$, že opět $Q(a, e^a) = 0$ pro každé $a \in (b,c)$. To je ale spor s minimalitou k. □

Úloha 5.1.46. *Podejte přímý důkaz transcendence funkce e^x či $\log x$ na $\mathbb{R}$ či na $(0, +\infty)$ bez použití derivací, pomocí růstu u $+\infty$.*

5.2 Lebesgueova věta o sečnách a tečnách

Lebesgueova věta o sečnách a tečnách. Pasáž v klasické landauovské matematické němčině. Důkaz Lebesgueovy věty a pár úloh na závěr.

Sečna grafu funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je každá přímka v rovině $\mathbb{R}^2$ procházející nějakými dvěma různými body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ na grafu f (tedy $a, b \in M$ a $a \neq b$). Její sklon je podíl $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Dokážeme následující větu.

Věta 5.2.1 (H. Lebesgue, 1904). *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$ s $a < b$ a hodnoty funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ pro každé dva různé argumenty $x, y \in [a, b]$ splňují nerovnost*

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leq c\,.$$

Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje taková posloupnost intervalů (I_n), $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$, že

$$\{x \in [a,\, b] \mid \textit{neexistuje vlastní derivace } f'(x)\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \textit{a} \quad \sum |b_n - a_n| < \varepsilon\,.$$

Jinými slovy: mají-li všechny sečny grafu funkce f omezený sklon, pak má f skoro všude tečnu. Obrat „skoro všude“ znamená, že doplněk uvažované množiny — množina čísel $x \in [a, b]$, kde $f'(x) \in \mathbb{R}$ neexistuje — se dá pokrýt posloupností intervalů s libovolně malou celkovou délkou. Takovým podmnožinám $\mathbb{R}$ se říká *množiny míry nula.* Takže: mají-li všechny sečny omezený sklon, pak množina čísel $x \in [a, b]$, kde f nemá tečnu, má míru 0.

Úloha 5.2.2. *Ukažte, že jiná definice množin míry nula, v níž se povolí i konečné posloupnosti pokrývajících intervalů, je ekvivalentní původní definici.*

Úloha 5.2.3. *Proč je předešlá parafráze věty opravdu její parafrází, je s ní ekvivalentní?*

Úloha 5.2.4. *Ukažte, že bez újmy na obecnosti lze ve větě vzít $a = 0$, $b = 1$ a $c = 1$.*

Věta i s důkazem je převzata z [90, str. 35–39], klasické knihy E. Landaua a D. Gaiera. Uveďme pro zajímavost úryvek originálu.

. . . .

— 35 —

§ 5.

Satz von Fatou.

Satz (von Lebesgue).

Voraussetzung: *Es sei* $f(x)$ *für* $0 \leqq x \leqq 1$ *reel,*

$$\left.\begin{array}{c} \Delta(x, x') = \dfrac{f(x) - f(x')}{x - x'} \\[2ex] |\Delta(x, x')| \leqq 1 \end{array}\right\} \textit{für } 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq x' \leqq 1,\ x \neq x'.$$

Behauptung: $f(x)$ *ist für* $0 < x < 1$ *bis auf eine Nullmenge differentiierbaar.*

Vorbemerkung: Für $p > 0$, $\alpha < \beta$ lehrt die triviale Transformation

$$f(x) = \frac{p}{\beta - \alpha} F(\alpha + (\beta - \alpha)x)$$

den entsprechenden Wortlaut für das Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ bei der Annahme $\Delta \leqq p$.

Beweis: 1. Es sei $0 < \varepsilon < 2$. Man wähle l und die (...)

....

Nyní větu 5.2.1 dokážeme.

Důkaz. (G. Faber, 1910; E. Landau, 1929; autorův překlad a úpravy, 2018.) Nechť je tedy (podle úlohy 5.2.4) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ funkce splňující $|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}| \le 1$, jakmile $x, y \in [0,1]$ a $x \ne y$. Taková funkce je pochopitelně spojitá (je dokonce lipschitzovská, viz úlohu 4.2.3). Ve shodě s E. Landauem si pro různá čísla $x, x' \in [0,1]$ označíme

$$\Delta(x,\, x') = \frac{f(x) - f(x)'}{x - x'}$$

a vezmeme $\varepsilon \in (0,2)$. Intervalem budeme v důkazu rozumět interval s kladnou délkou. Pro $(k+1)$-tici čísel $\overline{x} = (0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = 1)$ jako $d(\overline{x})$ označíme délku lomené čáry spojující po řadě $k+1$ bodů

$$(0,\, f(0)),\ (x_1,\, f(x_1)),\ \ldots,\ (1,\, f(1))$$

ležících na grafu funkce f a vezmeme supremum těchto délek

$$s = \sup(\{d(\overline{x}) \mid x_i \in [0,\, 1],\ 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = 1,\ k \in \mathbb{N}\})\ .$$

Díky výchozí vlastnosti funkce f je $d(\overline{x}) \le 2$ pro každé $\overline{x}$ (úloha 5.2.5), takže i $s \le 2$. Zvolíme pevně nějakou $(l+1)$-tici

$$\overline{x} = (0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_l = 1)\ ,$$

že

$$d(\overline{x}) \ge s - \varepsilon^4\ .$$

Vezmeme libovolný podinterval $I = I_j = [x_j, x_{j+1}]$, $0 \le j \le l-1$, a díky spojitosti funkce $\Delta(x, x')$ v každé proměnné x a x' (předbíháme teď poněkud do Matematické analýzy II) vidíme, že buď neexistují dvě různá čísla $x, x' \in I$ s

$$\varphi(x,\, x') := |\Delta(x,\, x') - \Delta(x_j,\, x_{j+1})| \ge \varepsilon$$

nebo taková dvojice x, x' existuje a lze o ní navíc předpokládat, že ze všech těchto dvojic má maximální vzdálenost $|x - x'|$ (úloha 5.2.6).

Pro interval I provedeme následující kostrukci, která buď ani nezačne (když ona čísla x, x' neexistují) nebo skončí po konečně mnoha krocích nebo pokračuje bez konce. Pro podinterval $J \subset I$ jako (J) označíme jeho vnitřek a jako $|J|$ jeho délku. Buďte tedy

$$\xi_1,\, \xi_1' \in I = I_j = [x_j,\, x_{j+1}]$$

dvě různá čísla s $\varphi(\xi_1, \xi_1') \ge \varepsilon$ a s maximální hodnotou $|\xi_1 - \xi_1'|$. Jako K_1 označíme interval s konci ξ_1 a ξ_1'. Množina $I \backslash (K_1)$ se kromě případných izolovaných bodů skládá z nejvýše dvou uzavřených intervalů. S každým naložíme stejně jako s intervalem I a nalezneme v jednom z nich dva různé body ξ_2, ξ_2' splňující $\varphi(\xi_2, \xi_2') \ge \varepsilon$ (funkce φ je definovaná výše) a $|x - x'| \le |\xi_2 - \xi_2'|$ pro každé dva různé body x, x' s $\varphi(x, x') \ge \varepsilon$ a vybrané (oba) z libovolného z těch nejvýše dvou intervalů. Jako K_2 označíme interval s konci ξ_2 a ξ_2' a pokračujeme dále stejně. V obecném kroku máme máme uzavřené intervaly $K_1, K_2, \ldots, K_{m-1} \subset I$ s disjunktními vnitřky a uvážíme množinu

$$M = I \backslash ((K_1) \cup (K_2) \cup \cdots \cup (K_{m-1}))\ .$$

Ta se, odhlédneme-li od izolovaných bodů, skládá z nejvýše m uzavřených intervalů. V každém z nich nalezneme, je-li to možné, dvojice různých bodů s $\varphi \ge \varepsilon$ a mezi nimi ty s maximální vzájemnou vzdáleností. Vezmeme pak dvojici bodů, jež má tuto maximální vzdálenost největší, označíme ji jako body ξ_m a ξ_m' a uzavřený interval mezi nimi jako K_m. Pokud konstrukce nikdy neskončí, je zřejmé (K_m mají disjunktní vnitřky), že

$$\sum_{m=1}^{\infty} |K_m| < +\infty \ \text{ a } \ |K_m| \to 0\ .$$

Každopádně (Jedenfalls, jeder = každý, der Fall = pád — češtinu, jak známo, obrozenci stvořili překladem němčiny) mají intervaly K_m následující dvě vlastnosti (Eigenschaften, eigen = vlastní, atd.).

1) Když $x, x' \in I$ s $x \ne x'$ a pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ máme $x \notin K_1 \cup \cdots \cup K_m$, $x' \notin (K_1) \cup \cdots \cup (K_m)$ a interval s konci x a x' obsahuje některý z intervalů $K_1, \ldots, K_m$, pak

$$\varphi(x,\, x') < \varepsilon\ .$$

Platila-li by totiž opačná nerovnost, zvolili jsme obsažený interval během konstrukce špatně jako moc krátký.

2) Když $x, x' \in I$ s $x \ne x'$, $x \notin K_1 \cup K_2 \cup \ldots$ a $x' \notin (K_1) \cup (K_2) \cup \ldots$, pak rovněž

$$\varphi(x,\, x') < \varepsilon\ .$$

Když totiž interval s konci x a x' obsahuje některý interval K_m, plyne to z 1). Jinak pro každé $m \in \mathbb{N}$ leží oba body x a x' v některém z nejvýše m uzavřených intervalů množiny M. Když konstrukce skončila po konečně mnoha krocích s intervaly $K_1, \ldots, K_m$, vyplývá z jejího ukončení uvedená ostrá nerovnost. Když konstrukce nikdy neskončila a kdyby platila opačná nerovnost, index m s $|K_m| < |x - x'|$ dává spor, interval K_m jsme zkonstruovali špatně.

Pro každé $j = 0, 1, \ldots, l-1$ tak máme prázdnou nebo konečnou nebo konvergentní řadu

$$\sum_m \left|K_m^{(j)}\right| .$$

Tvrdíme, že

$$\sum_{j=0}^{l-1} \sum_m \left|K_m^{(j)}\right| \le 8\varepsilon^2 .$$

Vyplyne to z nerovnosti pro konečné sumy

$$E := \sum_{j=0}^{l-1} \sum_m{}' \left|K_m^{(j)}\right| \le 8\varepsilon^2 ,$$

kde čárka označuje libovolný částečný součet celé řady.

Abychom ji dokázali, označíme si pro libovolné ale pevné j body dělení intervalu I určeného konečně mnoha intervaly součtu $\sum_m' \left|K_m^{(j)}\right|$ jako

$$x_j = u_0 < u_1 < \cdots < u_h = x_{j+1}$$

a položíme $P_j = (x_j, f(x_j))$. Pro $i = 0, 1, \ldots, h$ dále označíme

$$v_i = f(u_i),\ Q_i = (u_i, v_i),\ t_i = \Delta(u_i, u_{i+1})\ (i < h) \ \text{ a } \ t = \Delta(x_j, x_{j+1}) .$$

Patrně $|t_i| \le 1$, $|t| \le 1$ a pro ta i, že $[u_i, u_{i+1}]$ je jeden ze zvolených $K_m^{(j)}$, je $|t_i - t| \ge \varepsilon$. Pro délky úseček P_jP_{j+1} s konci na grafu funkce f pak máme následovné rovnosti a nerovnosti.

$$\begin{aligned}
|P_jP_{j+1}| &= |Q_0Q_h| = \sum_{i=0}^{h-1} \frac{u_{i+1} - u_i + t(v_{i+1} - v_i)}{\sqrt{1+t^2}} \\
&= \sum_{i=0}^{h-1} |Q_iQ_{i+1}| \frac{1 + tt_i}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+t_i^2}} \quad \text{(úloha 5.2.7)} \\
&\le \sum_{i=0}^{h-1} |Q_iQ_{i+1}| \left(\frac{1}{2} + \frac{(1+tt_i)^2}{2(1+t^2)(1+t_i^2)}\right) \quad \text{(úloha 5.2.8)} \\
&= \sum_{i=0}^{h-1} |Q_iQ_{i+1}| \left(1 - \frac{(t-t_i)^2}{2(1+t^2)(1+t_i^2)}\right) .
\end{aligned}$$

A poslední suma je nejvýše

$$\sum_{i=0}^{h-1} |Q_iQ_{i+1}| - \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{h-1} (u_{i+1} - u_i)(t_i - t)^2 \le \sum_{i=0}^{h-1} |Q_iQ_{i+1}| - \frac{\varepsilon^2}{8} \sum_m{}' |K_m^{(j)}|$$

— díky hořejším odhadům velikostí čísel t_i, t a $t-t_i$ a díky nerovnosti $|Q_iQ_{i+1}| \geq u_{i+1} - u_i$. Tento horní odhad pro $|P_jP_{j+1}|$ máme pro každé $j = 0, 1, \ldots, l-1$, takže po sečtení je délka $d(L)$ lomené čáry L proložené body Q_i z grafu funkce f v pořadí $j = 0, 1, \ldots, l-1$ a, pro pevné j, $i = 0, 1, \ldots, h$ (h i Q_i přesně vzato závisí na j, ale pro jednoduchost značení je tato závislost potlačena) odhadnuta zdola jako

$$d(L) \geq d(\overline{x}) + \frac{\varepsilon^2}{8} E\ .$$

To vzhledem k $s - \varepsilon^4 \leq d(\overline{x})$ a $d(L) \leq s$ dává kýžený odhad $E \leq 8\varepsilon^2$.

Nyní každý interval $K_m^{(j)}$ zvětšíme se zachováním jeho středu na $\frac{2}{\varepsilon}$-krát delší interval $L_m^{(j)}$. Pak

$$\sum_{j=0}^{l-1} \sum_m \left| L_m^{(j)} \right| \leq 8\varepsilon^2 \cdot \frac{2}{\varepsilon} = 16\varepsilon\ .$$

Body $x_0, x_1, \ldots, x_l$ pokryjeme nějakými uzavřenými intervaly celkové délky ε. Dohromady s intervaly $L_m^{(j)}$ mají všechny tyto intervaly celkovou délku nejvýše 17ε.

Nechť $x \in [0, 1]$ leží mimo všechny tyto intervaly, $x, x' \in I_j$ a $x \neq x'$.

I) Nepatří-li x' do žádného $(K_m^{(j)})$, platí podle 2) nerovnost

$$|\Delta(x,\, x') - \Delta(x_j,\, x_{j+1})| < \varepsilon\ .$$

II) Když $x' \in (K_m^{(j)})$, označíme jako x'' ten konec intervalu $K_m^{(j)}$, který je od x vzdálenější. Potom z

$$\Delta(x,\, x')((x - x'') + (x'' - x')) = \Delta(x,\, x'')(x - x'') + \Delta(x'',\, x')(x'' - x')$$

převedením $\Delta(x, x'')(x - x'')$ nalevo a $\Delta(x, x')(x'' - x')$ napravo máme

$$\begin{aligned} |\Delta(x,\, x') - \Delta(x,\, x'')| &= \left| \big(\Delta(x,\, x') - \Delta(x'',\, x')\big) \frac{x' - x''}{x - x''}) \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{x' - x''}{x - x''} \right| < 2 \frac{|K_m^{(j)}|}{|L_m^{(j)}|/2} = 2\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Díky trojúhelníkové nerovnosti a nerovnosti 1) pro druhou absolutní hodnotu vpravo odtud máme

$$\begin{aligned} |\Delta(x,\, x') - \Delta(x_j,\, x_{j+1})| &\leq |\Delta(x,\, x') - \Delta(x,\, x'')| + \\ &+ |\Delta(x,\, x'') - \Delta(x_j,\, x_{j+1})| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Když tedy $x \in [0, 1]$ leží mimo všechny ty intervaly, pak pro každé $x' \in [0, 1]$ s $x' \neq x$ ale dostatečně blízké x (aby $x', x \in I_j$) je

$$|\Delta(x,\, x') - \Delta(x_j,\, x_{j+1})| < 3\varepsilon\ .$$

Ale x' dost blízké x taky leží mimo ty intervaly, takže možnost II) výše se vlastně nemusí uvažovat? Viz úloha 5.2.9.

Když pro bod $y \in (0,1)$ vlastní derivace $f'(y)$ neexistuje, pak existuje $\varepsilon' \in (0,2)$, že pro každé $c \in \mathbb{R}$ a každé $\delta > 0$ existuje $x' \in P(y,\delta) \cap (0,1)$ s

$$|\Delta(y,\, x') - c| \geq 3\varepsilon' \ .$$

Což ale podle právě dokázané ostré nerovnosti znamená, že takové y leží v hořejších intervalech sestrojených pro ε' a s celkovou délkou nejvýše $17\varepsilon'$. Sjednocení hořejších systémů intervalů sestrojených postupně pro $\varepsilon' = \varepsilon/2^n$ a $n = 0, 1, 2, \ldots$ tak dává spočetný systém intervalů pokrývající všechny body $y \in [0,1]$, kde $f'(y) \in \mathbb{R}$ neexistuje, a s celkovou délkou nejvýše $17(\varepsilon + \sum \varepsilon/2^n) = 34\varepsilon$. Věta je dokázána. □

Úloha 5.2.5. *Proč platí nerovnost $d(\overline{x}) \leq 2$?*

Úloha 5.2.6. *Proč, když existují dva různé body $x, x' \in I$ s $\varphi(x,x') \geq \varepsilon$, je lze vzít s maximální vzdáleností $|x - x'|$?*

Úloha 5.2.7. *Odkud se vzaly dvě předešlé rovnosti ve výpočtu délky $|Q_0Q_h|$?*

Úloha 5.2.8. *A odkud se vzala předešlá nerovnost?*

Úloha 5.2.9. *Jak to tedy je, musí se možnost II) pro x' blízko u x uvažovat nebo ne?*

5.3 Věty o střední hodnotě a jejich důsledky

Rolleova věta. Posloupnost $(\log n)$ *není P-rekurentní. Lagrangeova věta o střední hodnotě. Děravá Roleova věta. Číslo* $0.11000100\ldots$ *není algebraické. Cauchyova a Schwarzova věta o střední hodnotě.*

Uvedeme čtyři věty o střední hodnotě, které dávají do souvislostí hodnoty funkcí a jejich derivací, a jejich různé aplikace.

Věta 5.3.1 (Rolleova věta). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,*

$$f\colon [a,\, b] \to \mathbb{R} \ \ \textit{je spojitá funkce}\ ,$$

pro každé $c \in (a,b)$ existuje derivace $f'(c) \in \mathbb{R}^*$ (i nevlastní) a $f(a) = f(b)$. Potom pro nějaké $c \in (a,b)$ se

$$f'(c) = 0\ .$$

Důkaz. Interval $[a,b]$ je kompaktní množina (viz poznámka za větou 4.2.18) a podle věty 4.2.23 tak f nabývá v nějakém $d \in [a,b]$ na $[a,b]$ globální minimum a v nějakém $c \in [a,b]$ globální maximum. Patrně

$$f(d) \leq f(a) = f(b) \leq f(c)\ .$$

Platí-li obě nerovnosti jako rovnosti, je f na $[a, b]$ konstantní a $f'(c) = 0$ dokonce pro každé $c \in (a, b)$. Nechť je jedna nerovnost, například první, ostrá (pro druhou argumentujeme podobně). Tedy $a < d < b$ a podle předpokladu existuje $f'(d)$. Věta 5.1.12 nám pak říká, že $f'(d) = 0$. □

Úloha 5.3.2. *Uveďte tři příklady funkcí $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, které splňují předpoklady věty 5.3.1 s jedinou výjimkou — (i) vše je splněno, jen je f v jediném bodě intervalu $[a, b]$ nespojitá nebo (ii) vše je splněno, jenom f v jediném bodě intervalu (a, b) nemá derivaci nebo (iii) vše je splněno, jenom $f(a) \neq f(b)$ — a pro které závěr věty neplatí.*

Geometricky Rolleova věta praví, že — za uvedených předpokladů — graf funkce začínající a končící stejně vysoko má vždy někde vodorovnou tečnu. *Michel Rolle (1652–1719)* byl francouzský matematik (v matematice pracoval zejména v diofantické analýze, po něm nazvaná věta se objevuje v případě polynomů v r. 1690 v Rolleově spisu *Traité d'algébre*).

Rolleova věta má řadu aplikací a dvě si uvedeme. Druhou vymyslel autor učebnice.

Důsledek 5.3.3. *Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N}$, $a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n < b$ jsou reálná čísla, funkce $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ má na (a, b) klasicky vlastní derivaci řádu n a $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$. Pak existuje číslo $c \in (x_0, x_n)$, že*

$$f^{(n)}(c) = 0\ .$$

Důkaz. Indukce podle n. Pro $n = 1$ je podle tvrzení 5.1.15 f na $[x_0, x_1]$ spojitá a důsledek tak platí podle Rolleovy věty. Pro $n > 1$ podle Rolleovy věty existují body $c_i \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, že $f'(c_i) = 0$. Podle indukčního předpokladu pro $n - 1$, body c_i a funkci f' máme

$$(f')^{(n-1)}(c) = f^{(n)}(c) = 0$$

pro nějaké číslo $c \in (c_0, c_{n-1}) \subset (x_0, x_n)$. □

Pro druhé použití Rolleovy věty (použijeme ale i důsledek následující věty o střední hodnotě) si řekneme, že posloupnost

$$(a_n) \subset \mathbb{R} \text{ se nazývá } P\textit{-rekurentní}\,,$$

když existují reálné polynomy $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_k(x)$, ne všechny nulové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rekurentní vztah

$$p_k(n)a_{n+k} + p_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \cdots + p_0(n)a_n = 0\ .$$

Například $(a_n) = (n!)$ je P-rekurentní posloupnost vzhledem k rovnosti

$$a_{n+1} - (n + 1)a_n = 0\ .$$

Je posloupnost $(\log n)$ hodnot logaritmu na přirozených číslech P-rekurentní? Rolleova věta ukazuje, že ne.

Věta 5.3.4 (Rolle a P-rekurence). *Posloupnost*

$$(a_n) = (\log n) \subset \mathbb{R}$$

není P-rekurentní. Obecněji platí, že každá funkce

$$F\colon (0,\,+\infty) \to \mathbb{R},\ F(x) = p(x) + \sum_{i=0}^{k} p_i(x) \log(x + b_i)\ ,$$

kde $k \in \mathbb{N}_0$, $p(x)$ a $p_i(x)$ jsou polynomy s reálnými koeficienty, které nejsou všechny nulové, a $0 \le b_0 < b_1 < \cdots < b_k$ je $(k+1)$-tice různých nezáporných reálných čísel, má jen konečně mnoho nulových bodů. To jest,

$$|\{a \in (0,\,+\infty) \mid F(a) = 0\}| < +\infty\ .$$

Důkaz. P-rekurentnost posloupnosti $(\log n)$ by skutečně znamenala, že taková funkce $F(x)$ s $p(x) = 0$ a $b_i = i$ má v každém přirozeném čísle nulový bod. Pro spor předpokladáme, že $F(x)$ je nějaká funkce uvedeného tvaru, ale $F(a) = 0$ pro nekonečně mnoho $a > 0$. Podle věty 2.2.1 pak máme posloupnost $0 < a_1 < a_2 < \ldots$ nebo $a_1 > a_2 > \cdots > 0$, že $F(a_i) = 0$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pro každý interval $[a_i, a_{i+1}]$ či $[a_{i+1}, a_i]$ a funkci $F(x)$ můžeme použít Rolleovu větu 5.3.1, F má totiž na $(0,\,+\infty)$ derivaci

$$F'(x) = p'(x) + \sum_{i=0}^{k} p_i'(x) \log(x + b_i) + \sum_{i=0}^{k} \frac{p_i(x)}{x + b_i}\ ,$$

a dostáváme, že i $F'(c_i) = 0$ pro každé $i \in \mathbb{N}$ a posloupnost $0 < c_1 < c_2 < \ldots$ nebo $c_1 > c_2 > \cdots > 0$ (čísla c_i se střídají s čísly a_i). Opakovaným derivováním $F(x)$ vidíme, že $F(x)$ má na intervalu $(0, +\infty)$ derivace $F^{(n)}(x)$ všech řádů. Stejná úvaha ukazuje, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ máme posloupnosti $0 < c_1^{(n)} < c_2^{(n)} < \ldots$ nebo $c_1^{(n)} > c_2^{(n)} > \cdots > 0$, že $F^{(n)}(c_i^{(n)}) = 0$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Podle úlohy 5.3.5 ale lehce vidíme, že pro dostečně velké $n \in \mathbb{N}$ je $F^{(n)}(x)$ vlastně racionální funkce, podíl dvou polynomů. Taková funkce, není-li identicky nulová, má jen konečně mnoho nulových bodů (v kořenech polynomu v čitateli), takže $F^{(n)}(x)$ je identicky nulová. To ale podle důsledku 5.3.11 znamená, že předchozí funkce $F^{(n-1)}(x)$ je konstantní. Ovšem $F^{(n-1)}(x)$ má nekonečně mnoho nulových bodů, takže i $F^{(n-1)}(x)$ je identicky nulová. Zpětně dedukujeme, že původní funkce $F(x)$ je identicky nulová. To už ale dovedeme ke sporu lehce vzhledem k neslučitelnosti růstů logaritmu a polynomů. Patrně je některý polynom p_i nenulový. Můžeme předpokládat, že to je polynom $p_0(x)$ a že $b_0 = 0$ (proč? — úloha 5.3.6). Dále můžeme předpokládat, že $p_0(0) \neq 0$, protože případného m-násobného kořene polynomu $p_0(x)$ v nule se zbavíme m-násobným zderivováním (úloha 5.3.7), kvůli tomuto kroku jsme museli vzít obecnější funkci

$F(x)$ s polynomem $p(x)$. Pak dostáváme spor

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} p_0(x)\log x + \lim_{x\to 0^+}\left(p(x) + \sum_{i=1}^{k} p_i(x)\log(x+b_i)\right) \\
&= p_0(0)(-\infty) + p(0) + \sum_{i=1}^{k} p_i(0)\log b_i = \pm\infty\ .
\end{aligned}
$$

První rovnost tu plyne z identické nulovosti $F(x)$ a následující plynou z aritmetiky limit funkcí a z nenulovosti $p_0(0)$. □

Úloha 5.3.5. *Dokažte, že opakovaným derivováním se pro každou funkci $F(x)$ ve větě 5.3.4 nakonec zbavíme logaritmů a pro dostatečně velké n je $F^{(n)}(x)$ podílem dvou polynomů.*

Úloha 5.3.6. *Jak se provede závěr důkazu věty 5.3.4, když je polynom $p_0(x)$ nulový nebo $b_0 > 0$?*

Úloha 5.3.7. *Jak vyřídíme případ, že $p_0(x) = x^m q(x)$, kde $m \in \mathbb{N}$ a $q(x)$ je polynom s $q(0) \neq 0$?*

Úloha 5.3.8. *Dokažte, že zdánlivě slabší definice P-rekurentní posloupnosti, která požaduje platnost rekurentního vztahu jen pro každé $n > n_0$, je ekvivalentní původní definici.*

Uvedeme ještě úlohu na neplatnost Rolleovy věty pro „děravé“ definiční obory.

Úloha 5.3.9. *Nalezněte spočetnou množinu $A \subset (0,1)$ (tvrzení 5.3.12 ukazuje, že nemůže být konečná) a takovou nezápornou spojitou funkci*

$$f\colon [0,\,1]\backslash A \to [0,\,+\infty)\ ,$$

že $f(0) = f(1) = 0$ a pro každé $c \in (0,1)\backslash A$ je $f'(c) = 1$.

V úloze 5.3.29 sestrojíte takovou stejnoměrně spojitou funkci.

Zobecnit Rolleovu větu vypuštěním podmínky $f(a) = f(b)$ je snadné: pak obecněji platí, že graf má někde tečnu rovnoběžnou se sečnou procházející oběma konci grafu.

Věta 5.3.10 (Lagrangeova o střední hodnotě). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,*

$$f\colon [a,\,b] \to \mathbb{R} \ \text{ je spojitá funkce}$$

a pro každé $c \in (a,b)$ existuje derivace $f'(c) \in \mathbb{R}^*$ (i nevlastní). Potom existuje $c \in (a,b)$, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ .$$

Důkaz. Funkce $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definovaná jako

$$h(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

splňuje předpoklady věty 5.3.1, protože (mimo jiné) $h(a) = h(b) = 0$ a, na (a, b), $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Nulový bod c derivace, $h'(c) = 0$, dává hledanou hodnotu c pro $f(x)$. □

Důsledek 5.3.11. *Nechť funkce $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, má na intervalu (a, b) nulovou derivaci. Potom je f konstantní funkce.*

Důkaz. Nechť $c < d$ jsou dvě čísla z intervalu (a, b). Podle věty 5.3.10 díky nějakému $e \in (c, d)$ máme $f(d) - f(c) = (d - c)f'(e) = (d - c)0 = 0$. Tedy $f(c) = f(d)$ pro každá dvě čísla c, d z (a, b) a f je konstantní funkce. □

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) byl italsko-francouzský matematik (pracoval v Itálii, hlavně v Turíně, v Prusku (Berlín) a ve Francii (Paříž), po I. Newtonovi nově shrnul mechaniku, na jeho pojetí stála matematická fyzika v 19. století).

Porovnejte následující tvrzení s úlohou 5.3.9.

Tvrzení 5.3.12 (děravá Rolleova věta). *Předpokládejme, že množina $A \subset (0, 1)$ je konečná, že nezáporná spojitá funkce*

$$f\colon [0,\ 1]\backslash A \to [0, +\infty)$$

má pro každé $c \in (0, 1)\backslash A$ derivaci $f'(c) \in \mathbb{R}^*$ (i nevlastní) a že $f(0) = f(1) = 0$. Pak existuje $c \in (0, 1)$, že pro každé $\delta > 0$ pro nějaké $a, b \in (0, 1)\backslash A$ je

$$|a - c|,\ |b - c| < \delta \quad a \quad f'(a) \geq 0 \geq f'(b)\ .$$

Důkaz. Nechť $A = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_k\} \subset (0, 1)$. Pro $k = 0$, tj. $A = \emptyset$, vezmeme dva body $D_k = D_0 = \{0 < 1\}$. Pro $k > 0$ vezmeme takové spočetné podmnožiny $D_i \subset [a_i, a_{i+1}]\backslash A$ pro $i = 0, 1, 2 \ldots, k$, kde $a_0 = 0$ a $a_{k+1} = 1$, že D_0 má nejmenší prvek 0 a jediný limitní bod a_1, D_k má jediný limitní bod a_k a největší prvek 1 a D_i pro $0 < i < k$ má právě dva limitní body a_i a a_{i+1}. Pro každé dva sousední body $\{b_1 < b_2\} \subset D_i$ (tj. neexistuje $b \in D_i$ s $b_1 < b < b_2$, vzhledem k předepsaným limitním bodům se každá D_i skládá z dvojic sousedů) a každé i uvážíme sklon $s = \frac{f(b_2)-f(b_1)}{b_2-b_1} \in \mathbb{R}$ sečny jdoucí odpovídajícími body na grafu f v intervalu $[a_i, a_{i+1}]$. Podle obvyklého uspořádání bodů $[0, 1]$ tyto sklony tvoří pro D_0 obyčejnou posloupnost $p_0 = (s_1, s_2, \ldots) \subset \mathbb{R}$, pro D_k obrácenou „posloupnost“ $p_k = (\ldots, t_2, t_1) \subset \mathbb{R}$ a pro D_i s $0 < i < k$ oboustranně nekonečnou posloupnost

$$p_i = (\ldots,\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ \ldots) \subset \mathbb{R}$$

indexovanou celými čísly. Patrně $s_1 \geq 0$ a $t_1 \leq 0$. Pokud některá posloupnost p_i obsahuje dva sousední sklony s opačnými znaménky, to jest první je ≥ 0 a druhý ≤ 0 nebo naopak, nebo když $k = 0$ a $A = \emptyset$, jsme hotovi. Pak se totiž lehce s pomocí věty 4.2.4 (a pro $k = 0$ bez ní) v odpovídajícím úseku grafu funkce f naleznou dva různé body se stejnou y-ovou souřadnicí (pro $k = 0$ máme přímo $f(0) = f(1) = 0$) a podle věty 5.3.1 pak máme dokonce bod

$$a = b = c \in (0,1)\backslash A \ \text{ s } \ f'(c) = 0 \ .$$

Pokud tomu tak není, $k > 0$ a všechny sklony v posloupnosti p_0 jsou nezáporné, v posloupnosti p_k nekladné a pro $0 < i < k$ v posloupnosti p_i buď všechny nezáporné nebo všechny nekladné. Existuje tedy $i \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq i < k$, že p_i má pouze nezáporné sklony a p_{i+1} pouze nekladné. Na odpovídající úseky na grafu f použijeme větu 5.3.10 a dostaneme body $b_1 < b_2 < \cdots < a_{i+1} < \cdots < c_2 < c_1$ v $(0,1)\backslash A$, že $b_n \to a_{i+1}$ i $c_n \to a_{i+1}$ a vždy $f'(b_n) \geq 0 \geq f'(c_n)$. Hledaný bod c je tedy $c = a_{i+1}$ a jako body a, resp. b, volíme b_n, resp. c_n, s dostatečně velkým indexem n. □

Úloha 5.3.13. *Na příkladu ukažte podstatnost nezápornosti f.*

Lagrangeovu větu o střední hodnotě také zobecníme, ve větě 5.3.16, ale nejprve ji použijeme k odvození tak zvané Liouvilleovy nerovnosti pro algebraická reálná čísla. S její pomocí J. Liouville sestrojil první příklady transcendentních čísel.

Věta 5.3.14 (J. Liouville, 1844). *Pro každé algebraické číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ stupně $n \in \mathbb{N}$ existuje konstanta $c = c(\alpha) > 0$, že pro každý zlomek $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ různý od α platí nerovnost*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^n} \ .$$

Důkaz. Nechť $r(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{Z}$ a $a_n \neq 0$, je polynom v $\mathbb{Z}[x]$ nejmenšího stupně s $r(\alpha) = 0$ a nechť $\frac{p}{q}$ je nějaký zlomek různý od α. Rozlišíme dva případy $|\alpha - \frac{p}{q}| > 1$ a $|\alpha - \frac{p}{q}| \leq 1$. V prvním případu dokazovaná nerovnost triviálně platí s konstantou $c = 1$. Ve druhém případu použijeme předchozí větu 5.3.10 pro funkci $r(x)$ a vezmeme číslo $\beta \in \mathbb{R}$ ležící mezi α a $\frac{p}{q}$, že

$$\frac{r(p/q) - r(\alpha)}{p/q - \alpha} = r'(\beta) \ .$$

Použijeme $r(\alpha) = 0$ a vyjádříme absolutní hodnotu, která nás zajímá, jako

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{|r(p/q)|}{|r'(\beta)|} \ .$$

Konstantu $d > 0$ definujeme jako

$$\frac{1}{d} = \max_{x \in [p/q-1,\, p/q+1]} |r'(x)|$$

(pravá strana je konečná díky větě 4.2.23). Číslo β jistě leží v intervalu definujícím d, takže

$$\frac{1}{|r'(\beta)|} \geq d \, .$$

(A co když $r'(\beta) = 0$? Viz dále.) Dále tvrdíme, že $r(p/q) \neq 0$. Pro $n = 1$ to je jasné, jediný kořen polynomu $r(x)$ je α. Pro $n > 1$ to plyne z minimality stupně n — kdyby nastalo $r(p/q) = 0$, vydělíme $r(x)$ polynomem $x - \frac{p}{q}$ a dostaneme racionální polynom stupně $n-1$ (z něhož lehce vyrobíme celočíselný polynom), který ve sporu s definicí $r(x)$ má stále kořen α. Tedy $r(p/q) \neq 0$ (a speciálně díky úvodní rovnici $r'(\beta) \neq 0$) a

$$|r(p/q)| = \frac{\left|a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n\right|}{q^n} \geq \frac{1}{q^n} \, ,$$

protože čitatel je nenulové kladné celé číslo. Takže ve druhém případu máme

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{d}{q^n} \, ,$$

s výše definovanou konstantou d. Celkem tak nerovnost platí pro každý zlomek různý od α s konstantou $c = \min(1, d)$. □

Důsledek 5.3.15 (0.11000100… **je transcendentní číslo**). *Pro každé přitozené číslo $k \geq 2$ je součet řady*

$$\alpha_k = \sum \frac{1}{k^{n!}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^6} + \frac{1}{k^{24}} + \frac{1}{k^{120}} + \ldots$$

transcendentní číslo. Pro $k = 10$ tak dostáváme transcendenci čísla

$$\sum 10^{-n!} = 0.110001000000000000000001\underbrace{00\ldots00}_{95\text{ nul}}100\ldots \, .$$

Důkaz. Podíváme se, jak dobře je číslo α_k aproximováno zlomkem

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} k^{-n!} = \frac{p_m}{k^{m!}} < \alpha_k \quad (p_m \in \mathbb{N}) \, .$$

Když si opět vzpomeneme na geometrickou řadu a její součet, dostaneme odhad

$$|\alpha_k - s_m| < \sum_{n>m} \left(\frac{1}{k^{m!}}\right)^n \leq \frac{2}{(k^{m!})^{m+1}} = \frac{2/k^{m!}}{(k^{m!})^m} \, .$$

Protože $2/k^{m!} \to 0$ (a dosti rychle) pro $m \to \infty$, pro každé dané $n \in \mathbb{N}$ a $c > 0$ porušuje zlomek s_m pro dostatečně velké m nerovnost předešlé věty. Proto číslo α_k není kořenem žádného (nenulového) racionálního polynomu a je transcendentní. □

Následuje ještě obecnější věta o střední hodnotě.

Věta 5.3.16 (Cauchyova o střední hodnotě). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,*

$$f,\, g\colon [a,\, b] \to \mathbb{R} \;\; \textit{jsou spojité funkce}$$

a pro každé $c \in (a, b)$ existuje nenulová vlastní derivace $g'(c) \in \mathbb{R}$ a derivace $f'(c) \in \mathbb{R}^*$ (i nevlastní). Potom existuje $c \in (a, b)$, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\ .$$

Důkaz. Ve zlomku vpravo nikdy nedělíme nulou, protože $g(b) - g(a) \neq 0$ (takzvaný důkaz tautologií, dokažte to ale normálně v úloze 5.3.17). Položíme

$$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))\ .$$

Není těžké ověřit, že $h(x)$ splňuje předpoklady věty 5.3.1 (ověřte to prosím v úloze 5.3.18) a že na (a, b) je

$$h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))\ .$$

Podle věty 5.3.1 tedy $h'(c) = 0$ pro nějaké $c \in (a, b)$, což po úpravě dává dokazovanou rovnost. □

Úloha 5.3.17. *Proč tedy $g(b) - g(a) \neq 0$?*

Úloha 5.3.18. *Ukažte, že funkce $h(x)$ definovaná v předešlém důkazu je na $[a, b]$ spojitá, má na (a, b) derivaci a $h(a) = h(b) = 0$.*

Úloha 5.3.19. *Uveďte geometrický výklad rovnosti ve větě 5.3.16.*

Úloha 5.3.20. *Kde bychom se v důkazu dostali do úzkých, kdybychom i pro $g(x)$ dovolili nevlastní derivaci?*

Větu 5.3.10 teď zobecníme ještě jiným způsobem, jen s jednou funkcí ale s derivacemi vyšších řádů. Všimněte si, že pro řád $n = 1$ dostáváme víceméně (úloha 5.3.22) větu 5.3.10.

Věta 5.3.21 (Schwarzova o střední hodnotě). *Buďte dány $n \in \mathbb{N}$, reálná čísla $a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n < b$ a funkce*

$$f\colon (a,\, b) \to \mathbb{R} \;\; \textit{mající na intervalu } (a,\, b) \textit{ klasicky vlastní derivaci řádu } n\ .$$

Potom existuje bod $c \in (x_0, x_n)$, pro nějž platí rovnost mezi determinanty

$$\left\| \begin{matrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{matrix} \right\| = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \left\| \begin{matrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{matrix} \right\|\ .$$

Důkaz. Podle úlohy 5.3.23 existuje takový polynom

$$g(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 ,$$

že pro každé $i = 0, 1, \ldots, n$ je $g(x_i) = f(x_i)$. Tedy $(f - g)(x_i) = 0$ pro tato i a podle důsledku 5.3.3 máme $c \in (x_0, x_n)$, že

$$(f - g)^{(n)}(c) = 0 \ \text{ a tedy } \ f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c) = n!a_n$$

(protože $g^{(n)}(x)$ je konstantní funkce $n!a_n$). Rovnosti

$$a_n x_i^n + \cdots + a_1 x_i + a_0 = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n ,$$

lze vidět tak, že $a_n, \ldots, a_1, a_0$ je řešení lineární soustavy, jejíž koeficienty jsou mocniny čísel x_i a pravé strany jsou hodnoty funkce f v těchto bodech. Podle Cramerova pravidla (úloha 5.3.25) z lineární algebry se pak a_n rovná podílu dvou determinantů, totiž právě těch ze znění věty. Dosadíme-li toto vyjádření a_n do $f^{(n)}(c) = n!a_n$, dostaneme po úpravě dokazovanou rovnost. Je ovšem třeba zdůvodnit nenulovost toho determinantu, jímž dělíme (úloha 5.3.24). □

Úloha 5.3.22. *Proč jsme výše napsali, že pro $n = 1$ věta 5.3.21 „víceméně“ přejde ve větu 5.3.10?*

Úloha 5.3.23 (Lagrangeova interpolace). *Dokažte, že pro každých $n + 1$ dvojic $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1, \ldots, n$ a $n \in \mathbb{N}_0$, s $|\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}| = n$ existuje polynom $p(x)$ stupně n a s reálnými koeficienty, že*

$$p(a_0) = b_0,\ p(a_1) = b_1,\ \ldots,\ p(a_n) = b_n .$$

Nejlépe takový polynom vyjádřete explicitně pomocí čísel a_i a b_i.

Úloha 5.3.24. *Proč je determinant na pravé straně rovnice ve větě 5.3.21 nenulový?*

Úloha 5.3.25. *Připomeňte si Cramerovo pravidlo, vyjadřující řešení lineární soustavy pomocí determinantů, a jeho důkaz.*

Uvedeme další důsledky vět o střední hodnotě. Prvním z nich je populární nástroj pro výpočet limit neurčitých výrazů $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$. Důkaz je založený na Cauchyově větě o střední hodnotě.

Věta 5.3.26 (l’Hospitalovo pravidlo). *Nechť*

$$a \in \mathbb{R}^* \text{ a jsou dány funkce } f,\, g\colon P(a,\, \delta) \to \mathbb{R}$$

mající na prstencovém okolí $P(a, \delta)$ vlastní derivace a g' je na něm všude nenulová. Pak platí následující.

1. Když $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *a* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$*, pak i*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A\ .$$

2. Když $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ *a* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$*, pak i*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A\ .$$

Totéž platí pro jednostranné limity $x \to a^-$ *a* $x \to a^+$*.*

Důkaz. 1. Nechť je a vlastní. Pro dané $\varepsilon \in (0,1)$ existuje $\delta_1 \in (0,\delta)$, že $x \in (a, a+\delta_1) \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} \in U(A,\varepsilon)$. Funkce f a g dodefinujeme v a jako $f(a) = g(a) = 0$, čímž dostaneme funkce spojité na $[a, a+\delta_1]$. Podle věty 5.3.16, použité pro interval $[a,x]$ a dodefinované funkce, pro každé $x \in (a, a+\delta_1)$ existuje číslo $c \in (a,x)$, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \in U(A,\varepsilon)\ .$$

Tedy $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. Stejně se dokáže, že $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Nechť $a = +\infty$. Substituce $x = \frac{1}{y}$ převádí limitu pro $x \to +\infty$ na limitu pro $y \to 0^+$. Podle již dokázaného případu limity ve vlastním bodě,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y\to 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-\frac{f'(1/y)}{y^2}}{-\frac{g'(1/y)}{y^2}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

(v první a poslední rovnosti jsme použili tvrzení 4.1.24, ve druhé l'Hospitalovo pravidlo v bodě $a = 0$). Pro $a = -\infty$ použijeme substituci $x = -1/y$.

2. Můžeme předpokládat, že a je vlastní, případ $a = \pm\infty$ totiž převedeme na vlastní a substitucí $x = \frac{1}{y}$ jako v první části. Nechť je nejprve $A \in \mathbb{R}$ vlastní. Dokážeme $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, odvození limity zleva je analogické. Buď dáno $\varepsilon \in (0,1)$. Pro každé dva body $x < y$ z $(a, a+\delta)$ máme pro nějaké z ležící mezi nimi podle věty 5.3.16 rovnost

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}\ .$$

Odtud úpravou a trojúhelníkovou nerovností dostáváme

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| &\le \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(z)}{g'(z)}\right| + \left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - A\right| \\ &= \left|\frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f'(z)}{g'(z)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - A\right| \\ &\le \frac{|f(y)| + |f'(z)/g'(z)| \cdot |g(y)|}{|g(x)|} + \left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - A\right|\end{aligned}$$

(dělení $g(x)$ není problém, protože podle Rolleovy věty a předpokladu o $g'(x)$ je $g(x)$ na pravém okolí a nenulová). Podle předpokladů můžeme y zvolit tak blízko u a, že poslední absolutní hodnota je vždy (pro každé $z = z(x)$) menší než $\frac{\varepsilon}{2}$. Pak také $|\frac{f'(z)}{g'(z)}| < A + 1$ a protože pro $x \to a^+$ jde $|g(x)|$ do $+\infty$, pro každé x blízko u a je i předposlední absolutní hodnota menší než $\frac{\varepsilon}{2}$. Pak celkem $|\frac{f(x)}{g(x)} - A| < \varepsilon$.

Nechť nyní $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$ a $A = +\infty$ (případ $A = -\infty$ je velmi podobný). Hořejší rovnost z věty 5.3.16 teď napíšeme jako

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)\frac{f'(z)}{g'(z)} + \frac{f(y)}{g(x)} = (1-u)\frac{f'(z)}{g'(z)} + v\ .$$

Podle předpokladů můžeme y zvolit tak blízko u a, že vždy (pro každé $z = z(x)$) je $\frac{f'(z)}{g'(z)} > \frac{3}{\varepsilon}$. Protože $u, v \to 0$ pro $x \to a^+$, pro každé x dostatečně blízké zprava k a je $|u| < \frac{1}{3}$ a $|v| < \frac{1}{\varepsilon}$. Pak celkem $\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{\varepsilon}$. □

Guillaume F. A. markýz de l'Hôpital (1661–1704) byl francouzský matematik (l'Hôpital je skutečně původní ortografie, narodil se ve vojenské rodině, sám ale vojenské kariéry nakonec nechal kvůli krátkozrakosti a věnoval se matematice, v r. 1696 vydal jako první knihu o infinitesimálním počtu, *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* neboli *Analýza nekonečně malých veličin pro porozumění křivkám*).

Tvrzení 5.3.27 (limita derivace). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, funkce*

$$f\colon [a,\, a+\delta) \to \mathbb{R} \ \text{ je spojitá v bodě } a\ ,$$

má na intervalu $(a, a+\delta)$ vlastní derivaci a $\lim_{x\to a^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak i $f'_+(a) = A$. Ve druhé rovnosti výpočtu

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+} f'(x) &= \lim_{x\to a^+}\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{y\to x}\lim_{x\to a^+}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\\ &= \lim_{y\to a^+}\frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'_+(a)\end{aligned}$$

tak formální záměna pořadí dvou limit funkce v bodě platí.

Důkaz. Podle věty 5.3.10 ihned máme

$$f'_+(a) = \lim_{y\to a^+}\frac{f(y)-f(a)}{y-a} = \lim_{y\to a^+} f'(z(y)) = A\ ,$$

kde $z = z(y) \in (a, y)$. □

Důležitou geometrickou charakteristikou grafu funkce jsou intervaly monotonie — úseky, kde funkce roste a kde klesá. Lze je určit pomocí její derivace.

Věta 5.3.28 (derivace a monotonie). *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je neprázdný interval a spojitá funkce*

$$f\colon J \to \mathbb{R} \ \textit{ má v každém vnitřním bodě } J \textit{ derivaci}\,.$$

Když $f' \geq 0$ (resp. $f' > 0$) na vnitřku J, je f na J neklesající (resp. rostoucí). Když $f' \leq 0$ (resp. $f' < 0$) na vnitřku J, je f na J nerostoucí (resp. klesající).

Důkaz. Nechť třeba $f' < 0$ na vnitřku J, ostatní případy jsou podobné. Jsou-li $a < b$ dva body z J, existuje podle věty 5.3.10 bod $c \in (a, b)$, že $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) < 0$, tedy $f(b) < f(a)$. Proto f na J klesá. □

Ve větě je důležité, že definiční obor f nemá díry. S nimi přestane věta platit.

Úloha 5.3.29 (roste a neroste). *Sestrojte takovou stejnoměrně spojitou funkci*

$$f\colon [0,1] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\,,$$

že $f(0) = f(1) = 0$ a pro každé a v $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ se $f'(a) = 1$.

Jinou geometrickou charakteristikou grafu funkce detekovatelnou derivacemi jsou konvexita a konkavita. Graf konvexní funkce je vydutý dolů a konkávní nahoru. Přesná definice je následující.

Definice 5.3.30 (konvexní a konkávní funkce). *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je neprázdný interval a*

$$f\colon J \to \mathbb{R} \ \textit{ je funkce}\,.$$

Řekneme, že f je na intervalu J konvexní (resp. konkávní), když pro každé tři body $a < b < c$ z J je

$$f(b) \leq f(a) + \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(b - a) \ \ \textit{(resp. } f(b) \geq \ldots\textit{)}\,.$$

Bod $(b, f(b))$ grafu funkce f tedy leží na přímce spojující body $(a, f(a))$ a $(c, f(c))$ grafu nebo pod ní (resp. na ní nebo nad ní). Platí-li ostrá nerovnost, mluvíme o ryzí konvexitě (resp. ryzí konkavitě).

Tvrzení 5.3.31 (konvexita a jednostranné derivace). *Buď dán neprázdný interval $J \subset \mathbb{R}$ a na něm konvexní nebo konkávní funkce*

$$f\colon J \to \mathbb{R}\,.$$

Pak má f v každém vnitřním bodě a intervalu J obě vlastní jednostranné derivace $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti $J = [b, c]$ a $b < a < c$. Pro $x < y$ z J jako $s(x, y)$ označíme směrnici přímky jdoucí body $(x, f(x))$ a $(y, f(y))$. Nechť je f na J konvexní, případ konkavity je podobný. Podle předchozí definice máme

$x < z < y \Rightarrow s(x,z) \le s(x,y) \le s(z,y)$. Takže funkce $x \mapsto s(a,x)$ je na $(a,c]$ neklesající a zdola omezená hodnotou $s(b,a)$. Podle tvrzení 4.1.20 a 4.1.23 a podle definice jednostranné derivace následující limita existuje a je vlastní:

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} s(a,x) \ge s(b,a)\ .$$

Podobně pro derivaci zleva. □

Je zajímavé, že vedle existence vlastní derivace jsou konvexita a konkavita další vlastnosti funkce implikující spojitost.

Důsledek 5.3.32 (konvexita a spojitost). *Funkce konvexní nebo konkávní na intervalu je na jeho vnitřku spojitá.*

Důkaz. Podle předchozího tvrzení a tvrzení 5.1.15 je f v a spojitá zleva i zprava a tedy je spojitá v a. □

Předchozí tvrzení a jeho důsledek ilustruje funkce $f(x) = |x|$ v okolí počátku. Funkce tam je ryze konvexní, má tak vlastní f'_+ a f'_- a je spojitá. Ale $f'(0)$ neexistuje vzhledem k $f'_+(0) = 1 \ne -1 = f'_-(0)$.

Úloha 5.3.33. *Ukažte na příkladu, že předchozí důsledek neplatí pro krajní body intervalu (funkce v nich může být nespojitá).*

Konvexitu a konkavitu funkce poznáme z její druhé derivace.

Věta 5.3.34 (konvexita a druhá derivace). *Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je funkce, jež má na (a,b) spojitou první derivaci a definovanou druhou derivaci. Pak*

$$f'' \ge 0\ (f'' > 0) \text{ na } (a,\ b) \Rightarrow f \text{ je na } (a,\ b) \text{ konvexní (ryze konvexní)}$$

a

$$f'' \le 0\ (f'' < 0) \text{ na } (a,\ b) \Rightarrow f \text{ je na } (a,\ b) \text{ konkávní (ryze konkávní)}\ .$$

Důkaz. Nechť třeba $f'' > 0$ na (a,b) a $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ jsou libovolné tři různé body v intervalu (a,b). Věta 5.3.10, použitá na intervalech $[x_1,x_2]$ a $[x_2,x_3]$ pro funkci f, dává pro nějaké mezihodnoty y_i, $x_1 < y_1 < x_2$ a $x_2 < y_2 < x_3$, že

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(y_1) < f'(y_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\ ,$$

protože podle věty 5.3.28 je f' na (a,b) rostoucí. Protože tyto dva zlomky jsou také směrnice přímek jdoucích body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$, resp. $(x_2, f(x_2))$ a $(x_3, f(x_3))$, vidíme, že bod $(x_2, f(x_2))$ leží pod přímkou jdoucí body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$ (proč? — úloha 5.3.35). Proto je f na (a,b) ryze konvexní. Zbylé tři případy jsou velmi podobné. □

Úloha 5.3.35. *Proč přesně leží bod $(x_2, f(x_2))$ pod tou přímkou?*

Definice 5.3.36 (inflexe). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, a $f\colon U(a, \delta) \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v a inflexi (inflexní bod), když existuje vlastní derivace $f'(a) \in \mathbb{R}$ a graf f přechází v okolí a z jedné strany tečny na druhou: existuje δ, $0 < \delta' \le \delta$, že*

$$x \in (a - \delta',\, a) \Rightarrow f(x) \le f(a) + f'(a)(x - a)$$

a

$$x \in (a,\, a + \delta') \Rightarrow f(x) \ge f(a) + f'(a)(x - a)$$

nebo jsou nerovnosti vyměněné. Platí-li ostré nerovnosti, mluvíme o ryzí inflexi (ryzím inflexním bodu).

Například $f(x) = x^3$ má v $a = 0$ ryzí inflexní bod, protože graf této funkce křižuje v $x = 0$ tečnu $y = 0$. Zhruba řečeno, inflexní bod je ekvivalentní vynulování druhé derivace. Řekneme to přesně ve dvou tvrzeních.

Tvrzení 5.3.37 ($f'' \ne 0 \Rightarrow$ není inflexe). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$,*

$$f\colon U(a,\, \delta) \to \mathbb{R}$$

a $f''(a)$ klasicky existuje, ale není 0. Pak f nemá v a inflexní bod.

Důkaz.

□

Tvrzení 5.3.38 ($f'' = 0 \Rightarrow$ je inflexe). *Nechť*

$$f\colon (a,\, b) \to \mathbb{R}\ ,$$

f' je na (a, b) spojitá, $c \in (a, b)$, $f'' < 0$ na (a, c) a $f'' > 0$ na (c, b) či naopak. Potom je c ryzím inflexním bodem funkce f.

Důkaz.

□

5.4 Spojitá funkce je derivací, ale nemusí mít derivaci

Nespojitá derivace. Každá spojitá funkce je derivací jiné funkce. Weierstrassova (–Bolzanova) věta o existenci spojité funkce, jež nemá nikde derivaci.

V tomto oddílu uvedeme některé obecné výsledky o derivacích, většinou dávající do souvislosti derivaci a spojitost. Již jsme si v … všimli jednoduché ale důležité věci, že existence vlastní derivace funkce v bodě vynucuje její spojitost v tomto bodě.

Tvrzení 5.4.1 (nespojitá derivace). *Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$ má vlastní derivaci $f'(a)$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Ta však jako funkce $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ není spojitá v bodě 0.*

Důkaz. Podle definice derivace

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(1/x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0\ ,$$

protože $\sin(1/x) \in [-1, 1]$ pro každé $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Podle ... pro každé nenulové x máme

$$f'(x) = (x^2 \sin(1/x))' = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)\ .$$

Pro $x \to 0$ předposlední sčítanec jde k 0, ale limita posledního neexistuje, takže dohromady $\lim_{x \to 0} f'(x)$ neexistuje a $f'(x)$ není spojitá v $x = 0$. □

Věta 5.4.2 (derivace na zlomcích). *Pro každou funkci $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ existuje taková funkce $F\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, že $F'(a) = f(a)$ pro každé $a \in \mathbb{Q}$.*

Důkaz. Zavedeme jisté podmnožiny roviny, takzvané *omezovače*. Omezovač $O(a, b, c, d)$, kde $a \in \mathbb{Q}$, $b, c \in \mathbb{R}$ a $d \in (0, 1) \backslash \mathbb{Q}$, je množina

$$O(a, b, c, d) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in P(a, d) \,\&\, |y - b - c(x - a)| < (x - a)^2\}\ .$$

Poznamenejme, že zřejmě pro každý bod $B \in O(a, b, c, d)$ existuje $r > 0$, že kruh se středem B a poloměrem r celý leží v $O(a, b, c, d)$ (omezovače jsou otevřené podmnožiny roviny) a na druhou stranu pro každý kruh K se středem (a, b) a poloměrem $r > 0$ pro každé malé d je $O(a, b, c, d) \subset K$. Účelem omezovače je přimět funkci F k hodnotě $F'(a) = c$. Zřejmě totiž platí $(0 < d' < d)$:

$$F\colon U(a, d') \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ F(a) = b,\ F \subset O(a, b, c, d) \cup \{(a, b)\} \Rightarrow F'(a) = c\ .$$

Plyne to z definice derivace a definice omezovače.

Buď dána funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Vezmeme nějakou enumeraci (a_n) množiny $\mathbb{Q}$, tedy prostou posloupnost zlomků obsahující každý zlomek. Budeme postupně (indukcí) definovat posloupnost (O_n) omezovačů $O_n = O(a_n, b_n, f(a_n), d_n)$, $n \in \mathbb{N}$, která bude mít vlastnost V, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ s $m \neq n$ jsou O_m a O_n buď v inkluzi nebo jsou disjunktní a vertikálně se nepřekrývající v tom smyslu, že žádná svislá racionální přímka $x = a \in \mathbb{Q}$ neprotíná současně O_m i O_n. První omezovač O_1 má daný parametr a_1 (a $c_1 = f(a_1)$) a b_1, d_1 jsou libovolné, V nyní platí triviálně. Nechť již jsou definované omezovače $O_1, O_2, \ldots, O_n$ tak, že V platí. Definujeme následující omezovač O_{n+1}. Nechť $A = \{i \in [n] \mid O_i \cap (x = a_{n+1}) \neq \emptyset\}$ a $B = [n] \backslash A$. Díky vlastnosti V tvoří omezovače $\{O_i \mid i \in A\}$ řetězec vzhledem k inkluzi: $O_{i_1} \supset O_{i_2} \supset \cdots \supset O_{i_{|A|}}$ pro nějakou permutaci $i_1, i_2, \ldots, i_{|A|}$ čísel v A. Číslo $b_{n+1} \in \mathbb{R}$ zvolíme libovolně ale tak, že

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) \in O_{i_{|A|}} \cap (x = a_{n+1})\ ,$$

tedy jako nějaký bod nejvnitřnějšího průniku přímky a omezovače. Vzhledem k poznámce o omezovačích výše a díky tomu, že přímka ($x = a_{n+1}$) má kladnou vzdálenost od každého omezovače O_i s $i \in B$ (proto požadujeme iracionalitu parametru d), lze vzít tak malé $d_{n+1} \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}$, že omezovač $O_{n+1} = O(a_{n+1}, b_{n+1}, f(a_{n+1}), d_{n+1})$ celý leží v $O_{i_{|A|}}$ a je disjunktní a vertikálně se nepřekrývající s každým O_i s $i \in B$. K n-člennému seznamu omezovačů přidáme O_{n+1} a vlastnost V se zřejmě zachová. Takto můžeme bez omezení pokračovat a dostaneme celou (O_n).

Funkci $F\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ nyní definujeme hodnotami

$$F(a_n) = b_n,\ n \in \mathbb{N}\ .$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné a $\delta = \min(d_n, |a_1 - a_n|, |a_2 - a_n|, \ldots, |a_{n-1} - a_n|)$. Podle konstrukce posloupnosti (O_n) pro každé racionální číslo $a \in P(a_n, \delta)$ je $(a, F(a)) \in O_n$. Podle výše uvedené vlastnosti omezovačů $F'(a_n) = f(a_n)$. □

Věta 5.4.3 (stejnoměrně spojitá funkce je derivací). *Nechť* $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ *je množina a* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *je stejnoměrně spojitá funkce. Pak existuje funkce* $F\colon M \to \mathbb{R}$*, že pro každý bilimitní bod* $a \in M$ *množiny* M *platí* $F'(a) = f(a)$*.*

Důkaz.

□

Věta 5.4.4 (Weierstrass, 18?? (Bolzano, 18??)). *Nechť* $g\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ *je 2-periodická pilovitá funkce, která pro* $x \in [2n-1, 2n+1]$*,* $n \in \mathbb{Z}$*, má hodnotu* $g(x) = |x - 2n|$*. Pak funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,*

$$f(x) = \sum (3/4)^n g(4^n x)\ ,$$

je spojitá, ale pro žádné $a \in \mathbb{R}$ *nemá vlastní derivaci* $f'(a)$*.*

Důkaz.

□

5.5 Taylorův polynom a Taylorova řada

Definice Taylorova polynomu a charakterizační věta pro něj.

Vlastní derivace $f'(a)$ dává lokální aproximaci funkce u a lineární funkcí. Vlastní n-tá derivace $f^{(n)}(a)$ dává lokální aproximaci funkce polynomem stupně nejvýše n.

Definice 5.5.1 (Taylorův polynom). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$,*

$$f\colon U(a,\,\delta) \to \mathbb{R}\ ,$$

$n \in \mathbb{N}_0$ a f má klasicky n-tou derivaci $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$, což pro $n = 0$ chápeme jako spojitost f v a. Taylorů polynom řádu n funkce f v bodě a je polynom

$$\begin{aligned} T_n^{f,a}(x) &:= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}\ . \end{aligned}$$

Úloha 5.5.2. *Pro $n \in \mathbb{N}$ dokažte polynomiální identitu*

$$\big(T_n^{f,a}(x)\big)' = T_{n-1}^{f',a}(x)$$

a pro $i = 0, 1, \ldots, n \in \mathbb{N}_0$ dokažte rovnosti $(T_n^{f,a}(x))^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$.

Lemma 5.5.3 (o polynomech). *Když $P \in \mathbb{R}[x]$ je polynom stupně nejvýše $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$ a*

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{(x-a)^n} = 0\ ,$$

pak $P(x)$ je identicky nulový polynom.

Důkaz. Nechť $P(x)$ není nulový polynom. Algebra nám říká (úloha 5.5.4), že potom pro nějaké $m \in \mathbb{N}_0$ s $m \le n$ a polynom $Q(x)$ s $Q(a) \ne 0$ máme (jednoznačné) vyjádření

$$P(x) = (x-a)^m Q(x)\ .$$

Tedy pro $x \to a$

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{Q(x)}{(x-a)^{n-m}} \not\to 0\ ,$$

protože $Q(x) \to Q(a) \ne 0$ a jmenovatel jde k 0 nebo k 1 ($n - m \ge 0$). □

Úloha 5.5.4. *Připomeňte si, jak se přesně v algebře formálně dokazuje, že každý nenulový polynom $P(x)$ má pro každé $a \in \mathbb{R}$ uvedené jednoznačné vyjádření.*

Věta 5.5.5 (charakterizace Taylorova polynomu). *Nechť $n \in \mathbb{N}_0$,*

$$f\colon U(a,\,\delta) \to \mathbb{R}$$

(kde $a, \delta \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$) a klasicky existuje n-tá derivace $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Taylorův polynom $T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom $P(x)$ stupně nejvýše n, pro nějž

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0\ .$$

Důkaz. Nejprve dokážeme, že $T_n^{f,a}(x)$ má uvedenou vlastnost. Postupujeme indukcí podle n. Pro $n = 0$ je $T_n^{f,a}(x) = f(a)$ konstantní polynom, pro který uvedená vlastnost platí dokonce ne jen v limitě, ale identicky. Nechť $n \geq 1$. Podle výše zmíněné identity, l'Hospitalova pravidla (jehož předpoklady jsou splněny) a indukčního předpokladu je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{\big(f(x) - T_n^{f,a}(x)\big)'}{\big((x-a)^n\big)'} = \frac{1}{n} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0 \ .$$

Nechť nyní $P(x)$ s $\deg P \leq n$ má uvedenou vlastnost. Pak ale podle aritmetiky limit funkcí, předpokladu a části 1 je

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0 + 0 = 0 \ .$$

Podle hořejší úvahy $P(x) - T_n^{f,a}(x)$ je nulový polynom a $P(x) = T_n^{f,a}(x)$. □

Jiný zápis aproximační vlastnosti Taylorova polynomu je pomocí symbolu *malé o*:

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + o((x-a)^n), \ x \to a \ ,$$

což přesně znamená, že *zbytek Taylorova polynomu* $R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$ jde pro $x \to a$ k nule řádově rychleji, než mocnina $(x-a)^n$:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0 \ .$$

Uvedeme ještě jednu variaci na věty o střední hodnotě, přesné vyjádření zbytku $R_n^{f,a}(x)$ pomocí derivací.

Věta (obecný tvar zbytku T. polynomu). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f, \varphi\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce, $n \in \mathbb{N}_0$, na $U(a,\delta)$ existují vlastní derivace $f^{(n+1)}, \varphi'$ a navíc na $U(a,\delta)$ je $\varphi' \neq 0$. Potom pro každé $x \in P(a,\delta)$ existuje číslo c ležící mezi a a x, že*

$$R_n^{f,a}(x) = f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{n! \cdot \varphi'(c)} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n \ .$$

Z časových důvodů větu nebudeme dokazovat. Konkrétní volbou funkce φ dostaneme následující vzorce pro $R_n^{f,a}(x)$:

Důsledek (zbytky T. polynomu). *Za předpokladů předchozí věty máme, pro nějaké číslo c mezi x a a,*

1. *Lagrangeův tvar zbytku*

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

a

2. Cauchyův tvar zbytku

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-a)}{n!} \ .$$

Důkaz. Stačí položit $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ a $\varphi(t) = t$. □

Taylorova řada. Má-li funkce v daném bodě všechny derivace, můžeme Taylorův polynom prodloužit do nekonečné řady.

Definice (Taylorova řada). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$, a pro každé $n = 0, 1, 2, \ldots$ existuje hodnota n-té derivace $f^{(n)}(a)$. Řadu*

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots$$

nazýváme Taylorovou řadou funkce f se středem v a.

Tato řada vždy konverguje pro $x = a$ a pak má součet $f(a)$. Pro mnoho funkcí se ale dá pomocí posledního důsledku dokázat více: pro každé x z jistého oboru je $\lim_{n\to\infty} R_n^{f,a}(x) = 0$, takže pro takové x má Taylorova řada součet rovný $f(x)$ a funkce je vyjádřena pomocí mocninné řady. Uvedeme seznam takových vyjádření, důkazy konvergence pro nedostatek času pomineme. Pro jednoduchost značení se omezíme na případ Taylorových řad se středem v nule, tj. $a = 0$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ .$$

Pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ je totiž $(e^x)^{(n)} = e^x$ a tedy vždy $f^{(n)}(0) = 1$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{a} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \ ,$$

protože $(\sin^{(n)} x)_{n\geq 0} = (\sin, \cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x, \cos x, \ldots)$ (derivace se opakují s periodou 4) a podobně pro derivace cosinu.

Užitečné jsou Taylorovy řady logaritmických funkcí:

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \quad \text{pro každé } x \in (-1,1] \\
\log(1-x) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{pro každé } x \in [-1,1) \\
\log(1-x)^{-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{pro každé } x \in [-1,1) \ .
\end{aligned}$$

Jako úlohu si spočtěte derivace $(\log(1+x))^{(n)}$ a ověřte koeficienty v těchto Taylorových řadách. Pro $x=1$ první řada dává známý součet

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots\ .$$

Úloha 5.5.6 (úloha z bakalářek). *Uveďte Taylorův rozvoj funkce* $\log(1+x)$ *se středem* $x=0$*. Vypočítejte limitu*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2(\log(x+1)-\log x)-x\right)\ .$$

Řešení. Jak víme, $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$, pro $|x|<1$. První část úlohy byla míněna i jako nápověda pro druhou část, že ona limita se dá spočítat (také) pomocí Taylorova rozvoje. Téměř nikdo se jí ale neřídil. Uvedeme dvě řešení.

Pomocí Taylorova rozvoje. Výraz přepíšeme v proměnné $y=\frac{1}{x}$, protože pak $y\to 0^+$ a rozvoj pro logaritmus máme jen u nuly:

$$x^2(\log(x+1)-\log x)-x = \frac{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)}{(1/x)^2} - \frac{1}{1/x} = \frac{\log(1+y)-y}{y^2}\ .$$

Protože $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ pro $y\to 0$, poslední výraz pro $y\to 0$ je

$$\frac{y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)-y}{y^2} = -\frac{1}{2}+o(1)$$

a hledaná limita se rovná $-\frac{1}{2}$. Můžeme si při této přílezitosti vzpomenout i na tvrzení 4.1.24 o limitě složené funkce.

Pomocí l'Hospitalova pravidla. Protože

$$x^2(\log(x+1)-\log x)-x = \frac{\log(x+1)-\log x - 1/x}{1/x^2} = \frac{0}{0} \ \text{ pro } x\to+\infty$$

$(\log(x+1)-\log x = \log(1+\frac{1}{x}) \to \log 1 = 0$ pro $x\to+\infty$, pro derivování ale samozřejmě necháme jako $\log(x+1)-\log x)$, zderivujeme čitatele i jmenovatele a dostaneme

$$\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \frac{x^3\left(x^2-x(x+1)+(x+1)\right)}{-2x^2(x+1)} = \frac{x}{-2(x+1)} \to -\frac{1}{2}$$

pro $x\to+\infty$. Podle l'Hospitalova pravidla (věta 5.3.26) se tedy i výchozí hledaná limita rovná $-\frac{1}{2}$. □

Bohužel byly často k vidění i chybné úpravy ve stylu

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\log(x+1)-\log x\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \lim_{x\to+\infty} \log(1+1/x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\cdot 0 = 0$$

(správná limita je $+\infty$), kdy se zapomíná, že $(+\infty)\cdot 0$ je neurčitý výraz, jenž se může rovnat čemukoli, a věta o aritmetice limit se tak nedá (a nesmí!) použít.

Pro každé $x \in (-1, 1]$ je

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{2n-1}\ .$$

Ověřte koeficienty v této Taylorově řadě jako úlohu. Pro $x = 1$ dává známý součet

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ .$$

Konečně pro každé $x \in (-1, 1)$ a $a \in \mathbb{R}$ je

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n\ , \quad \text{kde}\ \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}\ .$$

Tento rozvoj objevil anglický fyzik, filosof a matematik (alchymista, numerolog, ředitel mincovny, ...) *Isaac Newton (1642–1726)* (druhý spolutvůrce matematické analýzy). Pro $a \in \mathbb{N}_0$ dostáváme klasickou binomickou větu s konečným součtem, protože pak $\binom{a}{n} = 0$ pro $n > a$, ale pro $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}_0$ se binomický koeficient nikdy nevynuluje a Taylorova řada je nekonečná. Například pro $a = -1$ a $a = \frac{1}{2}$ dostáváme rozvoje

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \quad \text{(geometrická řada)}$$

a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-\frac{2n-3}{2})x^n}{n!} + \ldots$$

(stále $x \in (-1, 1)$).

Skončíme zajímavostí — souvislostí Taylorových řad s enumerativní kombinatorikou. Nechť p_n je počet těch permutací $a_1, a_2, \ldots, a_n$ čísel $1, 2, \ldots, n$, že $a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > \ldots$ (říká se jim *střídavé* či *cik-cak* či *nahoru-dolů* permutace). Například $p_4 = 5$ díky permutacím 1324, 1423, 2413, 2314 a 3412. Posloupnost počtů střídavých permutací začíná

$$(p_n)_{n\geq 0} = (1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, \ldots)\ .$$

Dá se dokázat, že pro x v okolí 0 platí rovnost

$$\tan x + \sec x = \tan x + \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n x^n}{n!}\ .$$

Důsledek 5.5.7 (střídavá harmonická řada).

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \log 2\ .$$

Důsledek 5.5.8 (střídavá lichá harmonická řada).

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}\ .$$

Důsledek 5.5.9 (převrácená prvočísla divergují). *Nechť P je množina prvočísel. Pak*

$$\sum_{p\in P}\frac{1}{p}=+\infty\ .$$

Důkaz.

$\square$

Věta 5.5.10 (kosinus a sinus analyticky). *Pro každé $t\in\mathbb{R}$ platí rovnosti*

$$\begin{aligned}\cos t &= 1+\sum\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}-\dots\\ \sin t &= \sum\frac{(-1)^{n-1}t^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^{2n-1}}{(2n-1)!}=t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}-\dots\ .\end{aligned}$$

Důkaz.

$\square$

Věta 5.5.11 (dokázaná nekonečná binomická věta). *Pro každé $x\in(-1,1)$ a každé $\alpha\in\mathbb{R}$ platí rovnost*

$$(1+x)^\alpha=1+\sum\binom{\alpha}{n}x^n$$

(jak víme, $\binom{\alpha}{n}=\frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha-i)$).

Důkaz.

$\square$

5.6 Chování systému n odpuzujících se částic

Newtonův zákon síly. Newtonův gravitační zákon. Coulombův zákon. Odpuzující se náboje. Zákon zachování energie. Reinova věta o odpuzujících se částicích.

V tomto oddílu předvedeme základní použití derivací funkcí, kdy se pomocí nich formulují zákony a pravidla řídící evoluci fyzikálních systémů. Jako ilustraci dokážeme výsledek G. Reina z r. 2017: každý systém n bodových nábojů shodného znaménka se eventuálně rozlétá do nekonečna po téměř přímočarých a rovnoměrných trajektoriích se vzájemně různými vektory rychlostí.

Začneme ale vztahem mezi silou působící na částici x s hmotností $m > 0$ a pohybem částice. Částice, která má zanedbatelnou velikost a můžeme ji považovat za „hmotný bod“, se pohybuje v čase $t \in \mathbb{R}$ v našem třírozměrném euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Její pohyb modelujeme zobrazením

$$x = x(t) = (x(t)_1,\, x(t)_2,\, x(t)_3)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\ .$$

Zobrazení v složené z derivací složek zobrazení x,

$$v = v(t) = \dot{x} = \dot{x}(t) := (x'(t)_1,\, x'(t)_2,\, x'(t)_3)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\ ,$$

udává časový vývoj vektoru rychlosti pohybu částice. Značení derivací tečkami pochází od I. Newtona. Podobně se značí $\ddot{x} = (x''(t)_1, x''(t)_2, x''(t)_3)$ a tak dál. Síla, ať už to fyzikálně znamená cokoli, je určité působení F na částici v čase, modelované opět jako zobrazení $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, které ovlivňuje její pohyb (či z něj vyplývá?) takto:

$$F(t) = m\dot{v}(t) = m\ddot{x}(t),\ t \in \mathbb{R}\ .$$

To je slavný a důležitý *Newtonův zákon síly*, který se zapisuje i jako $F = ma$, kde F znamená sílu, m hmotnost částice a a zrychlení jejího pohybu způsobené danou silou. Zrychlení se tedy rovná druhé derivaci polohy a první derivaci rychlosti a je přímo úměrné síle působící na částici a nepřímo úměrné její hmotnosti.

Newtonův gravitační zákon popisuje asi nejznámější druh síly: mezi dvěma částicemi (hmotnými body) x_1, x_2 s hmotnostmi $m, M > 0$ a vzdáleností $r > 0$ působí gravitační síla o velikosti

$$F = \kappa\frac{mM}{r^2}\ .$$

Zde $\kappa > 0$ je takzvaná *gravitační konstanta*, k níž se za chvíli vrátíme. Gravitace je tak přímo úměrná hmotnosti a nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti. To je onen *zákon převrácených čtverců* spojený s I. Newtonem, který původně objevil R. Hook. Před chvílí jsme ale napsali, že síla je třísložkový vektor. Jaký má tedy gravitační síla směr? Je to přitažlivá síla ve směru spojnice obou částic, takže přesně *gravitační zákon pro dvě částice* (v definici 5.6.7 ho uvádíme pro n částic s jednotkovými hmotnostmi a s $\kappa = 1$) zní:

$$\ddot{x}_1 = \kappa M\frac{x_2 - x_1}{\|x_1 - x_2\|^3} \ \text{ a } \ \ddot{x}_2 = \kappa m\frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|^3}\ .$$

Zde jsme použili zákon síly $F = ma$: v první rovnici jsme zkrátili m a ve druhé M. Místo čtverců máme kupodivu kuby, ale čtenářka hned vidí, že tím se právě zachycuje směr vektoru gravitační síly, na částici x_1 působí ve směru od x_1 k x_2 a na částici x_2 opačně a

$$\left\|\frac{x_2 - x_1}{\|x_1 - x_2\|^3}\right\| = \left\|\frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|^3}\right\| = \frac{1}{\|x_1 - x_2\|^2}\ .$$

Pro $x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}) \in \mathbb{R}^3$ označujeme jako $\|x_1\| \in [0, +\infty)$ euklidovskou normu,

$$\|x_1\| = \sqrt{x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2 + x_{1,3}^2}\ .$$

Její čtverec se zapíše skalárním součinem jako $\|x_1\|^2 = x_1 \cdot x_1$, kde

$$x_1 \cdot x_2 := \sum_{i=1}^{3} x_{1,i} x_{2,i}$$

(vlastností skalárního součinu opakujeme v úloze 5.8.3). Skalární součin a derivace souvisí následovně.

Úloha 5.6.1. *Nechť $x(t), y(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Spočtěte, že*

$$(x(t) \cdot y(t))' = \dot{x}(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot \dot{y}(t)\ .$$

Jakou velikost tedy má gravitační konstanta κ? Musíme pohovořit o fyzikálních jednotkách (a nebude to krátké). Hmotnosti $m, M, \ldots$ se měří v *kilogramech*, zkratka **kg**. Kilogram je jediná fyzikální jednotka, která je stále (v r. 2018) definovaná nikoli fyzikálním procesem ale pomocí prototypu. Tím je 39 mm vysoký i široký platino-iridiový váleček, tzv. Le Grand K, vyrobený v r. 1879 a uložený v Mezinárodním úřadu pro míry a váhy v Sèvres ve Francii. Srovnáváním s kopiemi se zjistilo, že za 100 let jeho hmotnost relativně poklesla o zlomek asi $50 \cdot 10^{-9}$. Není proto divu, že je (již od r. 2005) připravována nová definice kilogramu. Jednotka času *sekunda* se zkratkou **s**, česky *vteřina*, je definována jako doba trvání 9 192 631 770 period záření, které odpovídá přechodu mezi dvěma hladinami velmi jemné struktury základního stavu atomu cesia ^{133}Cs. Délka jednoho *metru*, zkratka **m**, je vzdálenost proběhnutá světlem ve vakuu za $\frac{1}{299792458}$ sekundy. Jednotkou síly je *newton*, zkratka **N**, síla, jež za dobu 1 s zvýší rychlost volné částice o hmotnosti 1 kg o 1 m/s. Takže

$$\mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}\ .$$

Je to definice založená na zákonu síly $F = ma$. Jednotkový rozměr konstanty κ plyne z gravitačního zákona a zákona síly. Měřením se dospělo k přibližné hodnotě

$$\kappa = (6.67408 \pm 0.00031) \cdot 10^{-11} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2}\ .$$

Je to hodnota tak malá, že gravitační působení běžných těles a předmětů kolem nás, ať by to byly hory či zaoceánské lodě, nepozorujeme. Samozřejmě, s výjimkou Země pod našima nohama a Měsíce a Slunce nad našimi hlavami (Měsíc a Slunce způsobují slapy, dmutí moře).

Úloha 5.6.2. *Jakou gravitační silou na sebe působí dva 1000 kg hmotné body vzdálené 1 cm? Z jakého materiálu byste je vyrobili? Necháme je pohybovat se ve vakuu proti sobě jen vlivem jejich přitahování, bez působení jiných rušivých sil. Odhadněte, za zhruba kolik vteřin se srazí.*

Úloha 5.6.3. *Realističtěji, jakou gravitační silou působí 250 tunový obelisk z Luxoru na náměstí Svornosti v Paříži na 100 kg turistu vzdáleného 10 m? Oba považujte za hmotné body. Necháme je pohybovat se ve vakuu jako v předchozí úloze. Dokažte, že za 15 minut se určitě nesrazí, ale za 11 hodin či dříve se jistě srazí.*

Vzhledem k rozpětí chyby u κ stojí za to uvést, že jiná základní konstanta přírody, rychlost světla ve vakuu c, byla definicí sekundy stanovena jako přesný celočíselný násobek m/s,

$$c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{přesně!}$$

Pohybům těles podle gravitačního zákona věnujeme alespoň jednu úlohu.

Úloha 5.6.4 (dvě planety bez slunce). *Uvažujme dvě planety x_1 a x_2, obě s hmotností 1 a pohybující se v rovině $z = 0$ podle vztahů*

$$x_1(t) = (\cos(ct), \sin(ct), 0) \quad a \quad x_2(t) = (-\cos(ct), -\sin(ct), 0), \; t \in \mathbb{R} \, ,$$

kde $c > 0$ je zatím neurčená konstanta (ne rychlost světla). Pro jednoduchost položíme $\kappa = 1$. Pro jaké c obíhají planety x_1 a x_2, které jsou v každém čase antipodální vzhledem k $(0,0,0)$ a pohybují se po jednotkové kružnici, v souladu s gravitačním zákonem? Jaká je pak jejich oběžná doba?

Varianta této úlohy se sluncem se nalézá v úloze 5.8.6.

Jinou silou, též známou z každodení zkušenosti a řídící se zákonem převrácených čtverců, je *coulombovská síla* mezi elektricky nabitými částicemi x_1 a x_2. Podle *Coulombova zákona* má velikost

$$F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \, .$$

Zde F je oznaménkovaná velikost síly (v newtonech), k_e je *Coulombova konstanta*, $r > 0$ je vzdálenost obou částic (v metrech) a q_i, $i = 1, 2$, jsou oznaménkované velikosti jejich nábojů — náboj může být kladný i záporný. Mají-li náboje obou částic opačná znaménka, je $F < 0$ a síla je přitažlivá, jsou-li znaménka shodná, $F > 0$ a síla je odpudivá. To představuje podstatný rozdíl oproti gravitaci, jež vždy jen přitahuje. Další rozdíl je, že konstanta k_e závisí na prostředí obklopujícím x_1 a x_2, kdežto gravitace proniká vším beze změny. Jednotkou náboje je nepřekvapivě *coulomb*, zkratka **C**, množství náboje přenesené za jednu sekundu (konstantním) proudem jednoho *ampéru*. Ampér, zkratka **A**, má pozoruhodnou silovou definici:

> Ampér je stálý elektrický proud, který při průchodu dvěma přímými rovnoběžnými nekonečně dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu umístěnými ve vakuu ve vzájemné vzdálenosti 1 metr vyvolá mezi nimi stálou sílu o velikosti $2 \cdot 10^{-7}$ newtonu na 1 metr délky vodiče.

Máme tu co do činění s další, už třetí, silou, se *silou magnetickou.* Pohybující se náboje v jednom vodiči vytvářejí magnetické pole působící na náboje ve druhém vodiči. Teorie elektromagnetismu a jej popisující Maxwellovy rovnice, kde jsou derivace funkcí opět stěžejní, však přesahují rámec tohoto textu. Zákon síly spolu s Coulombovým zákonem dávají pro konstantu k_e ve vakuu hodnotu

$$k_e \doteq 8.99 \cdot 10^9 \cdot \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{C}^{-2} \,.$$

Ve srovnání s gravitací jde o velmi vysokou hodnotu. Konstanta k_e je na tom nakonec po všech změnách definic jednotek stejně jako rychlost světla ve vakuu c, definicemi byla totiž stanovena na (jednotky vynecháváme)

$$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi(1/\mu_0 c^2)} = (8.9875517873681764\ldots) \cdot 10^9 \quad \text{přesně!}$$

Zde ε_0 je tzv. *permitivita vakua* a μ_0 tzv. *magnetická konstanta*, s definovanou hodnotou $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\mathrm{H/m}$ přesně. *Henry*, zkratka **H**, je jednotka indukčnosti, definovaná jako indukčnost obvodu, v němž změna elektrického proudu rovná jednomu ampéru za jednu sekundu vyvolá výsledné elektromotorické napětí o hodnotě jednoho voltu. *Volt*, zkratka **V**, je jednotka elektrického napětí (či potenciálu), definovaná jako velikost elektrického napětí na vodiči, kterým prochází konstantní proud jednoho ampéru, při kterém se na tomto vodiči rozptyluje výkon jednoho wattu. Jednotka výkonu *watt*, se zkratkou **W**, je výkon, při němž se vykoná práce jednoho joulu za jednu sekundu. Konečně jednotka energie a práce *joule*, se zkratkou **J**, je práce, kterou koná síla jednoho newtonu působící po dráze jednoho metru ve směru pohybu.

Úloha 5.6.5. *Ve vakuu (česky vzduchoprázdnu) umístíme jeden metr od sebe dvě železné krychličky o hraně 1 mm a předpokládáme, že atomy železa v nich jsou úplně ionizované, zbavené elektronů, a obě krychličky tak sestávají jen ze železných (kladně nabitých) atomových jader. Jakou coulombovskou silou se budou odpuzovat? Porovnejte ji s vahou celé Země. Potřebné materiálové konstanty vyhledejte na Internetu.*

Jednotka náboje nese jméno po francouzském fyzikovi a inženýrovi *Charlesi-Augustinu de Coulombovi (1736–1806)* (kromě elektromagnetismu se zabýval i pevnostním inženýrstvím a stavitelstvím, v letech 1764–1772 byl zodpovědný za vybudování pevnosti Port Bourbon, nyní Fort Desaix, ve Fort-de-France, hlavním městě Martiniku). Jednotce elektrického proudu dal jméno francouzský fyzik a matematik *André-Marie Ampère (1775–1836)* (v době jakobínského teroru byl jeho otec Jean-Jacques 24. 11. 1793 gilotinován, sám André-Marie se kromě elektromagnetismu zabýval i chemií a matematikou, v níž publikoval práce o pravděpodobnostní teorii her, parciálních diferenciálních rovnicích a variačním počtu).

Ve zbytku oddílu se věnujeme pohybu systému několika elektrických nábojů shodného znaménka, které se vzájemně odpuzují coulombovskou silou. Definujeme ho následovně.

Definice 5.6.6 (n odpuzujících se částic). *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Systémem n odpuzujících se částic rozumíme $2n$ reálných zobrazení*

$$x_i = x_i(t),\ v_i = v_i(t) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \ i = 1, 2, \dots, n\ ,$$

jejichž všech $6n$ složek má na $\mathbb{R}$ první derivace a ty splňují soustavu diferenciálních rovnic

$$\dot{x}_i = v_i,\ \ \dot{v}_i = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|^3},\ \ i = 1, 2, \dots, n\ .$$

Zatím jsme uvažovali jen dvojice částic (ať pro gravitaci či coulombovskou sílu), zde zobecňujeme pomocí *principu superpozice* na systém více částic: síla, jíž působí na danou částici x ostatní částice $y, z, \dots$, je (vektorovým) součtem sil působících na x ve dvojicích (x, y), (x, z), $\dots$. Pro coulombovskou sílu tento princip ve vakuu platí. Protože jde o odpudivou sílu, máme v čitateli rozdíl $x_i - x_j$, systém ovládaný gravitací by měl $x_j - x_i$. Pro účely odkazování a úloh tento systém zaznamenáme.

Definice 5.6.7 (n přitahujících se se částic). *Systémem n přitahujících se částic rozumíme $2n$ reálných zobrazení jako v předešlé definici, kde v soustavě na pravých stranách v čitatelích rozdíl $x_i - x_j$ nahradíme rozdílem $x_j - x_i$*

V definici 5.6.6 dále předpokládáme, že na částice nepůsobí jiné síly než coulombovské (ve skutečnosti by pohybující se náboje budily i magnetické síly a ovlivňovala by je i velice slabá gravitace a možná i jiné síly), že každá částice má hmotnost 1 a že, pro jednoduchost, $k_e = 1$. Naším cílem je věta 5.6.12 níže, která popisuje vývoj tohoto systému v čase $t \to +\infty$. K tomuto cíli nejprve odvodíme, že energie systému se zachovává.

Tvrzení 5.6.8 (zákon zachování energie). *Nechť $x_i, v_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ je systém n odpuzujících se částic z definice 5.6.6. Potom funkce $E \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, definovaná jako*

$$E = E(t) = E_k(t) + E_p(t) := \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2 + \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n} \frac{1}{\|x_i - x_j\|}\ ,$$

je konstantní.

Důkaz. Ukážeme, že $E'(t) = 0$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. S využitím soustavy v definici 5.6.6 máme

$$\left(\|v_i\|^2\right)' = (v_i \cdot v_i)' = 2(v_i \cdot \dot{v}_i) = 2 \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{v_i \cdot x_i - v_i \cdot x_j}{\|x_i - x_j\|^3}\ .$$

Sečtením přes $i = 1, 2, \dots, n$ a sloučením dvou zlomků se jmenovatelem $\|x_i - x_j\|^3 = \|x_j - x_i\|^3$ dostaneme pro každou dvoubodovku $\{i, j\}$ příspěvek

$$2\frac{v_i \cdot x_i - v_i \cdot x_j + v_j \cdot x_j - v_j \cdot x_i}{\|x_i - x_j\|^3}\ .$$

Podobně (opět díky $\dot{x}_i = v_i$)

$$\left(\frac{1}{\|x_i - x_j\|}\right)' = \frac{-(\sqrt{(x_i - x_j) \cdot (x_i - x_j)})'}{\|x_i - x_j\|^2} = -\frac{(x_i - x_j) \cdot (v_i - v_j)}{\|x_i - x_j\|^3} \ .$$

Roznásobením skalárních součinů, sečtením přes všechny dvojice různých čísel i, j a sloučením dvou příspěvků od i, j a j, i máme pro dvoubodovku $\{i, j\}$ opačný příspěvek

$$\begin{aligned} & -\frac{x_i \cdot v_i + x_j \cdot v_j - x_i \cdot v_j - x_j \cdot v_i}{\|x_i - x_j\|^3} - \frac{x_j \cdot v_j + x_i \cdot v_i - x_j \cdot v_i - x_i \cdot v_j}{\|x_j - x_i\|^3} \\ & = -2\frac{x_i \cdot v_i + x_j \cdot v_j - x_i \cdot v_j - x_j \cdot v_i}{\|x_i - x_j\|^3} \ . \end{aligned}$$

Vše se proto sečte na 0. □

Zde E_k je *kinetická energie* systému a E_p je jeho *potenciální energie*. Přesněji, jsou to jejich dvojnásobky (ano, správně $E_k = \frac{1}{2}mv^2$), definici jsme si upravili pro zjednodušení výpočtů. Jinou zachovávající se veličinu systému představuje *hybnost*.

Úloha 5.6.9 (zákon zachování hybnosti). *Dokažte, že v situaci definice 5.6.6 i zobrazení $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definované jako*

$$H = H(t) := \sum_{i=1}^{n} v_i \ ,$$

je konstantní.

Pro ilustraci pohybu podle definice 5.6.6 jsme chtěli uvést něco jednoduchého a hezkého jako v úloze 5.6.4, ale nepovedlo se nám to nalézt. Uvádíme proto alespoň následující důsledek a jeho pokračování v úloze 5.8.4.

Důsledek 5.6.10 (dva shodné náboje). *Předpokládejme, že x_1 a x_2 je systém dvou odpuzujících se částic podle definice 5.6.6 (tedy $n = 2$) a že splňuje*

$$x_1(0) = (-0.5, 0, 0),\ v_1(0) = v_2(0) = (0, 0, 0) \ \ a \ \ x_2(0) = (0.5, 0, 0) \ .$$

Úloha 5.8.4 ukazuje, že takové částice existují a že v čase $t \geq 0$ mají polohu $x_1 = (-X(t), 0, 0)$ a $x_2 = (X(t), 0, 0)$ pro jistou funkci $X(t) \geq 1/2$ (popsanou v úloze 5.8.4) jdoucí pro $t \to +\infty$ monotónně do $+\infty$. Pak tvrdíme, že vektory rychlostí se rovnají

$$v_1(t) = (-\sqrt{1 - 1/2X(t)}, 0, 0) \ \ a \ \ v_2(t) = (\sqrt{1 - 1/2X(t)}, 0, 0) \ .$$

Pro $t \to +\infty$ tedy obě částice od sebe odlétají po ose x stejně velkými ale opačně směřujícími rychlostmi, jejichž velikosti se zdola blíží k 1.

Důkaz. Ze symetrie (či úlohy 5.6.9) máme $v_1 = -v_2$ a $x_1 = -x_2$ pro každé t. Též je jasné, že se obě částice pohybují po ose x. Podle tvrzení 5.6.8 pro $t \ge 0$ máme

$$E(t) = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \frac{1}{\|x_1 - x_2\|} + \frac{1}{\|x_2 - x_1\|} = 2\|v_1\|^2 + \frac{1}{\|x_1\|} = E(0) = 2\ .$$

Řešení pro $\|v_1\|$ dává uvedené vyjádření rychlostí. □

Důkaz věty 5.6.12 spočívá na následujícím výsledku o derivacích.

Tvrzení 5.6.11 (klíčový krok). *Nechť funkce $f\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ má vlastní první derivaci. Pak*

$$\text{když}\ \ \forall\, t \ge 1\colon f'(t) \le \frac{f(t)}{t},\quad \text{potom}\ \ \forall\, t \ge 1\colon f(t) \le f(1)t\ .$$

Důkaz. Je prostý. Pro každé $t \ge 1$ podle předpokladu máme

$$\left(\frac{f(t)}{t}\right)' = \frac{f'(t)t - f(t)}{t^2} = \frac{f'(t) - f(t)/t}{t} \le 0\ .$$

Funkce $f(t)/t$ proto na $[1,+\infty)$ neroste a $f(1) = f(1)/1 \ge f(t)/t$ pro každé $t \ge 1$. □

Nyní už konečně slibovaná věta.

Věta 5.6.12 (Rein, 2017). *Nechť x_i, $v_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ je systém n odpuzujících se částic z definice 5.6.6. Potom existují konstanty $0 < c < d$ a n různých vektorů $v_1^*, \dots, v_n^* \in \mathbb{R}^3$, že pro každé reálné $t \ge 1$ a $i, j \in [n]$, $i \ne j$, je*

$$ct < \|x_i(t) - x_j(t)\| < dt$$

a pro $t \to +\infty$ a každé $i \in [n]$ máme $v_i(t) \to v_i^*$ (tj. $\|v_i(t) - v_i^*\| \to 0$) a

$$\|x_i(t) - (x_i(1) + tv_i^*)\| = o(t)\ .$$

Chybový člen $o(t)$ lze odhadnout silněji jako $O(\log(t+1))$.

Trajektorie i-té částice se tak od rovnoměrné a přímočaré trajektorie $x_i(1) + tv_i^*$ odchyluje o relativní chybu jdoucí pro $t \to +\infty$ dosti rychle k 0.

Úloha 5.6.13. *Dokažte, že věta platí pro $n = 1$, dokonce s chybou $o(t) = 0$, protože jediná částice letí rovnoměrně a přímočaře.*

Důkaz. Horní odhad $\|x_i(t) - x_j(t)\| = O(t)$ pro $t \ge 1$ hned plyne ze zachování energie v tvrzení 5.6.8: rychlosti jsou omezené, pro každé $t \in \mathbb{R}$ a $i \in [n]$ je $\|v_i\| = \|v_i(t)\| \le \sqrt{E(0)}$, a podle věty střední hodnotě (použité v každé ze tří složek) tedy $\|x_i\| = \|x_i(t)\| = O(t)$ pro $t \geq 1$. Trojúhelníková nerovnost dává uvedený odhad.

Abychom dokázali dolní odhad a zbytek věty, použijeme veličiny

$$F(t) := \sum_{i=1}^{n} \|v_i(t) - (1/t)x_i(t)\|^2 \ (t \neq 0) \ \text{ a } \ I(t) := \sum_{i=1}^{n} \|x_i(t)\|^2 \ .$$

Po roznásobení skalárního součinu vidíme, že $F(t) = E_k(t) - (1/t)I'(t) + (1/t^2)I(t)$ (E_p a E_k jsou definované v tvrzení 5.6.8). Klíčová je identita

$$\big(t^2F(t) + t^2E_p(t)\big)' = tE_p(t) \ .$$

Skutečně,

$$\begin{aligned} I''(t) &= \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\cdot v_i(t)\right)' \\ &= 2E_k(t) + 2\sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n} x_i(t)\cdot \frac{x_i(t)-x_j(t)}{\|x_i(t)-x_j(t)\|^3} \\ &= 2E_k(t) + E_p(t) = 2E(t) - E_p(t) \end{aligned}$$

(pro zdůvodnění poslední rovnosti viz úloha 5.6.14) a odtud s pomocí konstantnosti energie dostáváme

$$\begin{aligned} \big(t^2F(t) + t^2E_p(t)\big)' &= \big(t^2E(t) + I(t) - tI'(t)\big)' \\ &= 2tE(t) - t(2E(t) - E_p(t)) \\ &= tE_p(t) \leq \frac{t^2F(t) + t^2E_p(t)}{t} \ (t > 0) \ , \end{aligned}$$

protože $F(t) \geq 0$. Podle tvrzení 5.6.11 pro každé $t \geq 1$ máme

$$t^2E_p(t) \leq t^2F(t) + t^2E_p(t) \leq (F(1) + E_p(1))\cdot t \ .$$

Tedy pro každé $t \geq 1$ je

$$E_p(t) \leq \frac{C}{t} \ ,$$

kde $C = F(1) + E_p(1) > 0$ (podle úlohy 5.6.13 lze předpokládat, že $n \geq 2$) je konstanta. Odtud podle definice E_p máme dolní odhad $\|x_i(t) - x_j(t)\| \gg t$ pro $t \geq 1$ (a $i \neq j$). Takže podle definice 5.6.6 pro $t \geq 1$ a $i \in [n]$ máme

$$\|\dot{v}_i\| = \left\| \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{x_j - x_i}{\|x_j - x_i\|^3} \right\| \leq \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{1}{\|x_j - x_i\|^2} \ll t^{-2} \ .$$

S pomocí věty o střední hodnotě (použité na tři složky zobrazení v_i) pro každé dva časy $t' \geq t \geq 1$ máme cauchyovskost

$$\|v_i(t) - v_i(t')\| \ll t^{-1} \ .$$

Tedy existuje limita $v_i^* := \lim_{t\to+\infty} v_i(t) \in \mathbb{R}^3$ a pro $t' \to +\infty$ a pevné $t \geq 1$ máme týž odhad pro konvergenci k ní,

$$\|v_i(t) - v_i^*\| \ll t^{-1} .$$

Pro $t \geq 1$ napíšeme polohu $x_i(t)$ jako výraz

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_i(1) + tv_i^* + \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor}(x_i(k+1) - x_i(k) - v_i^*) \\ &\quad + (x_i(t) - x_i(\lfloor t \rfloor + 1)) - (t - \lfloor t \rfloor)v_i^* \end{aligned}$$

(postupujeme krkolomně, protože ještě neumíme integrovat). Sčítanec v sumě označíme jako s_k. Věta o střední hodnotě a odhad konvergence $v_i(t)$ k v_i^* dávají

$$\|s_k\| \ll k^{-1}$$

(úloha 5.6.15). Poslední a předposlední sčítanec ve výrazu pro $x_i(t)$ jsou v normě omezené (vzhledem k omezenosti rychlostí), takže

$$\|x_i(t) - (x_i(1) + tv_i^*)\| \leq \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor}\|s_k\| + O(1) \ll \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor}\frac{1}{k} < \log(t+1) .$$

Pokud by pro nějaké $i, j \in [n]$, $i \neq j$, bylo $v_i^* = v_j^*$, dostaneme se do sporu s dolním odhadem $\|x_i(t) - x_j(t)\| \gg t$ pro $t \geq 1$. Limitní vektory rychlostí jsou tedy vzájemně různé. $\square$

Úloha 5.6.14. *Dokažte, že*

$$2\sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n} x_i(t) \cdot \frac{x_i(t) - x_j(t)}{\|x_i(t) - x_j(t)\|^3} = \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n} \frac{1}{\|x_i(t) - x_j(t)\|} .$$

Úloha 5.6.15. *Pro $k \in \mathbb{N}$ odvoďte odhad*

$$\|x_i(k+1) - x_i(k) - v_i^*\| \ll k^{-1} .$$

Úloha 5.6.16. *V důsledku 5.6.10 rychlosti v čase $t = 0$ změníme na $v_1(0) = v_2(0) = (0, 1, 1)$. Jaká bude poloha částic $x_i(t)$, $i = 1, 2$, v čase $t > 0$?*

5.7 Barvinokovo počítání

5.8 Poznámky a další úlohy

Oddíl 5.1. J. Obdržálek v učebnici [107, Dodatek A.1 „Primitivní funkce $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ aneb matematik vs. fyzik“] popisuje matematikův a fyzikův výpočet primitivní funkce k $1/x$, viz úloha 5.8.1.

Oddíl 5.2. Jak jsme uvedli již tam, důkaz věty je převzat z [90, str. 35–39]. První ji dokázal H. Lebesgue v [91] a pak G. Faber v [42]. E. Landau ji zahrnul do své monografie [90], která vyšla poprvé v r. 1916, podruhé v r. 1929 a kterou v r. 1986 zrevidoval a rozšířil D. Gaier. E. Landau v [90, poznámka 6) pod čarou na str. 10] k prezentovanému důkazu poznamenal: „FABER **3**, S. 381. Der FABERSCHE Beweis mußte in vielen Punkten berichtigt werden und konnte verkürzt werden.“.

Oddíl 5.4. Preiss a Tartagliová [115] dokázali větu, že množina derivací

$$\mathcal{D} := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f = F' \text{ pro nějakou } F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

je vzorově definovatelná (viz úlohy **??** a **??**). Znamená to, že každou $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jež není derivací ($f \notin \mathcal{D}$), odlišuje vzorem od všech derivací nějaká podmnožina $E \subset \mathbb{R}$: pro každou $g \in \mathcal{D}$ je $f^{-1}(E) \neq g^{-1}(E)$. Český matematik *David Preiss (1947)* () působí od r. 1990 ve Velké Británii, nejprve na University College London a pak na Univerzitě ve Warwicku.

Oddíl 5.6. Zajímavé knihy o fyzice, které matematika přiučí fyzice, fyzikálnímu pojetí matematické analýzy a jejím fyzikálním aplikacím, jsou Jex, Štoll a Tolar [73], Kulhánek [88], Macháček [94], J. Obdržálek [107] a zejména epopej Feynmanových přednášek z fyziky [45, 46, 47] (Feynmanův životopis sepsali Mehra [99] i Gleick [53]). Odtud a také z Wikipedie jsme čerpali fyzikální údaje a inspiraci. Síla ovlivňuje pohyb, avšak tak zvané *nepravé síly* naopak povstávají z pohybu ([45, str. 180]), například odstředivá síla v rotující neinerciální vztažné soustavě. I když je gravitační přitažlivost běžných objektů slabá, jemnými pokusy ji lze zaznamenat a změřit. Poprvé a dosti přesně se to podařilo H. Cavendishovi v letech 1797–98 ([45, str. 102], [94, str. ?], [165]). Princip superpozice obecně neplatí pro coulombovské síly ve hmotném prostředí ([94, str. ?]) a neplatí ani pro „správný“ gravitační zákon v obecné teorii relativity ([45, str. 178]). Větu 5.6.12 jsme zpracovali podle Reinova preprintu [123], v důkazu jsme ale řešení diferenciální rovnice nahradili jednodušším tvrzením 5.6.11.

Věta 5.6.12 rigorózně potvrzuje intuici, že každý systém odpuzujících se částic (definice 5.6.6 i zobecnění s různými hmotnostmi) se vyvíjí očekávaným fádním způsobem, částice od sebe odlétají po těměř přímočarých a rovnoměrných trajektoriích. Pro přitahující se částice (definice 5.6.7 i zobecnění s různými hmotnostmi) je ovšem situace naprosto jiná, jak nakonec ukazují už úlohy 5.6.4 a 5.8.6. Klasické je samozřejmě newtonovské řešení problému dvou těles, které v typickém případě obíhají kolem těžiště po koplanárních elipsách, viz [73, kapitola 4.4 a 4.7], [88, kapitola 1.4.3] a [45, kapitola 7]. Gravitace ale umožňuje spoustu mnohem složitějších „choreografií“ částic tančících kolem sebe, příklady se naleznou v článcích Montgomeryho [104, 105] a Montaldiho a Stecklesové [103].

Další úlohy

Úloha 5.8.1. *Prostudujte kapitolu [107, Dodatek A.1] v učebnici J. Obdržálka tvrdící, zhruba řečeno, že matematik a fyzik vypočítají primitivní funkci k $1/x$ každý jinak. Uvedený „paradox“ pak vysvětlete.*

Úloha 5.8.2. *Ukažte, že pro každou derivaci* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(tedy* $f = F'$ *pro nějakou* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*) existují takové spojité funkce* $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *že pro každé* $a \in \mathbb{R}$ *je*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)\ .$$

Úloha 5.8.3 (vlastnosti skalárního součinu). *Dokažte, že pro* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *a* $a \in \mathbb{R}$ *je (*$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$*)*

$$x \cdot y = y \cdot x,\ \ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{a} \quad x \cdot ay = a(x \cdot y)\ .$$

Úloha 5.8.4 (dva shodné náboje, pokračování). *Zde popíšeme zobrazení* x_1 *a* x_2 *řešící důsledek 5.6.10 — pohyb dvou shodných nábojů s jednotkovými hmotnostmi při* $k_e = 1$, *nacházejících se v čase* $t = 0$ *v klidu ve vzdálenosti* 1.

Úloha 5.8.5. *Nechť* $x_i(t)$ *(a* $v_i(t) = \dot{x}_i(t)$*),* $i = 1, 2, \ldots, n$, *jsou částice splňující definici 5.6.6 a* $\alpha_i(t) = a_i t + b_i$ *s* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ *je lineární transformace času vedoucí k novým* n *částicím* $y_i(t) := x_i(\alpha_i(t))$. *Pro které hodnoty koeficientů* a_i, b_i *tyto nové částice určitě také splňují definici 5.6.6? Jaký je fyzikální výklad takové transformace času?*

Úloha 5.8.6 (dvě planety se sluncem). *V úloze 5.6.4 přidáme třetí planetu, vlastně slunce,* $x_3(t)$ *splňující* $x_3(0) = v_3(0) = (0, 0, 0)$. *Pro které* c *se teď celá sluneční soustava pohybuje v souladu s gravitačním zákonem, tedy podle definice 5.6.7? Jaká je potom oběžná doba planet* x_1 *a* x_2*?*

Úloha 5.8.7 (deska a bod). *V* $\mathbb{R}^3$ *je v rovině* $z = 0$ *umístěna nekonečná velmi tenká deska* D *s hustotou* μ kg/m^2 *a ve vzdálenosti* $a > 0$ *metrů od ní, například v bodě* $(0, 0, a)$, *leží částice o hmotnosti jednoho kilogramu. Vypočítejte gravitační přitažlivost mezi deskou a částicí v newtonech. (*D *aproximujte souborem částic.)*

Kapitola 6

Reálná čísla jako nekonečné desetinné rozvoje

V poslední kapitole, která představuje nejpůvodnější část skript, rozvineme oddíl 1.7 a vybudujeme reálná čísla a aritmetické operace s nimi na základě nekonečných desetinných rozvojů. Dokážeme větu 1.7.20 a tvrzení 1.7.21. Pro pohodlí čtenářky v oddílu 6.1 zopakujeme, co vlastně budeme dokazovat.

6.1 Úvod

Připomenutí R, $\mathbb{R}$ a aritmetických operací na $\mathbb{R}$ z oddílu 1.7.

Množinu reálných čísel jsme v oddílu 1.7 definovali jako $\mathbb{R} = R/\sim$, kde R jsou *rozvoje*, oznaménkované nekonečné posloupnosti

$$\pm a_0 a_1 a_2 \cdots = \pm a_0.a_1 a_2 \ldots,\ a_n \in \mathbb{N}_0\ ,$$

s $0 \le a_n \le 9$ pro $n \in \mathbb{N}$ (a_n jsou *cifry* rozvoje), a $\sim$ je ekvivalence ztotožňující

$$+0.00\cdots \sim -0.00\ldots,\ +v99\cdots \sim +(v+1)00\ldots \ \text{ a } \ -v99\cdots \sim -(v+1)00\ldots\ ,$$

kde v je libovolný konečný neprázdný počáteční úsek rozvoje, který pro délku alespoň 2 nekončí devítkou, a $v+1$ znamená zvětšení jeho poslední cifry o 1.

Na $\mathbb{R}$ jsme zavedli aritmetické operace a lineární uspořádání. Toto lineární uspořádání je lexikografické a odvozené z obvyklého uspořádání na $\mathbb{N}_0$, s nejvýznamnější cifrou a_0, druhou nejvýznamnější a_1, atd. (a samozřejmě $-r < +s$ a $-r < -s \iff +r > +s$ pro každé $\pm r, \pm s \in R$). V úloze 1.7.17 jsme již dokázali (řekněme), že jde o ostré lineární uspořádání na R a že se přenáší na ostré lineární uspořádání na $\mathbb{R}$. Ve větě 1.7.30 jsme také dokázali, že $(\mathbb{R}, <)$ je úplné uspořádání, to jest každá neprázdná a shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Aritmetické operace jsme na $\mathbb{R}$ zavedli pomocí *zkrácení* a *formálních limit.* Zkrácení je rozvoj, jehož cifry jsou od určitého místa nuly. Zkrácení rozvoje $a = \pm a_0 a_1 a_2 \cdots \in R$ na n-tém místě, $n \in \mathbb{N}_0$, je rozvoj

$$a \,|\, n := \pm a_0 \ldots a_n 00 \ldots$$

vzniklý náhradou $n+1$-té a dalších cifer nulami, se zachováním znaménka. Dvě zkrácení umíme sečíst a vynásobit, neboť je chápeme i jako zlomky,

$$\pm a_0 \ldots a_n 00 \cdots = \pm \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i 10^{-i} \in \mathbb{Q}\ .$$

Naopak každý zlomek se jmenovatelem rovným mocnině deseti je vlastně i zkrácení.

Lemma 6.1.1. *Nechť $a, b \in R$ jsou dva rozvoje.*

1. *Když $a \sim b$, tak $a \,|\, n - b \,|\, n \to 0$ pro $n \to \infty$.*
2. *Když $a \not\sim b$, tak existují $k, n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \ge n_0$ je*

$$|a \,|\, n - b \,|\, n| > \frac{1}{k}\ .$$

Důkaz. 1. Z definice $\sim$ plyne, že pro $a \sim b$ se pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ rozdíl $a \,|\, n - b \,|\, n$ rovná 0 nebo $\pm 10^{-n}$.

2. Nechť $a \not\sim b$ a $k \in \mathbb{N}_0$ je první index, že $a_k \ne b_k$. Pokud k neexistuje, mají a a b různá znaménka a jako l označíme index první (společné) nenulové cifry, jenž existuje. Pak $|a \,|\, n - b \,|\, n| \ge 10^{-l}$ pro každé $n \ge l$. Když k existuje a a a b mají různá znaménka, pak $|a \,|\, n - b \,|\, n| \ge 10^{-k}$ pro každé $n \ge k$. Nechť k existuje a a a b mají totéž znaménko. Pokud $|a_k - b_k| \ge 2$, máme $|a \,|\, n - b \,|\, n| > 10^{-k}$ pro každé $n \ge k$. Pokud $a_k - b_k = 1$, jako $l > k$ označíme první další index, že $a_l \ne 0$ nebo $b_l \ne 9$ (l existuje). Pak $a \,|\, n - b \,|\, n > 10^{-l}$ pro každé $n \ge l$. □

Úloha 6.1.2. *Zesilte druhou část předchozího lemmatu.*

Posloupnost rozvojů $(a^{(n)}) \subset R$ *formálně konverguje*, když se znaménko v $a^{(n)}$ od jistého indexu dále stabilizuje a když totéž platí pro každou k-tou cifru $a_k^{(n)}$. Rozvoj a s tímto stabilizovaným znaménkem a těmito stabilizovanými ciframi jsme nazvali *formální limitou* posloupnosti $a^{(n)}$ (v R),

$$\lim a^{(n)} := a \in R\ .$$

Posloupnost rozvojů $(a^{(n)}) \subset R$ má *formální limitu v* $\mathbb{R}$, když je $(a^{(n)})$ sjednocením dvou formálně konvergentních podposloupností s formálními limitami a a b splňujícími $a \sim b$. Pak jsme položili

$$\lim_{\mathbb{R}} a^{(n)} := [a] = [b] \in \mathbb{R} \quad \text{(blok ekvivalence $\sim$ obsahující a resp. b)}\ .$$

Součet $a+b$ a součin $ab = a \cdot b$ dvou reálných čísel reprezentovaných rozvoji $a = \pm a_0 a_1 a_2 \ldots$ a $b = \pm b_0 b_1 b_2 \ldots$ jsme definovali jako formální limity v $\mathbb{R}$

$$a + b := \lim_{\mathbb{R}} (a \,|\, n + b \,|\, n) \ \text{ a } \ ab := \lim_{\mathbb{R}} (a \,|\, n)(b \,|\, n) \ .$$

Věta 1.7.20 tvrdí, že $\mathbb{R}$ s tímto sčítáním, násobením a uspořádáním je úplné uspořádané těleso, a tvrzení 1.7.21 říká, že jeho prvotěleso, to jest kopie $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$, je tvořeno právě periodickými rozvoji. Dokážeme to.

6.2 Korektnost sčítání a násobení

Aritmetické operace $a+b$ a ab ($a, b \in R$) na $\mathbb{R}$ — definované formálními limitami v $\mathbb{R}$ posloupností výsledků těchto operací na zkráceních rozvojů a a b — jsou korektně definovány.

Ukážeme, že pro každé dva rozvoje $a, b \in R$ má posloupnost součtů $(c_n) := (a \,|\, n + b \,|\, n)$ i součinů $(d_n) := ((a \,|\, n)(b \,|\, n))$ formální limitu v $\mathbb{R}$. Plyne to z následujících dvou lemmat.

Lemma 6.2.1. *Platí následující.*

1. *Posloupnosti zkrácení (c_n) a (d_n) jsou cauchyovské.*
2. *Má-li posloupnost zkrácení $(a^{(n)})$ formální limitu v $\mathbb{R}$, je cauchyovská.*

Důkaz. 1. Pro každé $m \le n$ z $\mathbb{N}$ a rozvoj a máme nerovnost

$$|a \,|\, n - a \,|\, m| = \frac{a_{m+1}}{10^{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} < \frac{9}{10^{m+1}} + \frac{9}{10^{m+2}} + \cdots = \frac{1}{10^m} \ .$$

Tedy pro $m \le n$ máme $|c_m - c_n| \le 2/10^m$ a $|d_m - d_n| = |(a \,|\, m)(b \,|\, m) - (a \,|\, n)(b \,|\, n)| \le |a \,|\, m| \cdot |b \,|\, m - b \,|\, n| + |a \,|\, m - a \,|\, n| \cdot |b \,|\, n| \le (a_0 + b_0 + 2)/10^m$, což je cauchyovskost.

2. Toto plyne také z předchozí nerovnosti a z části 1 lemmatu 6.1.1. □

Následující lemma je stěžejní.

Lemma 6.2.2. *Každá cauchyovská posloupnost zkrácení má formální limitu v $\mathbb{R}$. Podrobněji, když je $(a^{(n)}) \subset R, \mathbb{Q}$ posloupnost zkrácení, která je cauchyovská ale formálně nekonverguje, potom je $(a^{(n)})$ sjednocením dvou formálně konvergentních podposloupností s různými ale ekvivalentními formálními limitami.*

Důkaz. Když je $(a^{(n)})$ cauchyovská ale formálně nekonverguje, nestabilizuje se některá cifra nebo se nestabilizuje znaménko. Začneme prvním případem a jako $k \in \mathbb{N}_0$ označíme nejmenší index nestabilizující se cifry. $A \subset \mathbb{N}_0$ buďte cifry, které se jako $a_k^{(n)}$ vyskytují pro nekonečně mnoho n. Máme $|A| \ge 2$, pro $k \ge 1$ z omezenosti $a_l^{(n)} \le 9$ a pro $k = 0$ z omezenosti $a_0^{(n)}$ plynoucí z cauchyovskosti

$(a^{(n)})$. Vezmeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak velké, že $a_j^{(n_0)} = a_j^{(n_0+1)} = \dots$ pro každé $0 \le j < k$ a $a_k^{(n_0)}, a_k^{(n_0+1)}, \dots \in A$. Protože

$$|a^{(n_1)} - a^{(n_2)}| \ge |a_k^{(n_1)} - a_k^{(n_2)}|10^{-k} - 10^{-k}$$

pro každé $n_1, n_2 \ge n_0$, můžeme předpokládat, že $A = \{c, c+1\}$, jinak nastane spor s cauchyovskostí $(a^{(n)})$. Mají-li navíc $a^{(n_1)}$ a $a^{(n_2)}$ různé znaménko, platí zesílení poslední zvýrazněné nerovnosti, kde výraz $|\cdot - \cdot|$ vpravo nahradíme výrazem $\cdot + \cdot$ a poslední člen -10^{-k} pomineme. Můžeme tak předpokládat, aby nevznikl spor s cauchyovskostí $(a^{(n)})$, že všechna zkrácení $a^{(n_0)}, a^{(n_0+1)}, \dots$ mají stejné znaménko. Nechť se znaménka shodují, třeba na $-$, a nechť $a_k^{(n_1)} = c$ a $a_k^{(n_2)} = c + 1$. Pak použijeme jiné zesílení poslední zvýrazněné nerovnosti: poslední člen -10^{-k} vpravo nahradíme členem $-10^{-k} + 10^{-l}$, kde $l \in \mathbb{N}$, $l > k$, je první index, že $a_l^{(n_1)} \ne 9$ nebo $a_l^{(n_2)} \ne 0$ (takové l vždy existuje). Abychom ani pak nedostali spor s cauchyovskostí $(a^{(n)})$, musí být $l \to \infty$ pro $\min(n_1, n_2) \to \infty$. To ale znamená, že podposloupnost $a^{(n)}$ s $a_k^{(n)} = c$ formálně konverguje k rozvoji $-a_0^{(n_0)} \dots a_{k-1}^{(n_0)} c99 \dots$ a doplňková podposloupnost $a^{(n)}$ s $a_k^{(n)} \ne c$ formálně konverguje k ekvivalentnímu rozvoji $-a_0^{(n_0)} \dots a_{k-1}^{(n_0)}(c+1)00 \dots$. V tomto případě má tedy $(a^{(n)})$ formální limitu v $\mathbb{R}$, jak se tvrdí.

Podíváme se na zbylý případ, kdy se každá cifra v $(a^{(n)})$ nakonec stabilizuje ale znaménko nikoli. Když uvážíme výše uvedené zesílení zvýrazněné nerovnosti pro různá znaménka (zkrácení vlevo), vidíme, aby nevznikl spor s cauchyovskostí $(a^{(n)})$, že se každá cifra musí stabilizovat na hodnotě 0. Pak ale $(a^{(n)})$ snadno rozdělíme na dvě podposloupnosti, jedna s formální limitou $+00\dots$ a druhá $-00\dots$, takže $(a^{(n)})$ má opět formální limitu v $\mathbb{R}$. □

Operace $+$ a $\cdot$ tak máme řádně definované jako zobrazení z $R \times R$ do $\mathbb{R}$. Ukážeme, že záměna rozvoje v argumentu $+$ či $\cdot$ ekvivalentním rozvojem nezmění hodnotu, takže jde o zobrazení z $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Plyne to z následujícího lemmatu.

Lemma 6.2.3. *Nechť $(a^{(n)}), (b^{(n)}) \subset R, \mathbb{Q}$ jsou takové posloupnosti zkrácení, že (i) $a^{(n)} - b^{(n)} \to 0$ pro $n \to \infty$ a (ii) $(a^{(n)})$ má formální limitu v $\mathbb{R}$. Pak ji má i $(b^{(n)})$ a $\lim_{\mathbb{R}} a^{(n)} = \lim_{\mathbb{R}} b^{(n)}$.*

Důkaz. Protože $(a^{(n)})$ má formální limitu v $\mathbb{R}$, je cauchyovská podle části 2 lemmatu 6.2.1. Pak je podle (i) i $(b^{(n)})$ cauchyovská. Podle lemmatu 6.2.2 má $(b^{(n)})$ formální limitu v $\mathbb{R}$. Kdyby se nerovnala $\lim_{\mathbb{R}} a^{(n)}$, vedou (i) a části 2 lemmat 6.2.1 a 6.1.1 ke sporu. □

Nechť tedy $a, b, c \in R$ jsou rozvoje s $a \sim b$. Odvodíme, že $ac = bc \in \mathbb{R}$ a $a + c = b + c \in \mathbb{R}$. Máme, podle části 1 lemmatu 6.1.1,

$$|(a \,|\, n)(c \,|\, n) - (b \,|\, n)(c \,|\, n)| = |a \,|\, n - b \,|\, n| \cdot |c \,|\, n| \to 0, \ n \to \infty \,.$$

Položíme-li $a^{(n)} = (a \,|\, n)(c \,|\, n)$ a $b^{(n)} = (b \,|\, n)(c \,|\, n)$, dostáváme podle posledního lemmatu a definice násobení, že $ac = \lim_{\mathbb{R}} a^{(n)} = \lim_{\mathbb{R}} b^{(n)} = bc$. Stejný a o trochu lehčí argument funguje pro součet.

Za cenu obtížnějších důkazů jsme si mohli vystačit jen s formálními limitami v R místo $\mathbb{R}$, jak ukazuje následující úloha.

Úloha 6.2.4. *Dokažte, že pro každé dva rozvoje $a, b \in R$ obě posloupnosti zkrácení*

$$(a \,|\, n + b \,|\, n) \;\; a \;\; ((a \,|\, n)(b \,|\, n))$$

formálně konvergují. Jak z příkladů v oddílu 1.7 víme, nevystačí se jen s cauchyovskostí těchto posloupností.

Lemma 6.2.5. *Nechť $(a^{(n)}) \subset R, \mathbb{Q}$ je posloupnost zkrácení, která má*

$$\lim_{\mathbb{R}} a^{(n)} = \alpha \in \mathbb{R}\ ,$$

a nechť $a \in \alpha$ je nějaký rozvoj reprezentující α. Pak

$$a^{(n)} - a \,|\, n \to 0,\ \ n \to \infty\ .$$

Důkaz. To plyne z definice formální limity v $\mathbb{R}$ a z části 1 lemmatu 6.1.1. □

6.3 $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ je uspořádané těleso

Bla.

Už tedy máme na $\mathbb{R}$ řádně definované aritmetické operace a ty jsou odvozeny z aritmetických operací se zlomky, přesněji se zkráceními. To, že $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je těleso, vezmeme jako daný výchozí bod. Vlastnosti operací $+$ a $\cdot$ přeneseme na $\mathbb{R}$ z podokruhu zkrácení tělesa $\mathbb{Q}$ limitním přechodem pomocí lemmatu o záměně pořadí aritmetické operace a formální limity v $\mathbb{R}$.

Lemma 6.3.1. *Nechť $(a^{(n)}), (b^{(n)}) \subset R, \mathbb{Q}$ jsou dvě posloupnosti zkrácení, které mají formální limity v $\mathbb{R}$. Pak je mají i posloupnosti $(a^{(n)} + b^{(n)})$, $(a^{(n)}b^{(n)})$ a platí, že*

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathbb{R}}(a^{(n)} + b^{(n)}) &= \lim_{\mathbb{R}} a^{(n)} + \lim_{\mathbb{R}} b^{(n)} \\
\lim_{\mathbb{R}}(a^{(n)} \cdot b^{(n)}) &= \lim_{\mathbb{R}} a^{(n)} \cdot \lim_{\mathbb{R}} b^{(n)}\ .
\end{aligned}$$

Důkaz. Z existence $\lim_{\mathbb{R}} a^{(n)}$ a $\lim_{\mathbb{R}} b^{(n)}$ plyne cauchyovskost posloupností $(a^{(n)})$ a $(b^{(n)})$ (část 2 lemmatu 6.2.1). Z ní plyne cauchyovskost posloupností $(a^{(n)} + b^{(n)})$ a $(a^{(n)} \cdot b^{(n)})$ (pro součet to je jasné a pro součin argumentujeme jako v důkazu části 1 lemmatu 6.2.1). Podle lemmatu 6.2.2 existují $\lim_{\mathbb{R}}(a^{(n)} + b^{(n)})$ a $\lim_{\mathbb{R}}(a^{(n)}b^{(n)})$. Nechť $a, b \in R$ reprezentují po řadě reálná čísla $\lim_{\mathbb{R}} a^{(n)}, \lim_{\mathbb{R}} b^{(n)}$, $c \in R$ reprezentuje součin $ab \in \mathbb{R}$ a $d \in R$ reprezentuje $\lim_{\mathbb{R}}(a^{(n)}b^{(n)})$. Pak, pro $n \to \infty$, všechny čtyři rozdíly

$$d \,|\, n - a^{(n)}b^{(n)},\ \ a^{(n)} - a \,|\, n,\ \ b^{(n)} - b \,|\, n \ \ \text{a} \ \ (a \,|\, n)(b \,|\, n) - c \,|\, n$$

jdou k 0, podle lemmatu 6.2.5 a definice součinu dvou rozvojů. Díky omezenosti všech zapojených posloupností zkrácení zkombinováním těchto čtyř rozdílů dedukujeme (viz úloha 6.3.2), že i rozdíl

$$d\,|\,n - c\,|\,n$$

jde pro $n \to \infty$ k nule. To ale podle části 2 lemmatu 6.1.1 znamená rovnost reálných čísel $[d] = [c]$, tedy $\lim_{\mathbb{R}}(a^{(n)}b^{(n)}) = \lim_{\mathbb{R}} a^{(n)} \lim_{\mathbb{R}} b^{(n)}$. Limita součinu je tak součin limit. Podobný a jednodušší argument dokazuje rovněž, že limita součtu je součet limit. $\square$

Úloha 6.3.2. *Odvoďte podrobně, že* $d\,|\,n - c\,|\,n \to 0$.

Reálná čísla $0 = \{+0.00\ldots, -0.00\ldots\}$ a $1 = \{+1.00\ldots, +0.99\ldots\}$ jsou zřejmě podle definice součtu a součinu reálných čísel neutrálními prvky pro tyto operace. Z definice součtu a součinu též hned plyne, že pro reálné číslo reprezentované rozvojem $\pm a_0 a_1 \ldots$ je reálné číslo reprezentované rozvojem $\mp a_0 a_1 \ldots$ s opačným znaménkem inverzním prvkem při sčítání a že sčítání i násobení reálných čísel je komutativní. Vycházíme z toho, že sčítání a násobení mají tyto vlastnosti v okruhu zkrácení, jenž je podokruhem tělesa $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Úloha 6.3.3. *Ověřte podrobně, že* 0 *respektive* 1 *je neutrální pro sčítání respektive násobení, že sčítání a násobení jsou komutativní a že každé reálné číslo má inverzní prvek pro sčítání.*

Asociativita a distributivita mají o něco obtížnější zdůvodnění, neboť využívají záměnu pořadí dvou limit. Dokážeme třeba distributivitu násobení vzhledem ke sčítání. Pro libovolné rozvoje a, b, c dokážeme rovnost reálných čísel $a(b+c) = ab + ac$. Nechť $d \in R$ je libovolný rozvoj reprezentující číslo $b + c \in \mathbb{R}$. Pak skutečně

$$\begin{aligned} a(b+c) &= \lim_{\mathbb{R}}(a\,|\,n)(d\,|\,n) = \lim_{\mathbb{R}}(a\,|\,n)\lim_{\mathbb{R}}(d\,|\,n) \\ &= \lim_{\mathbb{R}}(a\,|\,n)\lim_{\mathbb{R}}(b\,|\,n + c\,|\,n) = \lim_{\mathbb{R}}((a\,|\,n)(b\,|\,n + c\,|\,n)) \\ &= \lim_{\mathbb{R}}((a\,|\,n)(b\,|\,n) + (a\,|\,n)(c\,|\,n)) \\ &= \lim_{\mathbb{R}}(a\,|\,n)(b\,|\,n) + \lim_{\mathbb{R}}(a\,|\,n)(c\,|\,n) = ab + ac\,, \end{aligned}$$

kde první rovnost platí podle definice násobení v $\mathbb{R}$, druhá podle lemmatu 6.3.1, třetí podle definice sčítání v $\mathbb{R}$ a lemmat 6.2.3 a 6.2.5, čtvrtá podle lemmatu 6.3.1, pátá podle distributivity násobení vzhledem ke sčítání v okruhu zkrácení, šestá podle lemmatu 6.3.1 a sedmá podle definice násobení v $\mathbb{R}$. Asociativita sčítání i násobení se dokáže podobnými ale jednoduššími výpočty.

Ukážeme, že $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je obor integrity, třebas to už je zahrnuto v existenci multiplikativních inverzů níže v lemmatu 6.3.5. Nechť $a, b \in R$ a $ab = 0$. Pak podle definice násobení v $\mathbb{R}$ a lemmatu 6.2.5 máme $(a\,|\,n)(b\,|\,n) \to 0$ pro $n \to \infty$. Bez dalšího odtud neplyne, že $a\,|\,n \to 0$ nebo $b\,|\,n \to 0$, stačí uvážit posloupnosti zlomků $1, 0, 1, 0, \ldots$ a $0, 1, 0, 1, \ldots$. Ovšem $(a\,|\,n)$ i $(b\,|\,n)$ je cauchyovská (podle nerovnosti v důkazu části 1 lemmatu 6.2.1), takže zde to plyne (viz úloha 6.3.4) a tak (podle části 2 lemmatu 6.1.1 či zřejmě) $a = \pm 0.00\ldots$ nebo $b = \pm 0.00\ldots$. Okruh $\mathbb{R}$ je proto obor integrity.

Úloha 6.3.4. *Když $a_n b_n \to 0$ pro dvě cauchyovské posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{Q}$, pak $a_n \to 0$ nebo $b_n \to 0$. Jak se dá oslabit předpoklad cauchyovskosti, aby závěr stále platil?*

Ukážeme ještě, že uspořádání $>$ na $\mathbb{R}$ je v souladu se sčítáním i násobením. Nechť $a, b, c \in R$, $b > a$ a $b \not\sim a$. Pak existuje $k \in \mathbb{N}_0$, že $n \geq k \Rightarrow b\,|\,n - a\,|\,n \geq 10^{-k}$ (viz důkaz části 2 lemmatu 6.1.1). Nechť $d, e \in R$ reprezentují po řadě $b+c, a+c \in \mathbb{R}$. Z $(b\,|\,n + c\,|\,n) - (a\,|\,n + c\,|\,n) \geq 10^{-k}$ pro každé $n \geq k$ a lematu 6.2.5 dostáváme, že $d\,|\,n - e\,|\,n \geq 10^{-k-1}$ pro každé $n \geq n_0$. Tudíž $d > e$ a $d \not\sim e$. Nechť $a, b, c \in R$, $b > a$, $c > 0 = 0.00\ldots$ a $b \not\sim a$. Existuje $k \in \mathbb{N}_0$, že pro $n \geq k$ je $b\,|\,n - a\,|\,n \geq 10^{-k}$ a $c\,|\,n \geq 10^{-k}$. Nechť $d, e \in R$ reprezentují po řadě $bc, ac \in \mathbb{R}$. Z $(b\,|\,n)(c\,|\,n) - (a\,|\,n)(c\,|\,n) \geq 10^{-2k}$ pro každé $n \geq k$ a lematu 6.2.5 dostáváme, že $d\,|\,n - e\,|\,n \geq 10^{-2k-1}$ pro každé $n \geq n_0$. Tudíž $d > e$ a $d \not\sim e$.

Existence multiplikativních inverzů

Důkaz věty 1.7.20, že $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ je úplné uspořádané těleso, je skoro hotový. Co zbývá dokázat je existence inverzu nenulového čísla vzhledem k násobení. Provedeme to v následujícím lemmatu.

Lemma 6.3.5. *Pro každé nenulové $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje $\beta \in \mathbb{R}$, že $\alpha\beta = 1 = \{+1.00\ldots, +0.99\ldots\}$.*

Důkaz. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x$, je spojitá. Pro dostatečně velké $k \in \mathbb{N}$ jistě máme $f(\pm 10^k) < 1$ a $f(\mp 10^k) > 1$. Věta 4.2.4 o nabývání mezihodnot spojitých funkcí dává existenci $\beta \in \mathbb{R}$ s $f(\beta) = 1$. $\Box$

Tím je důkaz věty 1.7.20 dokončen.

Není ale důkaz posledního lemmatu nějaký pochybný a neskrývá bludný kruh? Pokud to čtenářku napadlo, je to správně. Důkaz je sice elegantní a velmi krátký, ovšem za cenu použití věty 4.2.4 o spojitých funkcích, která se objevuje v pozdější fázi výstavby analýzy než je zavedení reálných čísel. Větu 4.2.4 a pojem spojité funkce před ní jsme uvedli ve chvíli, kdy jsou reálná čísla již sestrojená a jejich základní vlastnosti dokázané. Vůbec není nepřípadná námitka, že se důkaz věty 4.2.4 nebo i sám pojem spojité funkce snad opírá též o existenci multiplikativního inverzu reálných čísel. Kdyby to tak bylo, byl by důkaz lemmatu 6.3.5 důkaz kruhem a logicky chybný. Naštěstí to tak není, jak ukazuje následující obecný výsledek.

Úloha 6.3.6. *Nechť $S = (S, +, \cdot, <)$ je úplný uspořádaný okruh s tou vlastností, že pro každé dva jeho kladné prvky $\alpha, \beta > 0$ existuje $\gamma \in S$, že $\alpha > \gamma\beta > 0$. Pak S je těleso.*

Protože

6.4 Prvotěleso v $\mathbb{R}$ jsou periodické rozvoje

Bla.

Zbývá dokázat tvrzení 1.7.21. To říká, že reálné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ je racionální, právě když každý rozvoj $a \in \alpha$ je periodický. Racionalita α znamená, že $\alpha = a/b$ pro takové rozvoje a, b, že $a_n = b_n = 0$ pro každé $n > 0$ (a a b mají za desetinnou tečkou jen nuly). Rozvoj $+(10^m).00\dots$, $m \in \mathbb{N}_0$, označíme jako 10^m (už jsme tak s ním pracovali v důkazu lemmatu 6.3.5). Důkaz je založen na zřejmé vlastnosti násobení tímto rozvojem: když $a = \pm a_0 a_1 \dots \in R$, tak $10^m \cdot a = \pm b_0 b_1 \dots$, kde znaménko je totéž jako u a a $b_n = a_{n+m}$ pro každé $n = 1, 2, \dots$ (posunutí desetinné tečky, hodnotu b_0 neřešíme). Jednodušší je dokázat v tvrzení 1.7.21 implikaci $\Leftarrow$. Nechť $a = \pm a_0 a_1 \dots$ je periodický rozvoj: existují $n_0 \in \mathbb{N}_0$ a $p \in \mathbb{N}$, že $n \ge n_0 \Rightarrow a_n = a_{n+p}$. Pak ale, podle zmíněné vlastnosti násobení mocninou deseti, máme $10^{n_0+p}a - 10^{n_0}a = [\pm b_0.00\dots]$, kde rozvoj $b = \pm b_0.00\dots$ má totéž znaménko jako a. Takže $a = b/(10^{n_0+p} - 10^{n_0}) = b/(+(10^{n_0+p} - 10^{n_0}).00\dots)$ a a je racionální.

Dokážeme opačnou implikaci $\Rightarrow$. Nechť $\alpha = a/b$ je racionální reálné číslo, takže $a, b \in R$ mají za desetinnou tečkou jen nuly, a $c \in \alpha$ je libovolný rozvoj reprezentující α. Dokážeme, že c je periodický.

Proč platí, že $0.999\cdots = 1$?

Má odpověď zní: tuto a příbuzné rovnosti je logicky nutné postulovat (technicky jako ekvivalenci), aby bylo pravda, že každá cauchyovská posloupnost zkrácení má formální limitu. Druhý hořejší příklad

Úloha 6.4.1. *Prostudujte si texty na internetu [161] a [76] o rovnosti* $0.999\cdots = 1$*. Lze přijmout to její zdůvodnění, že* 1 *a* $0.999\dots$ *představují týž bod na reálné ose?*

6.5 Poznámky a další úlohy

Návody k řešení skoro všech úloh

Úloha 1.0.1. Pokud číslu 2 rozumíme množinově jako $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ a pokud $a = 1$ a $b = \emptyset$, pak má B jen dva různé prvky. Podle toho, co je a a co b může mít B i tři či čtyři různé prvky. Ostatní možnosti nenastávají.

Úloha 1.0.2. Třeba matrjoška v obchodě u Karlova mostu, ale bez vnitřní pevné bábušky.

Úloha 1.0.3. $\#\mathcal{P}(M) = 2^{\#M}$.

Úloha 1.0.4. Pro $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ uvažte toto spárování prvků množiny $\mathcal{P}(M)$: $(A, A\backslash\{1\})$, když $1 \in A$, a $(A, A \cup \{1\})$, když $1 \notin A$.

Úloha 1.0.5. Tak to neplatí, $0 \neq 1$.

Úloha 1.0.6. Viz extenzionalita množin.

Úloha 1.0.7. Plyne to hned pomocí extenzionality množin.

Úloha 1.0.9. Z prvního tvrzení o papeži se vypuštěním závorek stane formule znamenající

$$(\forall x:\ x \in \emptyset) \ \Rightarrow\ (x \textit{ je papež})$$

($\forall$ váže silněji než $\Rightarrow$), jež není ani pravdivá ani nepravdivá, protože není uzavřená — třetí výskyt symbolu proměnné x není vázaný žádným kvantifikátorem. (Pokud bychom tento výskyt x považovali za implicitně kvantifikovaný obecným kvantifikátorem $\forall\, x$, jak se to často dělá, dostáváme pravdivou formuli, protože implikace má pro každé x nepravdivý předpoklad $\forall x:\ x \in \emptyset$.) Podobně druhé tvrzení o papeži po vypuštění závorek není uzavřená formule a tedy není ani pravdivé ani nepravdivé.

Úloha 1.0.10. Existuje kladné ε, že pro každé kladné δ existují v M dva prvky, které jsou blíže než δ, ale funkční hodnoty v nich jsou vzdálené alespoň ε.

Úloha 1.0.11. alfa, beta, velká gama, gama, velká delta, delta, epsilon, zéta, éta, velká théta, théta, ióta, kappa, velká lambda, lambda, mí, ný, velké ksí, ksí, omikron, velké pí, pí, ró, velké sigma, sigma, tau, velké ypsilon, ypsilon, velké fí, fí, chí, velké psí, psí, velká omega, omega („Já jsem alfa i omega“). Neuvedené kapitálky se shodují s latinkou, např. A pro α, H pro η apod.

Úloha 1.1.1. $2^{-n} = 2^{-n+1} - 2^{-n}$, $\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ a $\frac{1}{(2n)^2} = 4\frac{1}{n^2}$.

Úloha 1.1.2. Na Bernarda Bolzana. Viz *První rozpravy o teorii množin* v monumentálním *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky* [146] *Petra Vopěnky (1935–2015)* (český matematik, filozof, spisovatel a politik, tvůrce alternativní teorie množin a autor řady výsledků v klasické, cantorovské teorii množin a topologii).

Úloha 1.1.3. Musíme pochopitelně předběhnout a použít limity posloupností a konvergenci řad. Druhá rovnost v prvním výpočtu platí triviálně. První rovnosti v obou výpočtech jsou správné a platí podle části 2 tvzení 3.1.9. První rovnost v úloze neplatí, už proto, že vlevo $\lim a_n$ není 0.

Úloha 1.2.1. Na n-prvkové množině je $2^{n(n-1)/2}$ grafů a nekonečně mnoho multigrafů.

Úloha 1.2.2. Těchto multigrafů je $3^3 = 27$.

Úloha 1.2.4. Pro $a \in M$ definujeme $X_a = \{b \in M \mid aRb\}$. Pak $P = \{X_a \mid a \in M\}$ je rozklad M a má požadovanou vlastnost. Jiný rozklad s tou vlastností musí mít stejné bloky. Přechod od P k R podobně.

Úloha 1.2.6. Reflexivitu dává hodnota $n = 0$. Symetrie plyne obrácením posloupnosti. Tranzitivita plyne napojením dvou posloupností.

Úloha 1.2.7. Ukažte, že nejkratší sled spojující dva dané vrcholy je cesta.

Úloha 1.2.8. Pokud některé dva vrcholy nelze spojit cestou, leží v různých komponentách. Graf tedy má alespoň dvě komponenty a popsaný rozklad tvoří jedna komponenta a sjednocení všech ostatních. Má-li graf popsaný rozklad, pak žádný vrchol v jednom bloku nelze spojit cestou s vrcholem v druhém bloku.

Úloha 1.2.9. 1, 1, 2, 5 a 15.

Úloha 1.2.10. Pro každé nenulové $n \in \mathbb{Z}$ se n a $-n$ vzájemně dělí, takže se nejedná o uspořádání. Na $\mathbb{N}$ dostáváme neostré částečné uspořádání, které není lineární.

Úloha 1.2.12. Ano, je to dokonce největší prvek dané podmnožiny.

Úloha 1.2.16. Potíž je s neporovnatelnými prvky: když $c < a$, pak c není horní mezí Y, což dosvědčí i prvek v Y neporovnatelný s c.

Úloha 1.2.17. Jsou-li a a a' dvě suprema podmnožiny Y, pak podle definice $a \le a'$ i $a' \le a$, takže $a = a'$.

Úloha 1.2.20. Má-li slovo f definiční obor $[k]$ a slovo g definiční obor $[l]$, kde $k, l \in \mathbb{N}_0$, pak má slovo fg definiční obor $[k + l]$ a hodnoty $fg(i) = f(i)$ pro $1 \le i \le k$ a $fg(i) = g(i - k)$ pro $k + 1 \le i \le k + l$.

Úloha 1.2.21. Protože bijekce mezi množinami indukuje bijekci mezi množinami jejich bijekcí na sebe. Když je f bijekce $\{1, 2, \ldots, n\}$ na sebe, pak pro $f(1)$ máme n možností, pro $f(2)$ (pro již určenou hodnotu $f(1)$) o jednu méně, a tak dál. Tedy $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 1$.

Úloha 1.2.22. Když f a g jsou surjekce, pak i h je surjekce. Když je h surjekce, tak i g je surjekce. Když f a g jsou injekce, pak i h je injekce. Když je h injekce, tak i f je injekce. A tak podobně dále. Počet úloh? V trojici (f, g, h) přiřadíme jedné či dvěma složkám jednu ze čtyř značek $\{s, \neg s, i, \neg i\}$ (se zřejmým výkladem) a ptáme, zda to něco implikuje pro některou z neoznačených složek. Což dá $4\binom{3}{1} + 4^2\binom{3}{2} = 60$ úloh. Jsou možné asi i jiné výklady otázky po počtu úloh.

Úloha 1.2.23. V relačním pojetí je f^{-1} vždy surjekce a proto pro nesurjektivní prostou f je $(f^{-1})^{-1} \neq f$.

Úloha 1.2.24. Je-li f bijekce, pak hledané g je f^{-1}. Existuje-li k f popsané zobrazení g, pak definovanost g na N ukazuje, že f je na ($b \in N$ je obrazem $g(b)$ v f) a „funkčnost“ g ukazuje prostotu f ($a, a' \in M$ s $f(a) = f(a') = b$ dává $a = g(b)$ a $a' = g(b)$, tedy $a = a'$).

Úloha 1.2.27. Všechny.

Úloha 1.3.2. f dá množinový systém a AC dá g. Naopak, pro daný množinový systém uvažte vhodné zobrazení f z $\bigcup_{i \in I} A_i$ do I.

Úloha 1.3.3. Nepotřebujeme. Pokud zkratku $X \neq \emptyset$ rozvineme jako

$$\exists\, a : \ a \in X \ ,$$

stane se první formule tautologií, kterou dokážeme jen z logických axiomů bez použití dalších množinových axiomů. Pro „zabalení“ a ve druhé formuli již nějaké axiomy teorie množin potřebujeme, ne však AC. Výběr prvku z neprázdné množiny potom je pouhou reformulací její neprázdnosti. Zkratku $X \neq \emptyset$ ale můžeme také rozvinout správněji (předchozím rozvinutím jsme si to ulehčili až moc) jako

$$\forall\, Z : \ (\neg \exists\, x : \ x \in Z) \Rightarrow \neg(X = Z)$$

a pak k výběru a z X, to jest k důkazu první formule s takto nahrazenou podformulí $X \neq \emptyset$, již potřebujeme axiom extenzionality (ale ne AC).

Úloha 1.3.4. Je-li uspořádání dobré, popsaný řetězec zjevně neexistuje. Není-li dobré, řetězec sestrojíme opakovaným výběrem (AC!) prvků popírajících minimalitu.

Úloha 1.3.6. Množinu M lze chápat i jako množinový systém $\{(m, m) \mid m \in M\}$.

Úloha 1.3.7. Obsahuje například lineární uspořádání na jednobodovce $\{f(X)\}$.

Úloha 1.3.8. Pro vlastní dolní množinu A v R, jež je i vlastní dolní množinou v T, vybírá f z jejího doplňku do X prvek, jenž je nejmenší v $D(T) \backslash A$. Ten zůstává nejmenší i v $D(R) \backslash A$. Jediný nový případ je $A = D(T)$, ale pak je $f(X \backslash A) = x$, což je nejmenší (totiž jediný) prvek v $D(R) \backslash A = D(R) \backslash D(T)$.

Úloha 1.3.11. První sčítání či operace je $a \mapsto a + \varphi$, kde $a \in C$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$. Druhé sčítání je $\psi + \varphi$, kde $\psi, \varphi \in [0, 2\pi)$. Pro zmatení nepřítele obě značíme týmž symbolem +. Podstatné je, že $(a+\psi)+\varphi = a+(\psi+\varphi)$. Sčítání a odečítání úhlů je vlastně sčítání a odečítání čísel z intervalu $[0, 2\pi)$ modulo 2π.

Úloha 1.4.2. Položte M rovnou 0_0 a těm $n \in N_0$, které mají předchůdce.

Úloha 1.4.3. Položte M rovnou těm $n \in N_0$, že $S(n) \neq n$.

Úloha 1.4.4. Položíme $N_0 = \{\dots, -7, -5, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, $0_0 = 0$ a $S(n) = n + 2$ pro každé $n \in N_0$. Pak např. 1 není dosažitelná následníkem z 0_0. Princip indukce porušuje podmnožina $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$. Nebo jednodušeji: $N_0 = \mathbb{N}_0 \cup \{a\}$, kde $a \notin \mathbb{N}_0$, $0_0 = 0$ a $S(n) = n+1$ pro $n \in \mathbb{N}_0$, $S(a) = a$. Pak a není dosažitelné následníkem z 0_0. Princip indukce porušuje podmnožina $\mathbb{N}_0$.

Úloha 1.4.5. Reflexivita i tranzitivita $\leq$ jsou jasné. Pro důkaz porovnatelnosti libovolných dvou prvků v N_0 nejprve indukcí dokažte, že pro každé $n \in N_0$ existuje právě jeden počáteční úsek, označme ho $[0_0, n]$, že $n \in [0_0, n]$, ale $S(n) \notin [0_0, n]$. Dokažte, že $[0_0, n]$ je průnik všech počátečních úseků obsahujících n, takže $m \leq n \iff [0_0, m] \subset [0_0, n]$. Indukcí pak dokažte, že každé dva $[0_0, m]$ a $[0_0, n]$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, jsou porovnatelné inkluzí. To dává i slabou antisymetrii.

Úloha 1.4.6. Vezmeme množinu M prvků $n \in N_0$ s vlastností, že každá podmnožina $X \subset N_0$ obsahující prvek $\leq n$ má nejmenší prvek. Lehce se ověří, že $0_0 \in M$ a $n \in M \Rightarrow S(n) \in M$. Podle indukce je $M = N_0$ a tedy každá $\emptyset \neq X \subset N_0$ má nejmenší prvek.

Úloha 1.4.9. $3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Úloha 1.4.10. Například asociativita násobení: $a(bc) = (ab)c$ pro každá tři čísla $a, b, c \in \mathbb{N}_0$. Pro $a = 0$ rovnost platí, protože jsme již indukcí dokázali pro každé $a \in \mathbb{N}_0$ rovnost $0a = a0 = 0$. Jako a' označíme předchůdce a a máme

$$a(bc) = S(a')(bc) = a'(bc) + bc = (a'b)c + bc = (a'b + b)c = (ab)c\ ,$$

kde jsme ve třetí rovnosti použili indukci, ve druhé a páté definici násobení, a ve čtvrté distributivitu. Tu je tedy třeba dokázat dříve ...

Úloha 1.4.12. První dvě tvrzení jsou jednoduchá. Tvrzení o sjednocení plyne z faktu, že máme-li injekci z A, popř. z B, do vlastního počátečního úseku $[0, m]$, popř. do $[0, n]$, pak máme injekci z $A \cup B$ do vlastního počátečního úseku $[0, m + n + 1]$ (nikoli jen $[0, m + n]$!). Ten je ovšem třeba dokázat.

Úloha 1.4.13. Převeďte na analogická tvrzení pro vlastní počáteční úseky $\mathbb{N}_0$.

Úloha 1.4.14. Např. zobrazení $n = 2^a 3^b \ldots \mapsto |a - b| + 1$ (kde $a, b \in \mathbb{N}_0$) dané prvočíselným rozkladem čísla n.

Úloha 1.4.16. Uvažte množinový systém $\{f^{-1}(b) \mid b \in N\}$. V prvním případě použijte axiom výběru.

Úloha 1.4.17. Plyne to z úlohy 1.4.13.

Úloha 1.4.19. Abychom měli šipkovou vlastnost.

Úloha 1.4.20. Zřejmé bijekce mezi M a M' a mezi N a N' převedou situaci na disjunktní množiny. Dokončete to podrobně. Jde o jedno z mnoha použití triku zvaného *obchvat* (bypass), probíraného v zajímavé Melzakově knize [100].

Úloha 1.4.21. Nechť $f\colon A \to B \oplus A$ je bijekce. Pak A se rozkládá na $A = C \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, kde A_k jsou ty $a \in A$, že $f(f(\ldots(f(a))\ldots) \in B$ po k iteracích, a C jsou ty $a \in A$, že iterováním f se z a nikdy nedostaneme do B. Lehce se vidí, že každá A_k je v bijekci s B. Nekonečný součet $B \oplus B \oplus B \oplus \ldots$ vyložíme jako $(\{1\} \times B) \cup (\{2\} \times B) \cup (\{3\} \times B) \cup \ldots$. Druhý krok náčrtu je celkem jasný, injekce z M do N je i bijekce mezi podmnožinou $N' \subset N$ a M. Asociativita $(X \oplus Y) \oplus Z \approx X \oplus (Y \oplus Z)$, záměnnost $X \approx Y \Rightarrow X \oplus Z \approx Y \oplus Z$, komutativita $X \oplus Y \approx Y \oplus X$ a tranzitivita $X \approx Y \approx Z \Rightarrow X \approx Z$ se dokážou snadno. Nekonečná záměnnost $X \approx Y \Rightarrow X \oplus X \oplus \cdots \approx Y \oplus Y \oplus \ldots$ je též lehká. Klíčová nekonečná asociativita

$$B \oplus ((A \oplus B) \oplus (A \oplus B) \oplus \ldots) \approx (B \oplus A) \oplus (B \oplus A) \oplus \ldots$$

se zdůvodní následovně. Na levé straně máme, pro $i, j \in \mathbb{N}$ a $a \in A, b \in B$, množinu prvků $(1, b)$, $(2, i, 1, a)$, $(2, i, 2, b)$ a na pravé prvky $(j, 1, b)$, $(j, 2, a)$. Hledanou bijekci dostaneme spárováním $(1, b)$ s $(1, 1, b)$, $(2, i, 1, a)$ s $(j = i, 2, a)$ a $(2, i, 2, b)$ s $(j = i + 1, 1, b)$.

Úloha 1.5.2. Není. Prostě jsme definovali $0^0 = 1$. Nesmíme ale zapomenout, že B. nerovnost platí pro každé $n = 0, 1, 2, \ldots$ a každé reálné $x \geq -1$ pouze s touto definicí. Viz poznámky o 0^0 v oddílu 2.6.

Úloha 1.5.4. Umocněte na druhou a použijte, že vždy $c^2 \geq 0$.

Úloha 1.5.5. Stačí to dokázat pro $k = 2$.

Úloha 1.5.6. Je-li $|\cdot|$ délka rovinného vektoru, pak pro každé dva vektory $u, v \in \mathbb{R}^2$ platí nerovnost $|u + v| \leq |u| + |v|$ — geometricky to znamená, že v trojúhelníku s vrcholy $\overline{0}$, u a $u + v$ je délka strany $\overline{0}(u + v)$ nejvýše součet délek zbylých dvou stran. Tato nerovnost platí i v mnoha dalších situacích. Je základem pro definici metrického prostoru, struktury důležité pro matematickou analýzu (viz Matematická analýza II).

Úloha 1.5.9. Kdyby posílala dvě dvojice na totéž, šla by $\sqrt{2}$ vyjádřit zlomkem.

Úloha 1.6.1. Třeba tranzitivita. Ekvivalence $a/b \sim c/d$ a $c/d \sim e/f$ znamenají, že $ad = bc$ a $cf = de$. Tedy $adf = bcf = bde$ a $af = be$ ($d \neq 0$ lze zkrátit), čili $a/b \sim e/f$. Použili jsme i tranzitivitu rovnosti.

Úloha 1.6.3. Třeba sčítání. Z $a/b \sim c/d$ a $e/f \sim g/h$ máme odvodit, že $(af + eb)/bf \sim (ch + gd)/dh$, to jest $(af + eb)dh = (ch + gd)bf$. Což platí, levá strana $afdh + ebdh = bfch + fbdg$, podle výchozích ekvivalencí, což je pravá strana $bf(ch + dg)$. Ostatní operace podobně.

Úloha 1.6.5. V $\mathbb{Z}$ jsou jednotkami jen 1 a -1, v $\mathbb{Z}_{24}$ zbytky nesoudělné s 24, tedy 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Nula nikdy není jednotkou.

Úloha 1.6.7. Právě a jenom pro prvočíselné m.

Úloha 1.6.9. Jen pro jednoprvkovou a prázdnou A.

Úloha 1.6.10. Ani v $\mathbb{R}^2$ ani v $\mathbb{R}^3$ není skládání volných pohybů komutativní.

Úloha 1.6.11. Když $a \in R$ a $0 < a$, tak $0 < a < 2a = a + a < 3a < 4a < \ldots$.

Úloha 1.6.12. Nechť $(R, +, \cdot)$ je konečný obor integrity a $0 \neq a \in R$. Zobrazení $x \mapsto ax$ z R do R je prosté, takže ....

Úloha 1.6.13. Uvažte nejmenší podtěleso $P \subset T$ (P je vygenerované z 1 oběma operacemi). Dokažte, že $|P| = p$ pro nějaké prvočíslo p. Ukažte, že T je vektorový prostor nad skaláry P (skalární násobení prvkem z P je prostě násobení v T). Podle výsledků lineární algebry tedy $|T| = |P|^k = p^k$, kde k je velikost báze tohoto vektorového prostoru.

Úloha 1.6.14. Třeba tranzitivita. Nechť $a_0 \ldots a_m \prec b_0 \ldots b_n$, dosvědčeno indexem i, a $b_0 \ldots b_n \prec c_0 \ldots c_o$, dosvědčeno indexem i'. Když $i' \geq i$, pak $a_j = b_j = c_j$ pro $j > i'$ a $a_{i'} \leq b_{i'} < c_{i'}$, takže $a_0 \ldots a_m \prec c_0 \ldots c_o$. Když $i' < i$, pak $a_j = b_j = c_j$ pro $j > i$ a $a_i < b_i = c_i$, a opět $a_0 \ldots a_m \prec c_0 \ldots c_o$.

Úloha 1.6.15. Pro veliká $x > 0$ je $\frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{a_m x^m}$ skoro 1.

Úloha 1.6.16. Berte za dané, že $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$ je okruh. Ověřit, že přičtení jakéhokoli polynomu a vynásobení jakýmkoli kladným polynomem zachová nerovnost je pomocí předchozí ekvivalentní definice $\prec$ snadné, převede se to na numerické nerovnosti.

Úloha 1.6.17. Opět berte za dané, že $(\mathbb{Z}(x), +, \cdot)$ je těleso. Je třeba ověřit, že $\prec$ je lineární uspořádání a je v souladu se sčítáním a násobením. Je to stejné jako pro rozšíření obvyklého uspořádání ze $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{Q}$.

Úloha 1.7.5. Je to složenina dvou izomorfismů uspořádaných těles, z nichž jedno je vždy $\mathbb{Q}$.

Úloha 1.7.6. Prvek a je horní mezí dané množiny, a žádný menší prvek jí není podle archimédovskosti.

Úloha 1.7.7. Jen trochu složitějši variace předešlé úlohy.

Úloha 1.7.8. Reflexivita a symetrie jsou jasné, tranzitivita plyne pomocí trojúhelníkové nerovnosti.

Úloha 1.7.10. Buď $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná a shora omezená. Sestrojte takovou posloupnost zlomků (a_n), že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je a_n horní mezí M, ale $a_n - \frac{1}{n}$ už ne. Pak je (a_n) cauchyovská a je to supremum M.

Úloha 1.7.12. Supremum je sjednocení dolních polovin řezů.

Úloha 1.7.15. $- < +,\ - < - \iff + > +$.

Úloha 1.7.16. Když $a, b, c \in X$ a $\{a, b\}$ je skok, pak vždy $c \leq a, b$ nebo $c \geq a, b$.

Úloha 1.7.17. Viz úloha 1.6.14. Skoky jsou přesně $\{a, b\} \subset R$ s $a \neq b$ a $a \sim b$ díky slovníkové definici uspořádání $(R, <)$: pro $a < b$ už mezi ně nelze nic vložit, právě když první rozdílná cifra je v a o 1 menší než v b a po ní jsou v a samé devítky a v b samé nuly.

Úloha 1.7.18. To hned plyne z definic.

Úloha 1.7.22. Protože nejmenší i největší prvek množiny je jednoznačný.

Úloha 1.7.23. Co je $\inf(\emptyset)$? Největší dolní mez množiny $\emptyset$, existuje-li. Kdy je $x \in X$ dolní mezí $\emptyset$? Vždy: implikace $a \in \emptyset \Rightarrow x \le a$ platí vždy (předpoklad není nikdy splněn). Množina dolních mezí množiny $\emptyset$ je tak celé X. Dále, $\inf(X)$ je nejmenší prvek X, existuje-li. Ostatní úlohy jsou podobné.

Úloha 1.7.24. Infimum je největší společný dělitel a supremum je nejmenší společný násobek.

Úloha 1.7.25. Infimum je průnik a supremum je sjednocení.

Úloha 1.7.28. Pro nezáporné zlomky α a β, obecně neplatí.

Úloha 1.7.29. Ostře klesající řetězec $N = \{x \succ x-1 \succ x-2 \succ \dots\}$ sestává z horních mezí M a pro každou horní mez h množiny M existuje $p \in N$, že $h \succ p$.

Úloha 1.7.31. Má-li A kladné i záporné prvky, stačí vzít jen ty kladné. Má-li jen záporné prvky, pak posunutá $A + c$, pro nějaké $c \in \mathbb{N}$, má kladné i záporné prvky.

Úloha 1.7.33. Číslo c z důsledku není 0, takže $-c \neq c$, a $-c$ je též řešení rovnice $x^2 = 2$, protože $(-c)^2 = c^2$. Máme tedy dvě různá řešení c a $-c$ rovnice $x^2 = 2$. Nechť $d \in \mathbb{R}$ je nějaké další řešení, $d^2 = 2$. Pak ale $0 = d^2 - c^2 = (d-c)(d+c)$, jeden činitel musí být 0 (proč?) a $d = c$ či $d = -c$.

Úloha 1.7.34. Napodobte důkaz důsledu 1.7.32.

Úloha 1.7.36. Žádné, když $a < 0$ a q je sudé. Dvě řešení, když $a > 0$ a q je sudé. Jinak má právě jedno řešení.

Úloha 1.7.37. $(cd)^q = c^q d^q$.

Úloha 1.7.38. $(c^s)^q = c^{sq}$.

Úloha 1.7.39. Podobně jako důsledek 1.7.32.

Úloha 1.7.41. Použijte tvrzení 1.7.21.

Úloha 1.7.42. Mně se nelíbí.

Úloha 1.7.45. Nezapomeňte při tom uvažovat i podmnožiny obsahující nově přidané prvky $-\infty$ a $+\infty$ (v tom se často dělá chyba).

Úloha 1.7.47. To právě obecně není možné, viz tvrzení 1.7.27.

Úloha 1.7.49. Můžete použít i úlohu 1.4.15 a Cantorovu–Bernsteinovu větu.

Úloha 1.7.50. Dvojice (a, b) uvádíme v pořadí podle vzrůstajícího součtu $|a| + |b|$. Pro $\mathbb{Z}^k$ podobně.

Úloha 1.7.52. Pomocí vzorce $1 + 2 + \cdots + k = \binom{k+1}{2}$.

Úloha 1.7.54. Pro dané zobrazení $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$ definujte množinu $A \subset M$, že $A \neq f(m)$ pro každé $m \in M$.

Úloha 1.7.55. Použijte charakteristickou funkci (pod)množiny.

Úloha 1.7.56. Použijte Cantorovu–Bernsteinovu větu.

Úloha 1.7.57. Návod pro 1: bijekci mezi A a $\mathbb{N}$ předělejte na bijekci mezi A a $\{1, 3, 5, \dots\}$, popř. $\{2, 4, 6, \dots\}$. Návod pro 3: jsou-li $f_n\colon A_n \to \mathbb{N}$ injekce, uvažte zobrazení ze sjednocení do $\mathbb{N}$ dané předpisem $A_n \ni x \mapsto 2^n(2f_n(x) + 1)$.

Úloha 1.7.58. Má-li nekonečně mnoho z množin $A_1, A_2, \dots$ alespoň dva prvky, je součin nespočetný. Jinak je nejvýše spočetný.

Úloha 1.8.1. Viz A. Kanamori [75, str. 284].

Úloha 1.8.2. Existence k-tic plyne jednoduše z principu indukce, stačí n dělit prvočísly, dokud to jde. Jejich jednoznačnost plyne z platnosti implikace $p \mid a_1a_2 \dots a_k \Rightarrow p \mid a_i$ pro nějaké i (p je prvočíslo a $a_i \in \mathbb{N}$). Ta plyne z Bachetovy identity: jsou-li $a, b \in \mathbb{Z}$ nesoudělná čísla, pak existují $c, d \in \mathbb{Z}$, že $ac + bd = 1$. A ta plyne z dělení v $\mathbb{Z}$ se zbytkem.

Úloha 1.8.3. Protože bijekce mezi množinami indukuje bijekci mezi množinami jejich k-prvkových podmnožin. Počet $\binom{n}{k}$ se nalezne třeba tak, že se nejprve spočítají uspořádané k-tice prvků z A, v nichž se prvky neopakují, a pak se spočte, kolik k-tic dává tutéž X.

Úloha 1.8.4. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Úloha 1.8.5. Existuje bijekce mezi monomy $x^k y^{n-k}$ vzniklými roznásobením $(x + y)^n$ a k-prvkovými podmnožinami jisté n-prvkové množiny.

Úloha 1.8.6. Podobně ale trochu jinak než v úloze 1.8.3: uvažte permutace čísel $1, 2, \dots, n$, které se obsahem (bez ohledu na pořadí) shodují na prvních n_1 místech, i na následujících n_2 místech, a tak dále.

Úloha 1.8.7. Je jich $\frac{1}{k!}\binom{n}{n_1, \dots, n_k}$.

Úloha 1.8.8. Pomocí jednoznačnosti prvočíselných rozkladů.

Úloha 1.8.9. Dtto.

Úloha 1.8.10. Jsou a rovnají se.

Úloha 1.8.11. Dosaďte $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ v základním tvaru do $p(x)$ a získejte spor.

Úloha 1.8.12. Převeďte na nerovnost $(\sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} a_i b_j)^2 \geq 0$.

Úloha 1.8.13. Pro každé $a \in F$ lze $p(x)$ vyjádřit jako $p(x) = (x - a)q(x) + b$, kde $q \in F[x]$ má stupeň $d - 1$ nebo je nulový polynom a $b \in F$.

Úloha 1.8.14. Rovnici vyjadřující že β je kořenem celočíselného polynomu upravte na tvar, kdy to tvrdí o $1/\beta$.

Úloha 1.8.15. Lineární algebra je všelék — překračuje-li počet vektorů dimenzi prostoru, jsou lineárně závislé. Zde vezmeme vekt. prostor lineárních kombinací monomů $\alpha^i\beta^j$, $i, j \in \mathbb{N}_0$, s racionálními koeficienty.

Úloha 1.8.16. V $1 \le |p^2 - 2q^2|$ rozložte pravou stranu na součin dvou lineárních faktorů a vytkněte q^2. Pak diskutujte dva případy: p/q je daleko od $\sqrt{2}$ (vzdálenost $> 1/2$) a p/q je blízko u $\sqrt{2}$.

Úloha 1.8.17. K $\mathbb{N}$ přidáme nové prvky 0 a $-n$, $n \in \mathbb{N}$, a sčítání a násobení na ně rozšíříme očekávaným způsobem ($m, n \in \mathbb{N}$ a $+n$, $n \in \mathbb{N}$, bereme jako n)

$$0 + (\pm n) = (\pm n) + 0 = \pm n,\ (-m) + (-n) = -(m + n)\ ,$$

pro $m < n$ je

$$(-m) + n = n + (-m) = n - m,\ m + (-n) = (-n) + m = -(n - m)$$

a samozřejmě $(-n) + n = n + (-n) = 0$. Konečně

$$(\pm m)(\pm n) = (\pm \cdot \pm)mn\ ,$$

kde $+ \cdot + = +$, $+ \cdot - = - \cdot + = -$ a $- \cdot - = +$.

Úloha 1.8.18. Jiné příklady jsou třeba $\frac{65}{26}$, $\frac{265}{106}$ či $\frac{775}{217}$. Pro spoustu dalších viz Ekhadův preprint [40].

Úloha 2.1.6. Jednoduché.

Úloha 2.1.7. Opět 1.

Úloha 2.1.8. Zabudováno v samotné definici limity.

Úloha 2.1.9. Posloupnost (b_n) buď nemá limitu nebo ji má rovnu a.

Úloha 2.1.11. Z principu indukce: každá neprázdná podmnožina $\mathbb{N}$ má nejmenší prvek. Ekvivalentně, každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{Z}$ má největší prvek.

Úloha 2.1.12. Má-li limitu $a \in \mathbb{R}$, leží všechny její členy až na konečně mnoho v $(a - 1, a + 1)$.

Úloha 2.1.14. Pro každé $c \in \mathbb{R}$ najdeme n_0, že $a_{n_0} > c$, takže ....

Úloha 2.1.16. Např. $(1, 1, \dots)$ je podposloupností $(0, 1, 0, 1, \dots)$, ale ne naopak. Ovšem $(0, 1, 0, 1, \dots)$ a $(1, 0, 1, 0, \dots)$ jsou vzájemně svými podposloupnostmi.

Úloha 2.1.21. Pro první ne, pro druhou ano.

Úloha 2.1.24. První neexistuje. Druhá též neexistuje, pokud $\lim b_n \ne 0$. Pokud $\lim b_n = 0$, pak druhá limita může i nemusí existovat.

Úloha 2.1.26. Mírnou nevýhodou je trochu složitější znění se dvěma proměnnými místo jediné. Výhodou je ovšem podstatně silnější závěr — dvojic posloupností $((a_n), (b_n))$, že $\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots\} < \{b_{n_0+1}, b_{n_0+2}, \dots\}$, je mnohem méně než takových dvojic, že $a_n < b_n$ pro každé $n > n_0$. Jak moc méně? To by bylo na delší povídání, něco naznačuje úloha 2.6.1.

Úloha 2.1.27. 1. To je triviální. 2. Důkaz se nemění, pro $a > b$ se dostaneme do sporu s první částí. 3. Příkladem takových posloupností jsou třeba $a_n = 1 - \frac{1}{2n}$ a $b_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Úloha 2.1.29. Například pro $a = -\infty$ je: když $\lim c_n = -\infty$ a $b_n \le c_n$ pro každé $n > n_0$, pak i $\lim b_n = -\infty$.

Úloha 2.1.31. Doplňkový graf H ke $G(a_n)$ (jeho hrany jsou nehrany v $G(a_n)$), popisující rovnosti mezi členy posloupnosti (a_n), je disjunktní sjednocení klik (úplných grafů).

Úloha 2.1.32. Pro posloupnost (a_n) s limitou l a číslo $m \in \mathbb{N}$ může platit $N_<(m) \,\&\, N_>(m)$, jenom když $a_m = l$.

Úloha 2.1.38. Ve třetí a čtvrté. Společný výraz není definovaný a krajní výrazy jsou, ale s různými hodnotami.

Úloha 2.2.3. Upravte vhodně uvedený důkaz.

Úloha 2.2.4. Uvažte posloupnost, jež je rostoucím sjednocením klesajících posloupností.

Úloha 2.2.7. Navíc je třeba jen dokázat, že shora (zdola) neomezená posloupnost má podposloupnost s limitou $+\infty$ $(-\infty)$.

Úloha 2.2.10. Pro neomezený interval nemusí konvergentní podposloupnost vůbec existovat a pro neuzavřený může limita ležet vně.

Úloha 2.2.14. Plyne to z mocninných identit a monotonie mocniny, viz oddíl 2.3. Podobně rovnosti plynou z vlastností reálné mocniny v oddílu 2.3.

Úloha 2.2.15. Výsledek platí beze změny dále, jen je třeba aditivní Feketeho lemma rozšířit na posloupnosti $(b_n) \subset \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ a použít vyjádření $0 = 2^{-\infty}$.

Úloha 2.2.17. Bez podmínky $a_i \ne a_{i+1}$ by $aaa\dots$ bylo nekonečné slovo neobsahující vzor $abba$. Pro zakázaný vzor $p = aabb$ argument s Feketeho lemmatem selhává: když jsou u a v dvě slova nad disjunktními abecedami, která neobsahují p, pak jejich zřetězení uv může p obsahovat.

Úloha 2.2.18. $\dots < \varepsilon \rightsquigarrow \dots < |x| + (1 + |y|)\varepsilon$. Podobně pro nekonečna.

Úloha 2.2.22. Například $a_n = 1$ pro $n \ne m^2$, $a_{m^2} = 2$.

Úloha 2.3.2. Tyto hodnoty jsou postulovány v definici. Když $(b_n) = (-1/n) \subset \mathbb{Q}$, pak $b_n \to 0$, ale 0^{b_n} není podle kroku 3 pro $n > 1$ definovaná. Limitní definice 0^0 proto nefunguje, ale 0^0 jako $0^{0/q}$ je bez problému.

Úloha 2.3.3. (i) První odmocnina z a je a. (ii) Vzhledem ke zlomkům v základním tvaru se stačí omezit na případ $p = kr$, $q = ks$ s $k \in \mathbb{N}$. Ovšem když $b^2 = a$, $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, pak i $b^{2k} = a^k$, a tak dál. Podobně se dokáže (iii), že $\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$. (iv) Trivialita.

Úloha 2.3.5. Ano, v každé ze tří identit: $((-1)(-1))^{1/2} = 1^{1/2} = 1$, ale $(-1)^{1/2} = N$, $(-1)^{1/2+1/2} = (-1)^1 = -1$, ale $(-1)^{1/2} = N$, a $0^{(-1)0} = 1$, ale $(0^{-1})^0 = N$.

Úloha 2.3.6. Už jsme to dokázali v důkazu.

Úloha 2.3.8. Vše vychází z nerovnosti $a, b > 1 \Rightarrow ab > 1$. Pro $\alpha = 0$ je každá mocnina 0 a pro $\alpha < 0$ se nerovnost obrátí. Pro $a = 1$ resp. $a = 0$ je každá mocnina 1 resp. 0 (pro $\alpha > 0$) a pro $0 < a < 1$ se nerovnost obrátí.

Úloha 2.3.13. Nechť třeba $a > 1$ a $0 < b < c$ jsou reálná čísla. Z $a^b = \lim a^{b_n}$ pro zlomky $b_n \to b$ a podobně pro a^c máme z monotonie mocniny se zlomkovými exponenty a z monotonie limity nerovnost $a^b \le a^c$. Ostrá nerovnost plyne z toho, že $a^{c_n - b_n} > a^d > 1$ pro $c_n - b_n > d > 0$, $d \in \mathbb{Q}$.

Úloha 2.3.14. Pak $\lim a_n^{b_n} = 0^b = 0$.

Úloha 2.3.15. Dokažte to nejprve pro $r = 1$ a pak iterujte. Použijte, že pro každé prvočíslo p je $\binom{p}{i}$ pro $0 < i < p$ dělitelný p.

Úloha 2.3.18. Využijte vztah $(1/a)^c = a^{-c}$.

Úloha 2.3.19. $(\log_a b)(\log_b a) = 1$.

Úloha 2.3.21. Logaritmus je iracionální, právě když podíly exponentů týchž prvočísel v prvočíselných rozkladech čísel m a n nejsou všechny stejné.

Úloha 2.3.23. Vyjde 2. Tedy požadovaným příkladem je daná mocnina nebo mocnina, jež je jejím základem.

Úloha 2.3.25. Modulo 11 je $7^2 \equiv 5, 7^4 \equiv 3, 7^8 \equiv 9, 7^{16} \equiv 4, 7^{32} \equiv 5$ a dál se to opakuje. Tedy z $1000 = 512+256+128+64+32+8$ máme $7^{1000} \equiv 5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \equiv 9 \cdot 5 \cdot 1 \equiv 1$. Ale $7^{10} \equiv 1$ (podle tzv. *Malé Fermatovy věty* $a^{p-1} \equiv 1$ modulo p pro každé prvočíslo p a $a \in \mathbb{Z}$ nedělitelné p), takže $7^{1000} = (7^{10})^{100} \equiv 1^{100} = 1$.

Úloha 2.3.27. Použijte záporné exponenty.

Úloha 2.4.2. Komutativita platí z definice. Asociativita platí rovněž, $a + (b + c) = (a + b) + c$ nebo ani jedna strana není definovaná a podobně pro násobení. Distributivita se ztrácí: $(1+0)(+\infty) = +\infty$, ale $1(+\infty)+0(+\infty)$ není definováno.

Úloha 2.4.8. Pak $0^{+\infty} := \lim a_n^{b_n} = 0$ a $0^{-\infty} := \lim a_n^{b_n} = +\infty$.

Úloha 2.4.14. Stačí. Např. $(-1, 0, 1, -2, -\frac{3}{2}, -1, \ldots, \frac{3}{2}, 2, -3, -3 + \frac{1}{3}, \ldots, 3 - \frac{1}{3}, 3, -4, \ldots, \ldots)$.

Úloha 2.4.17. Že $\liminf \le \limsup$ je jasné, stejně jako že při ostré nerovnosti lim neexistuje. Je též jasné, že když lim existuje, nastává rovnost. Nejzajímavější je ukázat, že neexistence lim implikuje $\liminf < \limsup$.

Úloha 2.4.20. Funguje, v $\mathbb{R}^*$ je $\sup(\emptyset) = \min \mathbb{R}^* = -\infty$.

Úloha 2.6.1. Jednoduše se vidí, že $\Pr(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ a $\Pr(B) = \frac{2 \cdot 2}{4!} = \frac{1}{6}$.

Úloha 2.6.2. Patrně $r(n) \le n$. Když $A \subset [m + n]$ neobsahuje AP délky 3, pak ani $A \cap [m]$ ani $A \cap [m+1, m+n]$ tuto AP neobsahuje, což dává subaditivitu $r(n)$.

Pro delší zakázané AP se nic nemění. Výsledek, že $R = 0$ je známá Rothova věta dokázaná v r. 1952 v [125].

Úloha 2.6.3. Supermultiplikativitu $f(n)$ ukažte pomocí operací s permutacemi $\kappa \oplus \lambda$ a $\kappa \ominus \lambda$: $\oplus$ (resp. $\ominus$) umístí kopii permutace λ vpravo nad (resp. vpravo pod) permutaci κ. Že vždy $P < \infty$ dokázali v r. 2004 A. Marcus a G. Tardos [96].

Úloha 2.6.4. Podobně jako v předchozí úloze dokažte supermultiplikativitu a_n: položte vedle sebe dva meandry, na $2m$ vrcholech a na $2n$ vrcholech, a propojte je tak, že vznikne meandr na $2m + 2n$ vrcholech. M. Albert a M. Paterson v r. 2005 v [1] dokázali meze $11.38 \le M \le 12.901$. Odhad $M \le 16$ plyne ze zřejmé nerovnosti $a_n \le b_n^2$, kde b_n je počet NC párování na vrcholech $[2n]$, jenž je dán Catalanovým číslem $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Úloha 2.6.5. Narozdíl od dvou předchozích úloh teď dokažte submultiplikativitu p_n: cesta délky $m + n$ se snadno rozdělí na cestu délky m a cestu délky n. Jaká vlastnost grafu G se přitom využije? $C \le 3$ vyplývá ze čtyřregularity G. Vypočítatelnost C algoritmem je důsledek výsledku J. Hammersleyho a D. Welshe v r. 1962 v [60] (i když to v jejich článku není příliš zřetelně napsáno).

Úloha 2.6.6. Že $f(n) \ge 3n - 2$ dosvědčují slova tvaru 1212323434. Opačná nerovnost plyne indukcí podle n. Nechť u je nad n-prvkovou abecedou a splňuje (i) a (ii). Když se v u nějaký symbol vyskytuje alespoň čtyřikrát, jiný symbol x se vyskytuje jen jednou a snadno se x úplně zbavíme vyhozením nejvýše dvou členů z u (tak, že se (i) a (ii) neporuší). Totéž se udělá, když se první či poslední člen u vyskytuje jako symbol třikrát. Když se první člen u rovná poslednímu, má u délku $\le 2n - 1$. Tedy první a poslední člen u se liší, vyskytují se každý nejvýše dvakrát a každý symbol se vyskytuje nejvýše třikrát — $|u| \le 3n - 2$. To je extremální kombinatorika.

Úloha 2.6.7. $1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$ a $1+x^2+x^4 = (1+x+x^2)(1-x+x^2)$.

Úloha 2.6.8.

Úloha 2.6.9. 1. 1, $+\infty$ (návod: odhadněte $(n/(n+1))^n$ Bernoulliovou nerovností) a $-\infty$ (návod: $(n/(n-5))^{3n+5} < c < +\infty$, protože $((n-5)/n)^{3n+5} > c > 0$ díky Bernoulliově nerovnosti). 2. -7, $\frac{1}{2}$ (návod: čitatel je $n(n+1)/2$) a 0 (návod: rozdíl čtverců). 3. $-\infty$, 0 a 5 (návod: konečná binomická věta).

Úloha 2.6.10. Podělte $(n + 1)$-tý člen této posloupnosti n-tým.

Úloha 2.6.11. 1. -1, $-\infty$ a 0. 2. $\frac{a+b}{2}$ (návod: rozdíl čtverců), neexistuje a neexistuje. 3. 0, $-\infty$ (návod: nikoli rozdíl čtverců, ale vytkněte $\sqrt{n}$) a $+\infty$.

Úloha 3.1.4. Pro $N = 1$ máme prázdný součin, který se obvykle z dobrých důvodů definuje jako 1. Součet je 1 a máme rovnost. Kdybychom zde prázdný součin definovali třeba jako 2, měli bychom ostrou nerovnost i v Sylvesterově nerovnosti.

Úloha 3.1.5. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ v $\sum b_n = \sum a_{k+n}$ (zbytek řady $\sum a_n$) stále $\lim b_n = 0$ a $\sum b_n = +\infty$.

Úloha 3.1.6. Posloupnost (s_n) je eventuálně konstantní.

Úloha 3.1.8. Selže poslední a tedy i druhá.

Úloha 3.1.11. Vytkněte q^m.

Úloha 3.1.12. Vektor uběhne

$$\frac{2}{3}\left(a + \frac{a}{3} + \frac{a}{3^2} + \dots\right) = a = 10 \cdot \frac{a/2}{5} \text{ km} .$$

Úloha 3.1.15. Podle Cauchyova kondenzačního kritéria a konvergence $\zeta(s)$ řada konverguje, právě když $\alpha > 1$.

Úloha 3.1.17. Viz důkaz konvergence řady pro zeta funkci.

Úloha 3.1.21. Pro částečné součty s_n řady $\sum(-1)^{n+1}a_n$ je $s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \dots$, $s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \dots$ a $s_{2n-1} \geq s_{2m}$, takže $\lim s_{2n-1} = \lim s_{2n} = \lim s_n \in \mathbb{R}$.

Úloha 3.1.23. Aritmetika limit aplikovaná na posloupnosti částečných součtů. Protipříkladem je třeba $\sum(1-1)$.

Úloha 3.1.27. Stačí předpokládat, že (a_n) je omezená (samozřejmě při $a_n, b_n \geq 0$), pak $\sum a_n b_n$ stále konverguje.

Úloha 3.1.28. Např. $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 1$ a $a_n = b_n = 0$ pro $n > 2$. Např. $a_1 = b_1$ a $a_n = b_n = 0$ pro $n > 1$. Pak $\sum a_n b_n < \sum a_n \sum b_n$.

Úloha 3.1.29. Např. $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ a $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

Úloha 3.1.32. Nelze.

Úloha 3.1.34. Postupujte podobně jako v páté části věty 3.1.31.

Úloha 3.2.2. Pro $|q| < 1$, zde není rozdíl ve srovnání s obyčejnou konvergencí.

Úloha 3.2.3. Řada konverguje absolutně pro $s > 1$, podmíněně pro $0 < s \leq 1$ a pro $s \leq 0$ diverguje.

Úloha 3.2.5. Uvažte $(a_1 + \cdots + a_n) - (|a_1| + \cdots + |a_n|)$ a $(a_1 + \cdots + a_n) + (|a_1| + \cdots + |a_n|)$.

Úloha 3.2.6. Díky tomu, že $|a_n b_n| \leq |b_n|$ pro $n > n_0$.

Úloha 3.2.11. 1 pomocí Dirichletova kritéria, $|\sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n| < c$ se dokáže pomocí $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. 2 pomocí Abelova kritéria. 3 Abel a 4 Dirichlet. Pomocí Leibnizova kritéria a lineární kombinace řad.

Úloha 3.2.16. Naznačíme, jak přerovnat neabsolutně konvergentní řadu, aby neměla součet, dosažení součtů $\pm\infty$ je podobné. Jistý částečný součet kladných členů přeroste 1, přidáním částečného součtu záporných členů se dostaneme pod -1, pak přidáme dost kladných členů, až se dostaneme zpět nad 1, a tak dále.

Úloha 3.2.17. Vzdálenost částečného součtu $a_{p(1)} + \cdots + a_{p(n)}$ s $n < |K_1|$ a α nedokážeme odhadnout sčítancem řady.

Úloha 3.2.18. Že je stejný jako $\sum a_n$.

Úloha 3.2.24. Součin k řad $\sum_{i\in X_j} a_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, je řada

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in X_1\times\cdots\times X_k} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}\ .$$

Důkaz induktivně z případu $k = 2$.

Úloha 3.2.25.

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_k b_l = \sum_{(1,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_1 b_l + \sum_{(2,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_2 b_l + \cdots = a_1 b + a_2 b + \cdots = ab\ .$$

Úloha 3.2.28. Uvažte řady $\sum_{n\in X_1} a_n = \sum_{n\in X_2} a_n = \cdots = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \ldots$.

Úloha 3.2.30. Každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, je dělitelné nějakým prvočislem — to plyne z principu indukce — a tedy je součinem mocnin různých prvočísel. Kdyby tato vyjádření nebyla jednoznačná, platila by ostrá inkluze, některé sčítance $\frac{1}{n}$ bychom dostali vícekrát. Ale ona jednoznačná jsou, podle Základní věty aritmetiky, takže skutečně platí rovnost řad.

Úloha 3.3.1. Podíly po sobě jdoucích sčítanců porovnejte s 1.

Úloha 3.3.10. Uvažte rovnice $x^2 = 1$ a $x^2 = 2$.

Úloha 3.3.15. Uvažte zlomek $1 + 1/1! + \cdots + 1/a!$.

Úloha 3.3.18. $\sum_{k\ge 0} \lambda^k/k! = e^\lambda$.

Úloha 3.3.19. e^{-1} je asi 37%.

Úloha 3.4.3. Na Maiselově radnici v Josefově.

Úloha 3.4.5. Nemůže, protože body A, B a C neleží na jedné přímce.

Úloha 3.4.6. Výraz určující orientaci trojúhelníka je determinant 2×2 matice. Některé volné rovinné pohyby odpovídají násobení 2×2 maticemi.

Úloha 3.4.7. Na Möbiově pásce nebo jiné neorientované ploše.

Úloha 3.4.9. Je-li ℓ daná rovnicí $y - ax - b = 0$, pak na jedné straně od ní leží body (x, y) splňující $y - ax - b > 0$ a na druhé body splňující $y - ax - b < 0$.

Úloha 3.4.10. $\emptyset$, jednobodovky, uzavřené oblouky kladné délky menší než 2π, tyto bez jednoho či obou konců, C bez jednoho bodu a konečně celá C.

Úloha 3.4.12. 1. Konečnost $|O|$ plyne z horního odhadu v úloze 3.4.15. Monotonie plyne z 2. 2. Monotónní lomennou čáru vepsanou C a spojující konce O lze zjemnit, aby procházela konci oblouků O_i. 3. Délka úsečky se otočením nezmění. A rotací oblouku vznikne zase oblouk.

Úloha 3.4.13. F se definuje jistou 2×2 maticí $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ s determinantem 1 jako $F(v) = Av$, kde $v \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2\times 1}$ je sloupcový vektor.

Úloha 3.4.14. Pro $\delta > 0$ a oblouk O s $0 < |O| < 2\pi$ ho na obou koncích trochu natáhneme, čímž vznikne oblouk O^δ, který obsahuje O uvnitř a splňuje $|O| < |O^\delta| < (1+\delta)|O|$. Klíčové lemma je, že pro každý oblouk O s $|O| > 0$, jeho každý spočetný rozklad $O = O_1 \cup O_2 \cup \dots$ na oblouky a každé $\delta > 0$ existuje konečná množina indexů $I \subset \mathbb{N}$, že $O \subset \bigcup_{n \in I} O_n^\delta$. Tím se vše převede na část 2 úlohy 3.4.12. Využíváme tu kompaktnost uzavřeného oblouku: jeho každé otevřené pokrytí má konečné podpokrytí.

Úloha 3.4.15. Nechť ℓ je dána rovnicí $y = 1 - h \in [0, 1]$. Délka tětivy na O je větší než x-ová vzdálenost jejích konců a menší než součet x-ové a y-ové vzdálenosti.

Úloha 3.4.17. Použijte předchozí úlohu.

Úloha 3.4.18. $-1/\sqrt{2}$.

Úloha 3.4.26. $\sin t = \frac{1}{2i}(\exp(it) - \exp(-it))$ a $\cos t = \frac{1}{2}(\exp(it) + \exp(-it))$.

Úloha 3.4.27. Pomocí řad rozšíříme $\sin t$ a $\cos t$ na $t \in \mathbb{C}$. Pak Eulerova identita č. 2 stále platí. Vzorce z předchozí úlohy dávají $\sin i = \frac{1}{2i}(1/e - e) = i(e - 1/e)/2 = (1.175\dots)i$ a $\cos i = \frac{1}{2}(1/e + e) = 1.543\dots$.

Úloha 3.4.29. Situaci můžeme zjednodušit tak, že běžec, jehož osamění se má dokázat, má nulovou rychlost a tedy stojí v $(1, 0)$. Ostatní dva běžci běží různými nenulovými (teď už ne nutně kladnými) rychlostmi. Je třeba ukázat, že se někdy oba současně budou nalézat v úhlové oblasti $[2\pi/3, 4\pi/3]$ kružnice C.

Úloha 3.4.31. Použijte indukci podle počtu vrcholů.

Úloha 3.4.32. Když $j, j' \in \mathbb{N}$ jsou nekongruentní modulo b, jsou taková i čísla $ja + c$ a $j'a + c$.

Úloha 3.5.1. Identita $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) = a_1 - a_n$ prý připomíná skládací námořnický dalekohled.

Úloha 3.5.2. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ a $\csc x = \frac{1}{\sin x}$.

Úloha 3.5.4. Pomocí geometrické definice sinu a kosinu v oddílu 3.4. Použijte definici délky oblouku pomocí lomenných čar. Převeďte vše na nerovnosti mezi délkami úseček (či lomenných čar). Pěkné cvičení z geometrie.

Úloha 3.5.7. Pro $k \in [n]$ je $\sum_{X \subset [n],\, |X| = k} \prod_{i \in X} \alpha_i = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$, stejné porovnání koeficientů u x^{n-k} jako pro $k = 1$.

Úloha 3.6.4. V rozkladu množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ uvažte blok obsahující 1.

Úloha 3.6.7. Plyne to vlastně jen z absolutní konvergence exponenciály $1 + \sum x^n/n!$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ (díky podílovému kritériu). To dává absolutní konvergenci řad v obou důkazech. V prvním to je jasné. Druhý je nutné číst odzadu a jako důsledek plyne, že $\sum b_n x^n/n!$ je absolutně konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Úloha 3.6.8. Nahraďte $s_{n,k}$ číslem $(-1)^k s_{n,k}$.

Úloha 3.6.9. $\lim_{x \to +\infty} e^{1 - e^x} = ?$

Úloha 3.6.10. Odvoďte pro u_n rekurenci podobnou té pro b_n. Když už víme, že $u_n \neq 0$ nekonečně často, pak tato rekurence ukazuje, že $u_n > 0$ ani $u_n < 0$ nemůže platit pro všechny $n > n_0$.

Úloha 3.6.13. Kvadratické iracionality v závorkách jsou kořeny polynomu $x^2 - x - 1$.

Úloha 3.6.14. Pro záporné $n \in \mathbb{Z}$ vyjde $f_{-1} = 0$ a $f_n = (-1)^n f_{-n-2}$ pro $n < -1$. Tedy pro $n \in \mathbb{Z}$ je $f_n = 0 \iff n = -1$.

Úloha 3.6.16. Stačí, aby rovnost platila pro každé $x = x_n$, kde $(x_n) \subset \mathbb{R}$ splňují $x_n \neq 0$ a $\lim x_n = 0$.

Úloha 3.6.19. Spíš ne, viz [157].

Úloha 3.6.25. Bijekce se hned nahlédne vkládáním $k-1$ oddělovátek do mezer mezi n čárkami.

Úloha 3.7.1. $a_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2}-1)^n$.

Úloha 3.8.1. 1. Částečné součty řady $\sum b_n$ jsou podposloupností částečných součtů řady $\sum a_n$. 2. Částečné součty řady $\sum a_n$ se od posloupnosti částečných součtů řady $\sum b_n$ liší o chybu jdoucí k 0.

Úloha 3.8.2. Například $(1-1)+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3})+\dots$. Zde $\sum b_b = 0+0+\cdots = 0$, ale $\sum a_n$ nemá součet, i když splňuje nutnou podmínku konvergence.

Úloha 3.8.3. Viz třeba heslo „ratio test“ ve Wikipedii.

Úloha 3.8.4. Použijte předchozí úlohu.

Úloha 3.8.5. Koeficienty b_n volte hladově tak, aby částečný součet řady byl zdola co nejblíže α.

Úloha 3.8.6.

$$\cosh(e^x - 1) = \frac{e^{e^x-1} + e^{1-e^x}}{2}\ .$$

Úloha 3.8.7. $\frac{1}{1-x-x^2-x^3}$.

Úloha 3.8.8. $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$.

Úloha 3.8.9. Bijekce je popsána na str. 372 knihy [54] I. P. Gouldena a D. M. Jacksona, jde o úlohu 2.5.12.

Úloha 3.8.10. Plyne to hned z rekurence pro f_n a definice maticového násobení. Označíme-li uvedenou 2×2 matici jako M a sloupec napravo jako F_n, máme $F_{n+1} = M^n F_1$ (proč?). Mocnina M^n se spočte binárním mocněním jako ve větě 2.3.24.

Úloha 3.8.11. Viz heslo „Viète's formula“ ve Wikipedii.

Úloha 3.8.13. Odečtěte $B_1 x$ a porovnejte hodnoty v x a v $-x$. Pošlete x k $2\pi i$.

Úloha 3.8.14. Na $(0,1)\cup(1,+\infty)$, protože tam konverguje řada vpravo (podle Leibnizova kritéria) a faktor u $\zeta(s)$ není 0. Rovná se $(1-1/\sqrt{2})^{-1}\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Úloha 3.8.15. Sjednocení dvou periodických množin je periodická množina (proč?) a doplněk množiny do $\mathbb{Z}$ také zachovává periodičnost. Ale žádná neprázdná konečná podmnožina $\mathbb{Z}$ není periodická. Tento důkaz pochází od Casse a Wildenberga [31], kteří jím zjednodušili tzv. topologický důkaz nekonečnosti počtu prvočísel od Furstenberga [51].

Úloha 3.8.16. Po dosazení rozvoje logaritmu a přeskupení sčítanců stačí jen použít identitu $\sum_{d\,|\,n}\mu(d)=0$ pro $n>1$.

Úloha 3.8.17. Použijte indukci podle n.

Úloha 3.8.18. Položte $a_0=1$, $a_1=x$, $a_2=x/2$ a tak dál. Zlomky stačí rozšířit vhodnými činiteli. V této a předchozí úloze jsme čerpali z hesla [162] ve Wikipedii.

Úloha 3.8.19. Např. nádobu rozpůlíme rovinou rovnoběžnou s dolní stěnou, A je horní polovina nádoby a všechny částice se pohybují v dolní polovině rovnoběžně s půlící rovinou.

Úloha 4.1.2. Plyne snadno z definice okolí.

Úloha 4.1.4. Body vybrané z průniků $P(a,\frac{1}{n})\cap M$ vytvoří požadovanou posloupnost. Používáme ovšem axiom výběru. Naopak, je-li dána taková posloupnost, pak vždy $P(a,\delta)\cap M$ obsahuje skoro všechny její členy.

Úloha 4.1.6. Pak totiž $f(\emptyset)=\emptyset\subset$ cokoli.

Úloha 4.1.8. Neexistence limit v nekonečnech je jasná. Pro každé $a\in\mathbb{R}$ a $m\in\mathbb{N}$ existuje $\delta>0$, že v $P(a,\delta)$ neleží žádný zlomek se jmenovatelem $\leq m$.

Úloha 4.1.10. Použijte vyjádření sinu a kosinu řadami.

Úloha 4.1.12. Limitní bod je limitním bodem zprava nebo zleva, ale ne nutně oboustranně.

Úloha 4.1.16. Stejně jako důkaz části 1.

Úloha 4.1.18. Zde, je-li g nulová na nějakém prstencovém okolí a, přestane a být limitním bodem definičního oboru funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$. V ostatních případech se definiční obor nemění.

Úloha 4.1.21. Snad nejobecnější verze je tato. Nechť $\emptyset\neq M\subset\mathbb{R}$, $f\colon M\to\mathbb{R}$ je monotónní a bod $b=\sup(M)$ (kde může být i $b=+\infty$) je limitním bodem množiny M. Pak existuje limita $\lim_{x\to b}f(x)$. Podobně pro infimum.

Úloha 4.1.22. Důkaz je podobný důkazům tvrzení 2.1.25 a 2.1.28, na něž se dá větou 4.1.14 převést.

Úloha 4.1.25. Libovolně blízko u a máme $x\in M$, že $x\neq a$ a $f(g(x))=f(A)\neq B$, takže to je jasné.

Úloha 4.1.26. Když platí podmínka 1, je f definovaná na nějakém obyčejném okolí A a g do něj posílá každé x blízko u a. Platí-li podmínka 2, opět posílá g do N každé x blízko u a. Vždy, platí-li podmínka 1 či podmínka 2, je tedy a limitním bodem definičního oboru funkce $f(g(x))$.

Úloha 4.1.27. Například $g(x) = x$ pro $x \in (-1, 0)$ a $f(x) = x$ pro $x \in [0, 1)$. Pak $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ i $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ a jsou splněny obě podmínky 1 a 2. Ale 0 není limitním bodem definičního oboru funkce $f(g(x))$, ten je totiž prázdný.

Úloha 4.1.28. Použijte definici spojitosti funkce v bodě, která má na obou stranách inkluze stejný typ okolí (obyčejné), takže to plyne z tranzitivity relace podmnožiny.

Úloha 4.1.30. Když pro $\delta > 0$ je b limitním bodem uvedené množiny, libovolně blízko u b najdeme body různé od b posílané f^{-1} dále než δ od a. Když to pro žádné $\delta > 0$ tak není, všechny body dostatečně blízko k b posílá f^{-1} do zvoleného $U(a, \delta)$.

Úloha 4.1.31. Že A je limitním bodem $f(M)$ plyne z limity f v a a z prostoty f (do A se f trefí nejvýše jednou). Z limity f v a a z prostoty f též plyne, že pro každé $\delta > 0$ posílá f^{-1} něco z $P(A, \delta)$ do $P(a, \delta)$. Pokud limita f^{-1} v A existuje, musí to tedy být a. Pokud ale f posílá nějaké body daleko od a libovolně blízko k A (což $\lim_{x\to a} f(x) = A$ nevylučuje), pak limita f^{-1} v A neexistuje. Příklady: $a = A = 0$ a $f(x) = x$ pro $x \in \mathbb{R}$ (limita f^{-1} v $A = 0$ je $a = 0$) a $f(x) = x$ pro $x < 0$ a $f(x) = x - 1$ pro $x > 1$ (limita f^{-1} v $A = 0$ neexistuje).

Úloha 4.2.2. Absolutní konvergence snadno plyne srovnávacím kritériem. Pro důkaz spojitosti této funkce využijte identitu $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$.

Úloha 4.2.3. Například funkce $f(x) = \frac{1}{x} \colon (0, 1) \to \mathbb{R}$ je spojitá, ale není lipschitzovská.

Úloha 4.2.5. Protože $f(a_n(1)) = f(a) < y < f(b) = f(b_n(n))$ a $a_n(i + 1) = b_n(i)$.

Úloha 4.2.6. Funce f je -1 na $[0, \frac{1}{2})$ a na $(\frac{1}{2}, 1]$ je 1. Tato funkce je spojitá! Druhý příklad podobně, s rozseknutím například v $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Úloha 4.2.9. Horolezec definuje dvě spojité funkce z $[0, 24]$ do $[0, +\infty)$. Uvažte jejich rozdíl.

Úloha 4.2.11. Jednoduché, ihned z definice.

Úloha 4.2.12. Sjednocení a průnik se vymění.

Úloha 4.2.13. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je obojetná, neprázdná a různá od $\mathbb{R}$. Pro $a < b$ z $\mathbb{R}$, $a \in M$ a $b \notin M$ (či naopak) v intervalu $[a, b]$ pomocí suprema vyrobte spor.

Úloha 4.2.17. Není to pravda. Uvažte $e^x \colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$.

Úloha 4.2.19. Ano, je to uzavřená a omezená množina.

Úloha 4.2.20. Plyne to z vlastností omezených a uzavřených množin.

Úloha 4.2.21. Je, je omezená a její doplněk je sjednocení otevřených intervalů. Není, není uzavřená.

Úloha 4.2.24. Pro například shora neomezenou M stačí vhodně prostřídávat a napojovat funkce $f(x) = x + a_n, -x + a_n$ (zúžené na M) pro nějaké konstanty $a_n \in \mathbb{R}$. Pro neuzavřenou M, z níž lze vykonvergovat do bodu $a \in \mathbb{R}\backslash M$, podobná konstrukce v okolí a místo $+\infty$.

Úloha 4.2.25. Třeba $f(x) = \frac{\sin(1/x)}{x}$ pro $x \in (0, 1]$, $f(0) = 0$.

Úloha 4.2.27. Je to hotel s pokoji $P_1, P_2, \ldots$, který i při 100% obsazenosti vždy dokáže ubytovat dalšího hosta. Recepční poprosí, pro každé $n \in \mathbb{N}$, hosta v P_n, aby se přestěhoval do P_{n+1}, a nově příchozího hosta ubytuje v uvolněném pokoji P_1.

Úloha 4.2.29. V předchozích krocích mohly z hodnot $f(n)$, $n \in A_k$, být definovány nejvýše $f(1), f(2), \ldots, f(k)$. Již použité hodnoty $f(n)$ tvoří nejvýše spočetnou množinu, takže každá nespočetná množina $P(f(k), \delta)$ obsahuje spoustu nepoužitých prvků.

Úloha 4.2.30. Důkaz funguje beze změny, ale abychom ukázali, že vždy můžeme zvolit racionální hodnoty f na A_k limitící k $f(k)$ a různé od již zvolených, musíme argumentovat jemněji, protože vše je teď spočetné a hypoteticky bychom si potřebné hodnoty mohli vyčerpat již v předchozích krocích. To se ale nikdy nemůže stát, předchozí hodnoty limití k bodům různým of $f(k)$, takže pro dostatečně malé $\delta > 0$ nebyl žádný zlomek z $P(f(k), \delta) \cap \mathbb{Q}$ ještě použit.

Úloha 4.2.32. To první je trivialita. Pro to druhé jako (b_n) vezměte podposloupnost, jejíž každý člen leží daleko od a.

Úloha 4.2.36. Máme $x = \log(\exp x)$ (ne však $\exp(\log x)$, ta má menší definiční obor) a odmocninu vytvoříme jako $\sqrt{x} = \exp(\frac{1}{2} \log x)$, což ale dá trochu menší definiční obor, $(0, +\infty)$ místo $[0, +\infty)$. Přísně vzato, $\sqrt{x}$ a tedy i danou funkci nejspíš nedokážeme vytvořit s plným definičním oborem, jen s trochu menším, pomíjejícím hodnoty $\sqrt{0} = 0$.

Úloha 4.2.37. Je to $\exp(\frac{1}{2} \log x^2)/x$.

Úloha 4.3.1. Některý z úseků $[0, 1], [1, 2], \ldots, [20, 21]$, nazvěme ho A, Tereza nutně uběhla za ≤ 4 minuty a jiný, nazvěme ho B, nutně uběhla za ≥ 4 minuty. Mezi A a B pak posouváme kilometrový úsek C a použijeme větu o mezihodnotě.

Úloha 4.3.4. Rozvrhla si běh podle modifikované funkce z tvrzení 4.3.3.

Úloha 4.3.5. $f(1)$ je jakákoli hodnota různá od $V(\emptyset)$, $f(2)$ je jakákoli hodnota různá od $V(f \,|\, [1])$, atd.

Úloha 4.4.2. Pro $0 < \delta < x \leq y$ odhadněte shora $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

Úloha 4.4.5. Například funkce $\sin(\frac{1}{1-x})$.

Úloha 4.4.9. Z identity $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ plyne, že nejde, stejnoměrnost se kazí u konců intervalu. A rovněž z ní plyne, že na každém intervalu $[a, b] \subset (-1, 1)$ je konvergence stejnoměrná.

Úloha 4.4.10. f_n na $[0, \frac{1}{n}]$ roste z 0 do 1 a padá zpět do 0 a na $[\frac{1}{n}, 1]$ je identicky nulová.

Úloha 4.4.16. $M = [0, 1]$, $f(0) = 1$, $f \equiv 0$ na $(0, 1]$, f_n spojité a konvergující k f, $f_1 \equiv 0$ na $[0, 1]$, $f_2(x) = 1 - x$, $X = \{1, 2\}$.

Úloha 4.4.17. Pro důkazy viz anglická Wikipedie nebo [148, věta 3.10] nebo [71, věta 163] (ve všech těchto zdrojích je $M = [a, b]$).

Úloha 4.5.2. Jak víme z lemmatu 3.1.19, vzdálenost n-tého částečného součtu a součtu je nejvýše $\frac{1}{2n-1}$. Posloupnost částečných součtů je tedy vyčíslitelným jménem čísla $\frac{\pi}{4}$. Různé odhady zbytku této řady uvádí D. Rattagi v [121].

Úloha 4.5.3. Je-li $q \in \mathbb{Q}$ hodně blízko u $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ je malé a racionální, racionální interval $[q - \varepsilon, q + \varepsilon]$ obsahuje α. Na druhou stranu, když $[q_1, q_2] \ni \alpha$, $q_i \in \mathbb{Q}$ a rozdíl $q_2 - q_1$ je malý, může každý z obou konců q_i posloužit ve jméně čísla α.

Úloha 4.5.4. Pouhá definice pomocí suprema délek vepsaných monotónních lomenic vyčíslitelnost π nedává. Dostaneme ji ale, když si pomůžeme odhadem pomocí délek opsaných monotónních lomenic.

Úloha 4.5.5. Můžeme předpokládat, že $p(\alpha) = 0$, kde $p \in \mathbb{Q}[x]$, a $p'(\alpha) \neq 0$. Půlte intervaly.

Úloha 4.5.6. Argumentujte podobně jako v důkazu věty o aritmetice limit.

Úloha 4.5.7. $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$.

Úloha 4.5.12. Podobně jako uvedený příklad.

Úloha 4.5.14. Speciální příkaz Turingova stroje nahraďte podprogramem pro vyčíslitelné jméno čísla β.

Úloha 4.6.1. 0, 0, $+\infty$.

Úloha 4.6.2. $-\infty$, neexistuje, 0.

Úloha 4.6.3. Ne, popírá to třeba funkce $f(x) = x$ pro $x \in [0, 1)$, $f(1) = 0$.

Úloha 4.6.4. Použijte posloupnostní definici kompaktnosti.

Úloha 4.6.5. Ne, pro $A = \emptyset$ to neplatí. Pro každou kompaktní $A \neq \emptyset$ to ovšem platí.

Úloha 4.6.6. Pro orientované úsečky spojující dva body obvodu mnohoúhelníka a vždy půlící tento obvod uvažte rozdíly velikostí dvou ploch po jejich stranách.

Úloha 4.6.7. Skládání (napojování) algoritmů.

Úloha 4.6.8. Pro nalezení racionální aproximace k α s pomocí orákula $O_{f(\alpha)}$ vezměte algoritmus, který počítá (blízké racionální) aproximace k hodnotám $f(\frac{i}{n})$ pro $i = 0, 1, -1, 2-2, 3, \dots$ (takový algoritmus lze získat úpravou algoritmu vyčíslujícího f) a porovnává je s odpovědí orákula $O_{f(\alpha)}$.

Úloha 4.6.9. 2:46:03, [67, str. 369]. Ano, [67, str. 386].

Úloha 5.1.3. $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $f'(a) = g(a)$.

Úloha 5.1.5. Jedno možné řešení: $V(\ell, B, \varepsilon) = \{a \in \mathbb{R}^2 \mid a = B \vee \sin(\frac{d(a,\ell)}{d(a,B)}) \leq \varepsilon\}$, kde $d(a, \cdot)$ je vzdálenost a od B, respektive od přímky ℓ.

Úloha 5.1.7. Dva dostatečně ostré úhly se společným vrchlem a různými osami jsou, až na vrchol, disjunktní.

Úloha 5.1.9. Pro úhly se svislou osou graf funkce nalevo od vrcholu leží v horní špičce úhlu a graf napravo v dolní nebo naopak.

Úloha 5.1.11. Ostrá lokální maxima vyplývají z toho, že dva různé zlomky se jmenovateli $\leq m$ mají vzdálenost $\geq m^{-2}$. Funkce má neostrá globální maxima právě v celých číslech a neostrá globální minima právě v iracionálních číslech. Derivace $f'(0)$ neexistuje, $f'_+(0) = -\infty$ a $f'_-(0) = +\infty$.

Úloha 5.1.13. Například, v pozměněné definici derivace, funkce $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, má $f'(0) = 1$ a současně ostré globální minimum v 0.

Úloha 5.1.17. $\frac{cf(x)-cf(a)}{x-a} = c\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Pro $c = 0$ platí jen implikace $\Leftarrow$.

Úloha 5.1.19. Použijte aritmetiku limit funkcí.

Úloha 5.1.20. Levá i pravá strana Leibnizova vzorce jsou výrazy symetrické v obou argumentech f a g (hodnota výrazu se jejich výměnou nezmění), takže skutečně předpoklad o f je totéž jako předpoklad o g.

Úloha 5.1.23. Neexistují. Ukážeme to pro Leibnizův vzorec, pro druhý vzorec argumentujeme podobně. Silný protipříklad by (vpodstatě) musel vypadat tak, že $f'(a) = g'(a) = +\infty$ a $g(a), f(a) > 0$, takže pravá strana vzorce je $+\infty$, ale v nějakém celém prstencovém okolí bodu a funkce $g(x)$ nabývá vlevo i vpravo od a a libovolně blízko u a pouze záporné hodnoty a to takovým způsobem, že výraz $D(f(x), a)g(x) + f(a)D(g(x), a)$, v němž diferenciální podíly $D(f(x), a)$ a $D(g(x), a)$ jdou oba do $+\infty$, jde ke konečnému h či k $h = -\infty$, tudíž $D(f(x)g(x), a)$ jde k h, což je levá strana vzorce, lišící se od pravé. Takové hodnoty funkce $g(x)$ ale vynucují $g'_-(a) = +\infty$ a $g'_+(a) = -\infty$, tedy $g'(a)$ v rozporu s předpokladem neexistuje.

Úloha 5.1.24. Použijte indukci a rozklad $x^n = x \cdot x^{n-1}$.

Úloha 5.1.32. Tvrzení 5.1.25 (derivace složené funkce) opravdu implikuje, že když $(f^{-1})'$ existuje, je vyjádřená z f' vztahem $(f^{-1})' = 1/f'(f^{-1})$. V rovnosti

$$(f(g))'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

tvrzení 5.1.25 se ale předpokládá existence obou činitelů vpravo a odvodí se existence hodnoty vlevo. Pro odvození existence derivace funkce $g = f^{-1}$ v daném bodě (což tvrdí tvrzení 5.1.28) bychom ale potřebovali mít výsledek s předpokladem existence hodnoty vlevo a prvního činitele vpravo. To ale není, co tvrzení 5.1.25 říká. Podle autorova názoru tak přísně vzato vzorec pro derivaci funkce f^{-1} ze vzorce pro derivaci složené funkce $f(g)$ neplyne, existenci derivace funkce f^{-1} nelze předpokládat, měla by z tvrzení 5.1.25 vyplynout, což se neděje.

Úloha 5.1.34. $f'(a)$ neexistuje v žádném nenulovém zlomku a, protože platí $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, ale $f'(0) = 0$.

Úloha 5.1.38. Např. pro $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ je $\cos' x$ limita, pro $h \to 0$, z $(\cos(x + h) - \cos x)/h = -(\cos(-x - h) - \cos(-x))/(-h)$ (použili jsme rovnost $\cos x = \cos(-x)$), což je $-(-\sin(-x)) = -\sin x$, podle derivace kosinu v $x > 0$ a rovnosti $\sin(-x) = -\sin x$.

Úloha 5.1.39. Podobný geometrický argument, jako pro kosinus.

Úloha 5.1.41. Komplexní taková funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se udělá snadno: $f(x) = e^{\alpha x}$, kde α je primitivní k-tá odmocnina z 1. Zkuste ji nějak zreálnit lineárními kombinacemi.

Úloha 5.1.43. Není ani prosté ani na, derivace konstanty je nulová konstanta a na x^{-1} se nic nezobrazí.

Úloha 5.1.44. $P(x, f(x)) = 0$ na M, právě když $P(f^{-1}(y), y) = 0$ na N.

Úloha 5.1.46. Třeba pro e^x: u $+\infty$ vždy $x^k/e^x \to 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, takže u $+\infty$ v každé (konečné) lineární kombinaci monomů $a_{k,l}e^{kx}x^l$, $k, l \in \mathbb{N}_0$ a $a_{k,l} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, právě jeden dominuje

Úloha 5.2.2. Každou konečnou posloupnost intervalů lze prodloužit do nekonečné za cenu jen, například, dvojnásobného zvětšení celkové délky.

Úloha 5.2.3. Díky tvrzení 5.1.8. A taky proto, že takováto funkce nemůže mít nikde nevlastní derivaci.

Úloha 5.2.4. Uvažte transformaci nahrazující $f(x)$ funkcí $\alpha f(\beta x + \gamma)$.

Úloha 5.2.5. Délka úsečky v lomené čáře je $\le$ součet dvou absolutních hodnot, $|$rozdíl x-ových$|$ plus $|$rozdíl y-ových$|$ souřadnic jejích konců. Podle předpokladu o f je druhá absolutní hodnota menší či rovna první.

Úloha 5.2.6. Vezměte konvergentní posloupnosti $(x_n), (x_n') \subset I$, že vždy platí $\varphi(x_n, x_n') \ge \varepsilon$ a vzdálenosti $|x_n - x_n'|$ jdou k jistému supremu.

Úloha 5.2.7. Pro každé $\alpha, \beta, a, b > 0$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\beta + (\alpha/\beta)\alpha}{\sqrt{1 + (\alpha/\beta)^2}} \ \text{ a } \ b + \frac{\alpha}{\beta}a = \sqrt{a^2 + b^2}\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\frac{a}{b}\right)/\sqrt{1 + (a/b)^2}\ .$$

Úloha 5.2.8. Pro každé α je $\alpha \le (1 + \alpha^2)/2$.

Úloha 5.2.9. Obecně musí. Nemusí se uvažovat, je-li intervalů $K_m^{(j)}$ konečně mnoho. Je-li jich nekonečně mnoho (konstrukce nikdy neskončí), mohou k x limitit a x' blízkými k x se jim nelze vyhnout.

Úloha 5.3.2. (i) $f(x) =$ signum na $[-1, 1]$ „zkosené“ tak, že $f(-1) = f(1) = 0$. (ii) $f(x) = |x|$ na $[-1, 1]$. (iii) $f(x) = x$ na $[-1, 1]$.

Úloha 5.3.5. $(x^k \log(x + b))' = kx^{k-1} \log(x + b) + x^k/(x + b)$.

Úloha 5.3.6. Podíváme se na nejmenší i, že p_i je nenulový a pracujeme zprava u b_i místo u 0.

Úloha 5.3.7. Pokud $F(x)$ m-krát zderivujeme a výsledek vynásobíme vhodným polynomem (jde ovšem o to, jakým přesně), dostaneme funkci $G(x)$ opět daného tvaru, v níž má $\log(x + b_0) = \log x$ polynomiální koeficient, který už v 0 nemá kořen.

Úloha 5.3.8. Přenásobte polynomem $(n - n_0)(n - n_0 - 1) \ldots (n - 1)$.

Úloha 5.3.9. $A = (a_n) \subset (0, 1)$, kde $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \cdots < 1$ a $\lim a_n = 1$, $f(x) = x - a_{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (a_{n-1}, a_n)$, a $f(0) = f(1) = 0$.

Úloha 5.3.13. Nechť $A = \{\frac{1}{2}\}$ a $f(x) = x$ na $[0, \frac{1}{2})$ a $f(x) = x - 1$ na $(\frac{1}{2}, 1]$, pak $f' \equiv 1$.

Úloha 5.3.17. Protože $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(d)$ pro nějaké d.

Úloha 5.3.18. To je jednoduché.

Úloha 5.3.19. Vezmeme grafy obou funkcí na $[a, b]$. V nějakém $c \in (a, b)$ jsou směrnice tečen ve stejném poměru jako směrnice sečen jdoucích konci grafů.

Úloha 5.3.20. $h'(x)$ je lineární kombinace $f'(x)$ a $g'(x)$, mohli bychom tak dostat neurčitý výraz.

Úloha 5.3.22. Protože ve větě 5.3.21 je silnější předpoklad vlastní derivace, kdežto věta 5.3.10 povoluje i nevlastní derivace.

Úloha 5.3.23. Výraz $\frac{b_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_n)}$ má v $x = a_0$ hodnotu b_0 a v ostatních a_i s $i > 0$ hodnotu 0.

Úloha 5.3.24. Protože se rovná součinu všech rozdílů $x_j - x_i$ s $0 \le i < j \le n$. Tento vzorec je známý jako tzv. Vandermondův determinant.

Úloha 5.3.33. Příkladem je konvexní funkce $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, identicky nulová na $[0, 1)$ ale s hodnotou $f(0) = 1$.

Úloha 5.3.35. Z ostré nerovnosti mezi směrnicemi plyne, že bod $(x_3, f(x_3))$ leží nad přímkou jdoucí body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$. Musíme ji tedy otočit kolem $(x_1, f(x_1))$ v kladném smyslu, aby ...

Úloha 5.5.2. Plyne přímočaře z definice Taylorova polynomu.

Úloha 5.6.2. Silou zhruba $6.7 \cdot 10^{-11}(10^3)^2/(10^{-2})^2 = 0.67$ newtonu — to zase není tak málo. Po 1 s se oba hmotné body proti sobě pohybují rychlostí > 0.6

mm/s a do 10 s se určitě srazí. Ovšem látka s hustotou přes 1570 kg/cm^3, aby jedna její tuna zabrala kuličku s poloměrem půl centimetru (či méně), se nikde na Zemi nenachází. Platina, iridium či osmium mají hustotu něco přes 20 g/cm^3, transurany nejvýše ke 40 g/cm^3 a v zemském jádře hustota nepřesahuje 13 g/cm^3. Látku s požadovanou hustotou byste ale našli na tzv. bílých trpaslících, o neutronových hvězdách nemluvě.

Úloha 5.6.3. Silou méně než $6.7\cdot 10^{-11}\cdot 250000\cdot 100/10^2 = 1.675\cdot 10^{-5}$ newtonu a více než $1.6\cdot 10^{-5}$ newtonu. Pro vzdálenost 9 m je tato síla méně než $2.1\cdot 10^{-5}$ newtonu. Po 15 min < 1000 s taková síla udělí turistovi rychlost méně než $1000\cdot 2.1\cdot 10^{-5}/100 = 2.1\cdot 10^{-4}$ metru za sekundu (obelisku mnohem méně), kterou se přemístí z výchozí polohy o méně než $1000\cdot 2.1\cdot 10^{-4} = 0.21$ metru. Předpoklad o vzdálenosti neklesající pod 9 metrů tak je splněn. Obelisk a turista se tedy určitě za čtvrt hodiny nesrazí. Na druhou stranu ale turista bude po 10 hod > 30000 s mít rychlost více než $30000\cdot 1.6\cdot 10^{-5}/100 = 4.8\cdot 10^{-3}$ metru za sekundu. Za další hodinu se touto rychlostí (která samozřejmě narůstá) tak přemístí o vzdálenost více než $3000\cdot 4.8\cdot 10^{-3} = 14.4$ metru. Nutně se proto než uplyne 11 hodin srazí s obeliskem.

Úloha 5.6.4. Po dosazení do gravitačního zákona pro dvě částice a zderivování dostaneme pro c rovnici $-c^2 = -2$, z níž vypočteme, že $c = \sqrt{2}$. Oběžná doba tak je $2\pi/c \doteq 4.4$ sekundy.

Úloha 5.6.5. Železo má hustotu asi 7800 kg/m^3. Krychlička s objemem 10^{-9} m^3 tedy obsahuje asi $7.8\cdot 10^{-6}$ kilogramu neboli $7.8\cdot 10^{-3}$ gramu železa. Molární hmotnost železa v g/mol je asi 56. Krychlička tedy obsahuje asi $7.8\cdot 10^{-3}\cdot 56 =$ 0.43 molu železa. Jeden mol látky obsahuje asi $6\cdot 10^{23}$ jejích atomů či molekul (Avogadrova konstanta). Ionizovaná krychlička tak obsahuje asi $26\cdot 0.43\cdot 6\cdot 10^{23} = 6.7\cdot 10^{24}$ protonů, protože atomové číslo (počet protonů v jádře) železa je 26. Proton má elektrický náboj asi $+1.6\cdot 10^{-19}$ coulombu. Každá z obou krychliček má tedy kladný náboj zhruba $6.7\cdot 10^{24}\cdot 1.6\cdot 10^{-19} = 1.1\cdot 10^{6}$ coulombu. Podle C. zákona se odpuzují silou asi $9\cdot 10^9(1.1\cdot 10^6)^2/1^2 = 1.1\cdot 10^{22}$ newtonů. To je více než 0.0001 váhy celé Země, která má hmotnost asi $6\cdot 10^{24}$ kilogramů a váhu v newtonech zhruba desetkrát větší.

Úloha 5.6.9. Ukažte, že $\dot{H} = (0, 0, 0)$, sečtením přes všechny dvojice různých čísel i, j v Coulombově zákonu.

Úloha 5.6.13. Pro $n = 1$ je suma v soustavě dif. rovnic v definici 5.6.6 prázdná, tedy rovná 0, tudíž $\dot{v}_1 = 0$ a $v_1(t)$ je konstantní funkce.

Úloha 5.8.5. Dvojí zderivování (jako v úloze 5.6.4) ukazuje, že nové částice budou dif. soustavu jistě splňovat, když $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ a všechny a_i mají společnou hodnotu 1 nebo všechny jsou -1 (dvě řešení rovnice $x^2 = 1$). Čas tedy měříme od nového „času nula“ a pro $a_i = -1$ obrátíme jeho směr. Evoluce daného systému tedy vydrží časový posun a otočení šipky času.

Úloha 5.8.6. Nyní vyjde $c = \sqrt{10}$ a oběžná doba se zkrátí na $2\pi/c \doteq 2$ sekundy.

Úloha 5.8.7. Vyjde síla nezávislá na vzdálenosti a, rovná $2\pi\kappa\mu \doteq 4.2\cdot 10^{-10}\cdot \mu$ newtonu, viz [45, str. 194].

Úloha 6.1.2. Buď $\liminf_{n\to\infty} a \mid n - b \mid n > 0$ anebo $\limsup_{n\to\infty} a \mid n - b \mid n < 0$.

Úloha 6.2.4. Zde

Úloha 6.3.6. Pro dané $\alpha \in S$, $\alpha > 0$, uvažte supremum množiny $\{\beta \in S \mid \beta\alpha < 1\}$.

Úloha 6.4.1. Nelze. Co je to reálná osa? Množina reálných čísel. Argumentuje se tu bludným kruhem.

Literatura

[1] M. H. Albert and M. S. Paterson, Bounds for the growth rate of meander numbers, *J. Combin. Theory Ser. A* **112** (2005), 250–262.

[2] P. S. Aleksandrov, O tak nazyvaemoj kvazirovnomernoj schodimosti, *Uspechi Mat. Nauk* **3** (1948), 213–215.

[3] P. Alessandri and V. Berthé, Three distances theorem and combinatorics on words, *Enseign. Math.* **44** (1998), 103–132.

[4] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis. Second edition*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.

[5] V. I. Arnol'd, *Gjujgens i Barrou, N'juton i Guk. Pervye šagi matematičeskogo analiza i teorii katastrof, ot evol'vent do kvazikristallov*, Nauka, Moskva, 1989.

[6] C. Arzelà, Intorno alla continuitá della somma di infinitá di funzioni continue, *Rend. R. Accad. Sci. Ist. Bologna* (1883/84), 79–84.

[7] J. Avigad and V. Brattka, Computability and analysis: the legacy of Alan Turing, ArXiv:1206,3431v2, 2012, 49 stran.

[8] B. Balcar a P. Štěpánek, *Teorie množin*, Academia, Praha, 2001.

[9] B. Banaschewski, On proving the existence of complete ordered fields, *Amer. Math. Monthly* **105** (1998), 548–551.

[10] J. Barajas and O. Serra, The lonely runner with seven runners, *Electron. J. Combin.* **15** (2008), Research paper 48, 18 pp.

[11] A. Barvinok, The complexity of generating functions for integer points in polyhedra and beyond, *International Congress of Mathematicians. Vol. III*, 763–787, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[12] S. Batterson, *Stephen Smale: The Mathematician Who Broke the Dimension Barrier*, AMS, Providence, RI, 2000.

[13] J. Beck, Deterministic approach to the kinetic theory of gases, *J. Stat. Phys.* **138** (2010), 160–269.

[14] J. Bečvář a kolektiv, *Eduard Weyr 1852–1903*, Prometheus, Praha, 1995.

[15] L. Blum, Computing over the reals: where Turing meets Newton, *Notices AMS* **51** (2004), 1024–1034.

[16] B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, C. H. Reclam sen., Leipzig, 1851 (z pozůstalosti autora vydal Fr. Přihonsky).

[17] B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, Felix Meiner, Leipzig, 1920 (otisk [16], s komentářem H. Hahna).

[18] B. Bolzano, *Paradoxy nekonečna*, nakladatelství ČSAV, Praha, 1963 (překlad [17] O. Zicha).

[19] É. Borel, Le calcul des intégrales définies, *Journal de Mathématiques pures et appliquées* **6** (1912), 159–210.

[20] M. Braverman, On the complexity of real functions, ArXiv:cs/0502066v1, 2005, 34 stran.

[21] M. Braverman and S. Cook, Computing over the reals: foundations for scientific computing, *Notices AMS* **53** (2006), 318–329.

[22] W. Brian, Three conditionally convergent series, ArXiv:1809.02470v1, 2018, 18 stran.

[23] T. J. I'A. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinite Series*, MacMillan and Co., London, 1908.

[24] A. M. Bruckner, *Differentiation of Real Functions*, AMS, Providence, RI, 1994 (druhé vydání, první v r. 1978).

[25] A. M. Bruckner and J. L. Leonard, Derivatives, *Amer. Math. Monthly* **73** (1966), 24–56.

[26] L. Bukovský, *Množiny a všeličo okolo nich*, Alfa, Bratislava, 1985.

[27] L. Bukovský, *The structure of the real line*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2011.

[28] A. Burdman-Feferman and S. Feferman, *Alfred Tarski. Life and Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[29] K. Burns, O. Davidovich and D. Davis, Average pace and horizontal chords, ArXiv:1507.00871v1, 2015, 11 str.

[30] A. Caserta, G. Di Maio and L. Holá, Arzelà's theorem and strong uniform convergence on bornologies, *J. Math. Anal. Appl.* **371** (2010), 384–392.

[31] D. Cass and G. Wildenberg, Math Bite: A Novel Proof of the Infinitude of Primes, Revisited, *Math. Mag.* **76** (2003), 203.

[32] P. L. Clark and N. J. Diepeveen, Absolute convergence in ordered fields, *Amer. Math. Monthly* **121** (2014), 909–916.

[33] P. J. Cohen, A simple proof of the Denjoy-Carleman theorem, *Amer. Math. Monthly* **75** (1968), 26–31.

[34] D. Cruz-Uribe, The relation between the root and ratio tests, *Math. Mag.* **70** (1997), 214–215.

[35] J. W. Dawson, Jr., *Logical Dilemmas. The Life and Work of Kurt Gödel*, A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1997.

[36] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1872.

[37] R. Descartes, *Geometrie*, OIKOYMENH, Praha, 2011 (latinsko-české zrcadlové vydání, z prvního francouzského vydání přeložil a komentáři opatřil Jiří Fiala).

[38] R. Drozdowski, J. Jędrzejewski and A. Sochaczewska, On the almost uniform convergence, *Pr. Nauk. Akad. Jana Długosza Częst. Mat.* **18** (2013), 11–17.

[39] F. Ďuriš, *Infinite series: Convergence tests*, Bc. thesis, Katedra Informatiky, Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, 2009.

[40] S. B. Ekhad, Automated generation of anomalous cancellations, ArXiv:1709.03379v1, 2017, 4 str.

[41] G. Everest, A. van der Poorten, I. Shparlinski and T. Ward, *Recurrence Sequences*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[42] G. Faber, Über stetige Funktionen (zweite Abhandlung), *Math. Ann.* **67** (1910), 372–443.

[43] E. A. Fellmann, *Leonhard Euler*, Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg, 1995.

[44] R. A. C. Ferreira, A new look at Bernoulli's inequality, ArXiv:1702.00265v1, 2017, 10 str.

[45] R. P. Feynman, R. B. Leighton a M. Sands, *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 1/3*, Fragment, Havlíčkův Brod, 2000 (překlad anglického vydání z r. 1963, obálka a grafická úprava: Marek Jodas, odborná korektura: Doc. Ing. Ivan Štoll, CSc., řešení příkladů a cvičení: Doc. Ing. Ivan Štoll, CSc.).

[46] R. P. Feynman, R. B. Leighton a M. Sands, *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*, Fragment, Havlíčkův Brod, 2001 (—"—).

[47] R. P. Feynman, R. B. Leighton a M. Sands, *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 3/3*, Fragment, Havlíčkův Brod, 2002 (—"—).

[48] P. Flajolet, Analytic models and ambiguity of context-free languages, *Theoret. Comput. Sci.* **49** (1987), 283–309.

[49] P. Flajolet and R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Oxford University Press, Oxford, UK, 2009.

[50] T. Forster, Sharvy's Lucy and Benjamin puzzle, *Studia Logica* **90** (2008), 249–256.

[51] H. Furstenberg, On the infinitude of primes, *Amer. Math. Monthly* **62**, (1955), 353.

[52] T. W. Gamelin, What really are real numbers?, `http://www.math.ucla.edu/~twg/real.numbers.doc` (staženo 5. 7. 2016).

[53] J. Gleick, *Genius: The Life and Science of Richard Feynman*, Vintage books, New York, 1992.

[54] I. P. Goulden and D. M. Jackson, *Combinatorial Enumeration*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[55] T. Gowers, *Mathematics. A Very Short Introduction*, Oxford University Press, Oxford, UK, 2002.

[56] T. Gowers, *Matematika*, Dokořán, Praha, 2006 (překlad [55] Jiřího Matouška).

[57] A. Grzegorczyk, Computable functionals, *Fund Math.* **42** (1955), 168–205.

[58] A. Grzegorczyk, On the definition of computable real continuous functions, *Fund Math.* **44** (1957), 61–71.

[59] J. Haigh, *Probability. A Very Short Introduction*, Oxford University Press, Oxford, 2012.

[60] J. M. Hammersley and D. J. A. Welsh, Further results on the rate of convergence to the connective constant of the hypercubical lattice, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **13** (1962), 108–110.

[61] G. H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, 1921 (třetí vydání, první vyšlo v roce 1908).

[62] G. H. Hardy, The ordinal relations of the terms of a convergent sequence, *Proc. London Math. Soc. (2)* **8** (1910), 295–300.

[63] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford, at the Clarendon Press, 1949.

[64] G. H. Hardy, *Obrana matematikova*, Prostor, Praha, 1999 (z angličtiny přeložil Josef Moník).

[65] J. F. Harper, Defining continuity of real functions of real variables, *BSHM Bulletin* **31** (2016), 189–204.

[66] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig, 1914.

[67] A. Hodges, *Alan Turing: The Enigma*, Vintage, London, 1992.

[68] D. R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach. Existenciální gordická balada. Metaforická fuga o mysli a strojích v duchu Lewise Carrolla*, Dokořán, Praha, 2012 (z angličtiny přeložili Petr Holčák, Karel Horák, Otto Huřťák, Zdeněk Kárník, Luboš Pick, Jiří Podolský, Jiří Rákosník, Martin Žofka).

[69] R. Chapman, Evaluating $\zeta(2)$, `http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/rjchapma/etc/zeta2.pdf`

[70] V. Jarník, *Diferenciální počet (I)*, Academia, Praha, 1974 (šesté vydání, první vyšlo v roce 1946).

[71] V. Jarník, *Diferenciální počet (II)*, Academia, Praha, 1984 (čtvrté vydání, první vyšlo v roce 1953).

[72] T. J. Jech, *The axiom of choice*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.

[73] I. Jex, I. Štoll a J. Tolar, *Klasická teoretická fyzika*, Karolinum, Praha, 2017.

[74] T. J. Jech, *Set theory. The third millennium edition, revised and expanded*, Springer, Berlin, 2003.

[75] A. Kanamori, The empty set, the singleton, and the ordered pair, *Bull. Symbolic Logic* **9** (2003), 273–298.

[76] P. Kasík, Nekonečné množství devítek vám zamotalo hlavu. Opravdu je to přesně 1?, `http://technet.idnes.cz/nula-cela-devet-periodickych-se-rovna-jedne-matematicke-ilustrace-dukazy-1q3-/veda.aspx?c=A160624_170330_veda_pka` (staženo 5. 7. 2016).

[77] J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto, 1955.

[78] M. Klazar, Real numbers as infinite decimals and irrationality of $\sqrt{2}$, ArXiv:0910.5870v1, 2009, 20 str.

[79] K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Berlin, Springer, 1996 (6. vydání, poprvé vyšlo v r. 1922).

[80] D. E. Knuth, Two notes on notation, *Amer. Math. Monthly* **99** (1992), 403–422 (arXiv:math/9205211).

[81] K.-I Ko, *Complexity Theory of Real Functions*, Birkhäuser, Boston, MA, 1991.

[82] V. Kolman, *Filosofie čísla*, Filosofia, Praha, 2009.

[83] V. Kolman, *Idea, číslo, pravidlo*, Filosofia, Praha, 2012.

[84] V. Kolman a V. Punčochář, *Formy jazyka; úvod do logiky a její filosofie*, Filosofia, Praha, 2016.

[85] J. Kopáček, *Matematická analýza nejen pro fyziky (I)*, MATFYZPRESS, Praha, 2004.

[86] I. Kraus, *Fyzika v kulturních dějinách Evropy. Romantici a klasikové*, Česká technika – nakladatelství ČVUT, Praha, 2009.

[87] I. Kriz and A. Pultr, *Introduction to Mathematical Analysis*, Springer Basel, Basel, 2013.

[88] P. Kulhánek, *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky*, AGA, Praha, 2016.

[89] D. Lacombe, Extension de la notion de fonction récursive aux fonctions d'une ou plusieurs variables réelles. I, *C. R. Acad. Sci. Paris* **240** (1955), 2478–2480.

[90] E. Landau und D. Gaier, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Springer, Berlin, 1986.

[91] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[92] F. M. Liang, A short proof of the $3d$ distance theorem, *Discrete Math.* **28** (1979), 325–326.

[93] L. Lovász, Discrete and continuous: two sides of the same?, *Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part I* (2000), 359–382 (dostupné na Internetu).

[94] M. Macháček, *Encyklopedie fyziky*, Mladá fronta, Praha, 1995.

[95] J. Malina a J. Novotný (editoři), *Kurt Gödel*, Nadace Universitatis Masarykiana v Brně, Nakladatelství Georgetown v Brně, Nakladatelství a vydavatelství NAUMA v Brně, Brno, 1996.

[96] A. Marcus and G. Tardos, Excluded permutation matrices and the Stanley–Wilf conjecture, *J. Combin. Theory Ser. A* **107** (2004), 153–160.

[97] S. Marcus, *Matematická analýza čtená podruhé*, Academia, Praha, 1976. Z rumunského originálu „Noţiuni de analiză matematică, originea, evoluţia si semnificaţia lor“ vydaného nakladatelstvím Editura ştiintifică, Bucureşti 1965 přeložil RNDr. Bohdan Zelinka, CSc.

[98] V. Maz'ya and T. Shaposhnikova, *Jacques Hadamard. A Universal Mathematician*, AMS and LMS, Providence, RI, 1998.

[99] J. Mehra, *The Beat of a Different Drum: The Life and Science of Richard Feynman*, Oxford University Press, Oxford, 1994.

[100] Z. A. Melzak, *Bypasses. A Simple Approach to Complexity*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983.

[101] L. Milla, Ein Ausfürlicher Beweis der Chudnovsky-Formel mit elementarer Funktionentheorie. A detailed proof of the Chudnovsky formula with means of basic complex analysis, ArXiv:1809.00533v1, 2018, 44 stran.

[102] D. S. Mitrinovič and J. E. Pečarič, Bernoulli's inequality, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **42** (1993), 317–337.

[103] J. Montaldi and K. Steckles, Classification of symmetry groups for planar n-body choreographies, *Forum Math. Sigma* **1** (2013), e5, 55 pp.

[104] R. Montgomery, A new solution to the three-body problem, *Notices Amer. Math. Soc.* **48** (2001), 471–481.

[105] R. Montgomery, The three-body problem and the shape sphere, *Amer. Math. Monthly* **122** (2015), 299–321.

[106] B. Novák (editor), *Life and Work of Vojtěch Jarník. 1897–1970. Society of Czech Mathematicians and Physicists*, Prometheus, Praha, 1999.

[107] J. Obdržálek, *Úvod do termodynamiky, molekulové a statistické fyziky*, MATFYZPRESS, Praha, 2015.

[108] L. Olivier, Remarques sur les series infinies et leur convergence, *J. Reine Angew. Math.* **2** (1827), 31–44.

[109] J. C. Oxtoby, Horizontal chord theorems, *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), 468–475.

[110] R. Penrose, *The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Jonathan Cape, London, 2004.

[111] G. Perarnau and O. Serra, Correlation among runners and some results on the lonely runner conjecture, *Electron. J. Combin.* **23** (2016), Paper 1.50, 22 pp.

[112] J. Peregrin a M. Vlasáková, *Filosofie logiky*, Filosofia, Praha, 2018.

[113] L. Pick, Hrášek a sluníčko. O matematickém paradoxu Stefana Banacha a Alfreda Tarského, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* **55** (2010), 191–214.

[114] A. van der Poorten, *Notes on Fermat's Last Theorem*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.

[115] D. Preiss and M. Tartaglia, On characterizing derivatives, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 2417–2420.

[116] J. Propp, Real analysis in reverse, *Amer. Math. Monthly* **120** (2013), 392–408.

[117] P. Pudlák, *Logical foundations of mathematics and computational complexity*, Springer, Cham, 2013.

[118] Ch. Ch. Pugh, *Real Mathematical Analysis*, Springer, Berlin, 2002.

[119] A. Pultr, *Texty k přednášce Matematické struktury*, `http://kam.mff.cuni.cz/ pultr/`

[120] A. Pultr, Zorn according to Witt or Witt did it, 2 str.

[121] D. Rattaggi, Error estimates for the Gregory–Leibniz series and the alternating harmonic series using Dalzell itegrals, ArXiv:1809.00998v1, 2018, 7 stran.

[122] V. Rayskin, A connection between the root and ratio test for series in calculus courses, ArXiv:1804.10056v3, 2018, 3 str.

[123] G. Rein, The asymptotic behavior of solutions to the repulsive n-body problem, arXiv:1707.03626v1, 2017, 6 str.

[124] B. Riemann, Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, 1854 (část Riemannovy habilitační práce, uveřejněno až v r. 1867).

[125] K. Roth, Sur quelques ensembles d'entiers, *C. R. Acad. Sci. Paris* **234** (1952), 388–390.

[126] R. M. Sainsbury, *Paradoxes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995 (druhé vydání).

[127] D. Scott and D. McCarty, Reconsidering ordered pairs, *Bull. Symbolic Logic* **14** (2008), 379–397.

[128] V. T. Sós, On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötwös Sect. Math.* **1** (1958), 127–134.

[129] E. Specker, Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, *The J. of Symb. Logic* **14** (1949), 145–158.

[130] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics. Vol. 1*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[131] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics. Vol. 2*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[132] R. P. Stanley, *Catalan Numbers*, Cambridge University Press, New York, 2015.

[133] J. Stillwell, *The real numbers. An introduction to set theory and analysis*, Springer, Cham, 2013.

[134] J. Surányi, Über die Anordnung der Vielfachen einer reelen Zahl mod 1, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötwös Sect. Math.* **1** (1958), 107–111.

[135] S. Świerczkowski, On successive settings of an arc on the circumference of a circle, *Fund. Math.* **46** (1958), 187–189.

[136] G. J. Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1986 (z maďarštiny přeložily Márta Alpár a Éva Unger).

[137] T. Šalát and V. Toma, A classical Olivier's theorem and statistical convergence, *Ann. Math. Blaise Pascal* **10** (2003), 305–313.

[138] V. Švejdar, *Logika. Neúplnost, složitost a nutnost*, Academia, Praha, 2002.

[139] T. Tao, *Analysis I*, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2006.

[140] T. Tao, *An Epsilon of Room, II: pages from year three of a mathematical blog*, AMS, Providence, RI, 2011.

[141] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986 (druhé rozšířené vydání, komentované D. R. Heath-Brownem).

[142] P. Trojovský a J. Veselý, *Vytvořující funkce*, PMFA, **45** (2000), 7–38.

[143] A. M. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. of the London Math. Soc.* **42** (1937), 230–265.

[144] V. R. Rao Uppuluri and J. A. Carpenter, Numbers generated by the function $\exp(1 - e^x)$, *Fib. Quart.* **7** (1969), 437–448.

[145] J. Veselý, *Matematická analýza pro učitele. První díl*, MATFYZPRESS, Praha, 2001.

[146] P. Vopěnka, *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky*, Práh, Praha, 2016.

[147] P. Vopěnka, *Calculus infinitesimalis. Pars prima*, OPS, Kanina, 2010.

[148] L. Vrána, *Matematická analýza III — funkční posloupnosti a řady*, skriptum, FJFI ČVUT, Praha, 2011 (109 stran).

[149] S. Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[150] S. Wagon, Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle, *Amer. Math. Monthly* **94** (1987), 601–617.

[151] N. Weaver, Is set theory indispensable?, arXiv:0905.1680v1, 2009, 21 str.

[152] N. Weaver, *Truth & Assertibility*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2015.

[153] K. Weihrauch, *Computable Analysis. An introduction*, Springer, Berlin, 2000.

[154] E. Weyr, *Počet differenciálný*, Jednota českých matematiků, Praha, 1902.

[155] J. M. Wills, Zwei Sätze über inhomogene diophantische Approximation von Irrationalzahlen, *Monatsh. Math.* **71** (1967) 263–269.

[156] E. Witt, Beweisstudien zum Satz von M. Zorn, *Math. Nachrichten* **4** (1951), 434–438.

[157] L. Wittgenstein, *Filosofická zkoumání*, Filosofický ústav AV ČR, Praha, 1993 (z německého originálu *Philosophische Untersuchungen* (...) přeložil Jiří Pechar).

[158] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, Springer, Berlin, 2004.

[159] Ordered pair, článek ve Wikipedii
`https://en.wikipedia.org/wiki/Ordered_pair` (staženo 17. 8. 2016)

[160] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences,
`https://oeis.org`

[161] 0.999 ..., článek ve Wikipedii
`https://en.wikipedia.org/wiki/0.999...` (staženo 5. 7. 2016).

[162] Euler's continued fraction formula, článek ve Wikipedii
`https://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_continued_fraction_formula`

[163] Vojtěch Jarník, článek ve Wikipedii
`https://cs.wikipedia.org/wiki/Vojtěch_Jarník` (staženo 7. 7. 2016).

[164] Eilenberg–Mazur swindle, článek ve Wikipedii
`https://en.wikipedia.org/wiki/Eilenberg-Mazur_swindle` (staženo v lednu 2017)

[165] `https://en.wikipedia.org/wiki/Cavendish_experiment` (staženo v srpnu 2017)

Rejstřík